SHOUT
SHARE
IT

Q
2
A172
[v.5]
no.1-12
SI

Academie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique, Bruxelles. Classe des sciences.

ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

BULLETINS

DE LA

CLASSE DES SCIENCES

[5e série]
[t. 5]

1919

SMITHSONIAN
LIBRARIES

SMITHSONIAN INSTITUTION
OCT 1
NATIONAL MUSEUM

BRUXELLES

MAURICE LAMERTIN
LIBRAIRE-ÉDITEUR
Rue Coudenberg, 58-62

M. HAYEZ
IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE
Rue de Louvain, 112

1920

m

U. S. G. SURV
MAY 10 192
Acc. No.

ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

BULLETIN

DE LA

CLASSE DES SCIENCES

1919 — N° 1

SMITHSONIAN INSTITUTION
JUN 13 193
NATIONAL MUSEUM

BRUXELLES
HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE
112, rue de Louvain, 112

1919

MAY 10 192
Acc. No.

BULLETINS

DE LA

CLASSE DES SCIENCES

ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

BULLETINS

DE LA

CLASSE DES SCIENCES

1919

BRUXELLES
HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE
112, rue de Louvain, 112

1919

CLASSE DES SCIENCES

Séance du 4 janvier 1919.

M. Paul Pelseneer, *directeur* pour 1914, occupe le fauteuil.

M. A. Rutot, *membre titulaire,* fait fonctions de *secrétaire.*

Sont présents : MM. Léon Fredericq, J. Neuberg, Ch.-J. de la Vallée Poussin, Max Lohest, Jean Massart, Paul Stroobant, L. Dollo, *membres;* G. Lecointe, Bordet, *correspondants.*

M. Louis Lenain, membre de la Classe des beaux-arts, secrétaire de la Commission administrative, assiste à la séance.

Absences motivées : MM. Gravis et Julin, *membres;* Émile Marchal et Modeste Stuyvaert, *correspondants.*

M. le Directeur, en ouvrant la séance, prononce l'allocution suivante :

« Depuis la dernière fois que nous nous sommes trouvés réunis, des événements d'une gravité sans exemple se sont accomplis.

» Au mépris des traités, une nation prétendument civilisée a attaqué, sans motif, un petit peuple pacifique et inoffensif, — de la neutralité duquel elle était garante.

» Des régions entières ont été saccagées, des populations civiles ont été massacrées, des villes ont été détruites ou incendiées avec leurs trésors d'art ou leur antique bibliothèque, des milliers de familles — notamment celles de plusieurs de nos confrères — sont dans le deuil; et tout cela par le fait d'une nation parjure, dont les actes n'ont laissé dans nos cœurs d'autres sentiments que ceux de la haine et du mépris.

» Au lendemain de ces années tragiques, en présence de ces misères, de ces ruines, de ces dévastations, un premier devoir s'impose à nous : c'est d'user de l'autorité morale qui nous est dévolue, comme corps constitué indépendant, pour *élever une protestation solennelle* contre les abus de la force, qu'un agresseur sans foi et sans honneur a perpétrés sur notre territoire, — d'apporter à tous les nôtres qui furent victimes de cette guerre, un tribut de sympathie et de profonde commisération, — d'offrir l'hommage de notre admiration et de notre reconnaissance à notre glorieuse armée et à son vaillant chef le Roi Albert, à nos puissants Alliés qui ont combattu à nos côtés pour le même idéal, — et à la Nation belge tout entière, qui a supporté avec tant de noble dignité et une si inaltérable patience, toutes les épreuves que lui ont fait subir une odieuse agression et quatre années de la plus cruelle oppression.

» Aucun de nous, aucun de nos concitoyens, n'avait perdu, en effet, sa robuste confiance dans le triomphe final du droit contre la force brutale; et tous, nous avions conservé notre foi inébranlable dans l'avenir de notre pays.

» Celui-ci a pu être momentanément vaincu par un ennemi vingt fois plus nombreux, — il a été épuisé et ruiné par un peuple de barbares cultivés, mais il ne s'est pas laissé abattre par son long martyre; il n'a jamais abandonné sa ferme volonté de vivre par lui-même et de réédifier tout ce que l'envahisseur a détruit ou dérobé.

» Dans cet immense travail de reconstitution, chaque citoyen, chaque groupement social a son devoir à remplir. L'Académie ne faillira pas à sa tâche : elle aura à cœur de consacrer toute son activité à faire renaître la vie nationale dans le domaine intellectuel et à favoriser de tout son pouvoir la reprise et l'efflorescence des travaux scientifiques, artistiques et littéraires.

» C'est à cette œuvre patriotique que le pays nous convie. Donnons-lui l'assurance qu'aucun de nous ne ménagera ses efforts pour que cette renaissance soit rapide et pour qu'elle soit féconde. » *(Approbation et applaudissements unanimes.)*

La Classe décide l'insertion de ces paroles au *Bulletin.*

ADRESSE AU ROI.

Sur la proposition de son Directeur, la Classe décide l'envoi d'une adresse au Roi, à l'occasion de la libération du pays.

ÉLECTIONS.

M. Cesàro est élu directeur pour l'année 1919.
M. Gravis est élu directeur pour l'année 1920.

M. le Directeur exprime les vifs regrets de la Classe à l'occasion du décès du chevalier Marchal, secrétaire perpétuel; de MM. De Heen, Ch.-J.-P. Francotte, Michel Mourlon, Constantin Malaise et Ch. Van Bambeke, membres; Elie Metchnikoff, P. Duhem, Gaston Darboux, Chauveau et Gosselet, associés.

M. le Directeur regrette de n'avoir pu représenter la Classe à toutes les funérailles. Les discours prononcés respectivement par M. Rutot aux funérailles de M. Mourlon et M. Émile Marchal à celles de M. Malaise seront insérés au *Bulletin.*

M. le Directeur rappelle, dans les termes suivants, le souvenir du regretté confrère Van Bambeke :

MESSIEURS,

Lorsqu'on écrira un jour l'histoire des sciences biologiques dans notre pays, on y distinguera, comme ailleurs, deux périodes bien différentes par la fécondité de leur production : celle qui précède et celle qui suit l'adoption de la doctrine évolutionniste.

Ici comme partout, on doit donc faire honneur à ceux qui, non par le hasard du temps ou des circonstances, mais en vertu de leur clairvoyance et de leur perspicacité, se trouvèrent les premiers à embrasser résolument cette doctrine, à en inspirer leurs recherches et à en imprégner leur enseignement.

Ceux-là furent en Belgique, il y a cinquante ans, Édouard Van Beneden, que notre pays a perdu il y a une dizaine d'années, et Charles Van Bambeke, dont l'Académie de Belgique est aujourd'hui en deuil.

Notre Compagnie manifeste rarement son existence en présence du public, auquel sa constitution et ses labeurs sont peu connus. Cependant, quand l'un de ses membres vient à disparaître, elle a à cœur de le revendiquer comme sien, de rappeler les titres qu'il possède à l'admiration du monde scientifique et à la reconnaissance de la nation belge.

La carrière de Van Bambeke présente un caractère très particulier : ayant parcouru complètement et brillamment les études médicales, merveilleusement doué pour réussir dans la pratique de son art, il n'exerça cependant pour ainsi dire jamais la profession de médecin, ne fit pas de science appliquée, et — quoique professeur dans une faculté de médecine — consacra toute son activité, qui fut grande, à la science pure seulement. Il préféra les joies modestes de l'investigateur à la brillante renommée du praticien recherché du public. Il demeura exclusivement biologiste, faisant ainsi profiter une faculté de médecine et de nombreuses générations de médecins, d'un enseignement biologique nourri, élevé et solide.

Sauf dans ses travaux de début, qui portèrent sur l'anatomie humaine et sur la morphologie des Mammifères marins, c'est l'embryologie qui fut presque toujours le champ de ses recherches. Et s'il ne s'y engagea pas de très bonne heure, au moins était-il très sérieusement préparé, lorsque parurent ses premiers ouvrages sur le développement des Vertébrés inférieurs : Amphibiens et Poissons osseux (1863-1873).

Ceux-ci attirèrent immédiatement sur leur auteur l'attention du monde scientifique; et si l'on se reporte au temps où ils furent exécutés, si l'on songe aux méthodes techniques et à l'outillage de l'époque, si primitifs comparés à ceux de nos jours, on les apprécie aujourd'hui davantage encore !

En 1874, deux ans seulement après sa nomination à l'Université de Gand, avant l'apparition de son mémoire *in extenso* sur l'embryologie des Poissons, Van Bambeke fut élu à l'Académie, dans la Section des sciences naturelles. Aussi était-il, à la fin de sa vie, le doyen d'ancienneté, en même temps que le doyen d'âge, de la Classe des sciences et de l'Académie tout entière.

Chez certaines natures, des succès et des honneurs précoces ralentissent parfois l'activité productrice; chez Van Bambeke, au contraire, les travaux scientifiques se poursuivirent avec une constance et une régularité remarquables, malgré les lourdes charges d'un enseignement important et absorbant.

Dans l'ensemble du plus haut intérêt que constituent ses recherches, on peut distinguer essentiellement deux parties, étroitement liées entre elles cependant :

C'est, d'une part, celles qui se rapportent à l'embryologie proprement dite, où il examine les stades plus ou moins avancés du développement embryonnaire des êtres vivants;

D'autre part, celles où il envisage l'élément primordial de tout développement, c'est-à-dire la cellule-œuf considérée dans sa structure intime particulière et ses toutes premières modifications : ici il travaillait dans le domaine de la cytologie et de l'histologie, c'est-à-dire de l'autre moitié de son enseignement universitaire, et son exemple montre bien la part importante prise dans ce sujet (cytologie) par les études sur le développement.

Dans le premier ordre d'idées, il fit faire à l'embryologie des Vertébrés des progrès considérables d'une portée générale pour la connaissance des organismes et de leurs rapports de parenté, car la coordination est faite quand on a observé l'origine de l'être vivant et quand on le voit se construire peu à peu sous ses yeux; on saisit alors son plan d'ensemble : il suffit de « voir venir les choses » pour les comprendre. C'est surtout à l'investigation des formes inférieures de Vertébrés et notamment des Amphibiens qu'il se consacra; et il leur demeura toujours fidèle, sa dernière communication à leur sujet ayant été faite, alors qu'il avait près de quatre-vingts ans, au Congrès international de Zoologie de 1907.

A propos de la constitution de l'œuf, il fit paraître pendant les vingt dernières années du siècle passé, toute une série de travaux qui s'enchaînent, portant sur des Vertébrés et des Invertébrés. Ils furent jugés dignes de la plus haute distinction nationale accordée périodiquement aux productions scientifiques : ils reçurent, en effet, en 1902, le prix décennal des sciences zoologiques. Ils lui valurent aussi un honneur que la Société zoologique de France n'accorda jamais à un étranger : son élection comme président d'honneur de ce corps savant.

La carrière scientifique de notre vénéré et regretté confrère se distingue encore par un autre caractère, des plus rares et des plus précieux. Il fut, ce qui n'existe plus guère aujourd'hui, un biologiste complet, portant ses investigations sur le terrain botanique comme sur celui de la zoologie : ses recherches sur la structure des Champignons furent ainsi, pendant ces vingt dernières années, menées de front avec ses travaux d'embryologie animale, et, depuis son éméritat, l'absorbèrent même de plus en plus. Aussi avait-il acquis, dans ce domaine spécial, une enviable notoriété.

Pour ce qui concerne son œuvre dans l'enseignement, je n'ai pas à m'y arrêter. Toutefois si, pendant un quart de siècle, Van Bambeke a donné sur la structure microscopique des êtres vivants et sur l'embryologie générale un cours nourri et au niveau des derniers progrès, il est juste d'affirmer que maints de ces progrès étaient dus à son travail personnel. La création — en collaboration avec Van Beneden — des *Archives de Biologie* et celle du laboratoire biologique qui fonctionna pendant quelques années à Ostende, sont encore d'autres manifestations du zèle qu'il déploya toujours pour faire prospérer en Belgique les études biologiques.

Il servit de toutes ses forces la science qu'il aimait et à laquelle il ne trouvait pas que notre société, plus avide de bien-être que de hautes pensées, fît une place suffisante. Il pensait que les hommes de laboratoire, créateurs de richesses et de beautés matérielles et morales, ne sont pas partagés comme ils devraient l'être, que leur fonction — essentielle pourtant — n'est pas classée comme il convient dans notre organisation universitaire encore exagérément scolastique. Il n'admettait pas qu'on les épuisât, dans leur jeunesse, par des besognes ingrates, ni — lorsqu'ils ont, malgré tout, montré leur goût et leur pouvoir pour la recherche et donné leur mesure — qu'on gaspillât leur temps sous prétexte d'honneurs ou d'administration : ainsi s'explique qu'il déclinât le rectorat.

Mais, en dehors de l'enseignement supérieur, il fut aussi un vulgarisateur, — notamment par divers travaux de synthèse, comme celui qui portait sur l' « origine des tissus de substance conjonctive » (1889), et comme sa mémorable conférence sur la marche de l'histologie depuis vingt-cinq ans, qui fut en quelque sorte sa leçon de clôture (1899), — puis encore par des lectures aux séances publiques de l'Académie : « Pourquoi nous ressemblons à nos parents » (1885), ou « Les matériaux de l'organisme humain » (1893), lorsqu'il était directeur de la Classe des sciences et président de l'Académie entière.

La multiplicité des objets dont il s'occupa lui donnait une autorité considérable dans les travaux de notre Institution ; et c'est à son examen que presque toutes les questions d'ordre biologique étaient renvoyées; les nombreux rapports qu'il fut ainsi appelé à rédiger témoignent encore de son inlassable activité.

On a dit parfois que la connaissance profonde des êtres et des choses de la nature doit mener à la suprême bonté : Van Bambeke en fut le plus admirable exemple. Pendant de longues années, ses confrères restèrent sous le charme de son inimitable urbanité, en admirant la dignité de sa vie, l'élévation et l'indépendance de son esprit, la délicatesse et la bienveillance de son caractère. Et l'impression la plus vivace que conservent de lui tous ceux qui l'ont connu, c'est qu'il fut la parfaite incarnation du désintéressement, de l'équité, de l'indulgence éclairée et de la plus exquise bonté.

Devant une carrière si probe, si bien remplie, et d'une si belle homogénéité, ceux qui furent à l'Académie ses compagnons de travail ne peuvent que s'incliner avec le plus profond respect ; et après l'hommage rendu à l'œuvre, ils s'unissent aussi en ce témoignage unanime que, dans celui qui en fut l'ouvrier, ils connurent à la fois un biologiste éminent, un confrère affable et charmant, et un véritable homme de bien.

Au nom de l'Académie royale de Belgique, je salue la glorieuse mémoire de Charles Van Bambeke !

CORRESPONDANCE.

L'Académie royale des sciences exactes, physiques et naturelles de Madrid fait part de la mort de son président, Son Excellence J. Echegaray, survenue à Madrid le 14 septembre 1916. — Des condoléances seront exprimées.

— La Société mathématique de France exprime ses cordiales et chaleureuses félicitations pour la délivrance de la Belgique. Elle « espère fermement que les relations nouées pendant les grands jours tragiques seront solides et durables, et elle saisira toutes les occasions de les rendre plus étroites entre des savants qu'animent au même degré le culte de la science et l'amour de la Patrie ». — Des remerciements seront exprimés.

— L'École d'anthropologie de Paris propose la création d'un Institut international d'anthropologie permanent entre tous les anthropologistes des nations alliées. — Pris pour notification.

— Le Service géologique du Portugal adresse ses félicitations au sujet de la libération de la Belgique. — Remerciements.

— L'Académie des sciences du Portugal communique un vœu pour que les Académies et Universités du monde entier « évitent désormais tout contact avec les corporations scientifiques et artistiques allemandes, dont l'esprit misérable et nuisible se dégage si nettement du manifeste des quatre-vingt-treize ».

— Le Conseil académique de l'Université de Gand communique une copie de la lettre qu'il adresse aux membres des Universités étrangères pour appeler leur attention sur l'œuvre de destruction à laquelle ils ont vu collaborer à Gand les agents du militarisme prussien et les représentants officiels de l'Allemagne savante.

— Hommage d'ouvrages :

Notice historique sur Deodat Dolomien, par Alfred Lacroix, associé;

Les minéraux et les roches. Études pratiques de cristallographie, pétrographie et minéralogie, par H. Buttgenbach;

Tableaux des constantes géométriques des minéraux, par H. Buttgenbach (présenté par M. Max Lohest).

— Remerciements.

— Pli cacheté :

La Classe accepte en dépôt un pli cacheté de M. Edm. Van Aubel et relatif à des recherches interrompues par la guerre.

PRIX FRANÇOIS DERUYTS.

M. Neuberg demande à être remplacé en qualité de premier rapporteur par M. Stuyvaert. — Adopté.

MÉMOIRES DE CONCOURS.

Des membres s'informent du sort des mémoires soumis aux concours de la Classe et qui se trouvaient au Palais des Académies en 1914. M. le Secrétaire de la Commission administrative fait connaître que les recherches faites jusqu'à présent n'ont pas abouti et que ces mémoires doivent être considérés comme perdus.

CONFÉRENCE DES ACADÉMIES DES SCIENCES INTERALLIÉES.

La Classe ratifie la désignation de MM. Charles-J. de la Vallée Poussin, Lecointe et Massart comme délégués à la Conférence des Académies des sciences interalliées pour les sessions tenues à Londres et à Paris en octobre et en novembre 1918.

Une note de M. Lecointe sur les *Relations intellectuelles internationales d'après guerre* et les comptes rendus des sessions de Londres et de Paris seront distribués aux membres des trois Classes et publiés dans le *Bulletin.*

RAPPORTS.

Sur avis verbal de M. Max Lohest, un mémoire de M. H. Buttgenbach : *Contribution à l'étude des calcites belges* (36 pages et 24 fig.), sera publié dans la collection des *Mémoires* in-8°.

COMMUNICATIONS ET LECTURES.

Les variations et leur hérédité chez les Mollusques (321 pages et grav.), par Paul Pelseneer. — Impression dans les *Mémoires* in-8°.

Courbes algébriques gauches représentables par des matrices (6 pages), par Modeste Stuyvaert, correspondant. — Impression au *Bulletin.*

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE.

M. le Secrétaire de la Commission administrative consulte la Classe au sujet de la nécessité de réunir, sans tarder, une Assemblée générale des trois Classes, afin de pouvoir rendre compte de sa mission pendant la guerre.

En présence des difficultés actuelles des communications, plusieurs membres suggèrent d'attendre pour fixer une date.

M. Massart demande l'impression et la distribution des rapports de M. le Secrétaire.

— Accordé.

En raison du petit nombre de membres présents, la question de l'exclusion des membres associés qui ont signé le manifeste des quatre-vingt-treize et en général de tous les hommes de science des pays ennemis, sera mise à l'ordre du jour de la prochaine séance.

Discours prononcé aux funérailles de M. Mourlon,

par A. Rutot, membre de l'Académie.

Messieurs,

L'annonce de la disparition si inattendue de notre excellent confrère Michel Mourlon a profondément ému et attristé ses collègues de l'Académie royale de Belgique et tous les amis des sciences géologiques.

Nous nous croyons autorisé à représenter, en ces tristes circonstances, ces divers groupes scientifiques et nous prions la famille du défunt d'agréer l'expression de nos regrets unanimes.

Mourlon entra jeune dans la carrière scientifique, car, dès ses études à l'Université de Bruxelles terminées, il y acquit le titre de docteur en sciences, puis celui de professeur agrégé.

Ces belles dispositions le firent remarquer par la Direction du Musée royal d'Histoire naturelle et, en 1869, Mourlon entrait dans ce grand établissement en qualité d'aide-naturaliste, pour passer rapidement conservateur en 1872.

C'est pendant cette période qu'il collabora à la belle publication bien connue *Patria Belgica* et qu'il prépara l'impression des trois volumes des *Notes d'André Dumont* qui parurent en 1878.

En raison de ses connaissances spéciales, la Direction du Musée royal d'Histoire naturelle attacha notre regretté confrère au Service de la Carte géologique du Royaume à l'échelle du 1 : 20000^e^ et lui confia l'étude monographique et le levé du terrain dévonien supérieur.

En même temps, Michel Mourlon, amplifiant son article de *Patria Belgica,* fit paraître, en 1881, les deux magnifiques volumes de sa *Géologie de la Belgique,* ouvrage qui initia à la connaissance des sciences géologiques et paléontologiques tant de jeunes vocations, dont sont sortis maints géologues d'élite.

Ces nombreux travaux ouvrirent à Michel Mourlon les portes de l'Académie royale de Belgique, dont il fut élu membre titulaire en 1886. Il fit paraître dans les recueils de cette institution de nombreuses notes sur les résultats de ses observations relatives aux terrains quaternaires, aux terrains tertiaires et au terrain dévonien.

C'est à Mourlon qu'on doit la connaissance du gisement d'ossements quaternaires d'Ixelles, dont les matériaux sont pieusement conservés au Musée royal d'Histoire naturelle; c'est à lui aussi que l'on doit, après les recherches préliminaires d'André Dumont, les premières études par sondages sur les territoires si peu connus de la Campine.

Mais, durant cette période, des événements importants s'étaient produits : Mourlon avait quitté le Musée royal d'Histoire naturelle pour prendre la direction du Service géologique qui devait mettre sur pied la nouvelle Carte géologique de la Belgique au 1 : 40 000^e et la conduire à son achèvement.

Dans ses nouvelles fonctions, notre collègue montra autant de zèle et d'esprit d'organisation que par le passé et, au point de vue scientifique, il réalisa une œuvre des plus utiles, la *Bibliographia geologica,* c'est-à-dire le catalogue de tout ce qui a paru en Géologie et en Paléontologie, classé d'après le système décimal, accompagné de la formation d'une riche bibliothèque où tous ceux qui s'intéressent à la géologie, tant théorique que pratique, trouvent les plus précieux renseignements.

En outre de ses fonctions officielles qu'il remplissait avec compétence, Michel Mourlon a continué à publier des notes importantes, tant à l'Académie que dans les recueils des nombreuses sociétés scientifiques dont il faisait partie.

A l'Académie, les qualités de notre éminent collègue le conduisirent aux diverses commissions administratives et, en 1894, à la direction de la Classe des sciences.

Dans les sociétés scientifiques et dans les Congrès internationaux, la présidence et d'autres honneurs lui échurent.

D'après ce trop court aperçu, on peut juger combien la disparition d'un homme aussi actif et dévoué que celui dont nous déplorons la perte, laisse de vides qui seront difficilement comblés; mais, quoi qu'il en soit, notre mémoire conservera toujours un souvenir ému du collègue bon et serviable qu'il fut et son nom restera hautement honoré parmi le petit nombre des amis de la science.

Adieu, mon cher collègue et ami, adieu !

Discours prononcé aux funérailles de C. Malaise,
par Émile Marchal, membre de l'Académie.

Messieurs,

Au nom de l'Académie royale de Belgique, je viens remplir la pénible mission d'adresser quelques paroles d'adieu à celui qui fut Constantin Malaise.

Seules, les circonstances de l'heure présente sont cause qu'une voix plus autorisée que la mienne ne s'élève pas en ce moment ici pour rappeler les mérites d'un confrère aimé dont la vie est, depuis plus de cinquante ans, intimement liée à l'histoire de notre Compagnie.

C'est, en effet, le 15 décembre 1865 que la Classe des sciences associait à ses travaux, en qualité de correspondant de la Section des sciences naturelles, le jeune géologue que désignaient déjà aux suffrages de ses confrères ses premières études, pleines de promesses, sur les terrains siluriens de la Belgique.

Le 15 décembre 1873, son élection de membre titulaire venait consacrer définitivement sa collaboration à notre œuvre de progrès.

En janvier 1909, la Classe des sciences le désignait comme directeur pour l'année 1910, période pendant laquelle il présida aux travaux de celle-ci.

A la séance annuelle de la Classe, en décembre 1910, il prononçait le discours présidentiel d'usage pour lequel il avait choisi comme thème son sujet d'études favori : « Les terrains les plus anciens de la Belgique. »

Très nombreuses sont les charges et missions honorifiques qui lui furent confiées, tant dans le pays qu'à l'étranger, par l'Académie dont il représenta la Classe des sciences, notamment aux Assemblées internationales des Académies de Rome (1910) et Petrograd (1913).

Devenu sinon le doyen d'âge, en fait, le membre le plus ancien de la Classe des sciences, Malaise avait atteint, en décembre dernier, son cinquantième anniversaire d'entrée dans la carrière académique.

La Classe n'avait pu que souligner alors cet événement aussi rare qu'heureux, se réservant de fêter dignement, en des jours meilleurs, le vénérable et sympathique jubilaire.

Son dévouement sans bornes aux intérêts de l'Académie, dévouement poussé jusqu'à l'oubli de soi-même, devait lui être funeste.

Les quelques confrères qui, il y a un mois à peine, assistaient à la dernière séance de la Classe des sciences à Bruxelles, se souviendront toujours, avec une émotion intense, de son arrivée parmi nous, affaissé aux bras d'un huissier, terrassé par la souffrance et la fièvre.

Il avait tenu, malgré la maladie insidieuse qui, depuis quelques semaines déjà, minait sa robuste constitution, à se retrouver encore une fois parmi ses amis et à présider notre réunion.

Hélas! cet effort surhumain devait provoquer une aggravation subite de son état et hâter la fin de notre vénéré confrère.

La compétence nécessaire me manque malheureusement pour apprécier ici, comme il le faudrait, l'œuvre scientifique considérable de Malaise.

Ce sera d'ailleurs la tâche du biographe qui, dans la suite, suivant les traditions de l'Académie, retracera la carrière et analysera les travaux de notre savant confrère.

Qu'il nous suffise de dire que Malaise a consacré plus d'un demi-siècle de recherches patientes à l'étude méthodique des terrains cambriens et siluriens, et a acquis, dans ce domaine des connaissances géologiques, une réputation universellement reconnue.

Indépendamment de cette monographie des terrains les plus anciens de la Belgique qui constitue son œuvre maîtresse, Malaise s'est occupé avec un succès marqué de recherches minéralogiques, de géologie agricole, et a pris une part très importante à l'établissement de la Carte géologique de la Belgique.

Une voix autorisée vient de vous rappeler les étapes de la carrière professorale du regretté disparu, ses débuts à l'Université de Liége, son enseignement à l'Institut agricole de l'État, établissement auquel il a appartenu pendant plus de trente ans. Elle a rappelé aussi les nombreuses distinctions, aussi flatteuses que méritées, dont il a été comblé.

Dans tous les milieux où s'est développée son inlassable activité, notre confrère laissa le souvenir durable d'une érudition profonde mais sans prétention, d'un esprit original plein d'humour et d'un cœur sincèrement bon.

Ces hautes qualités faisaient de Malaise un confrère éminemment sympathique et aimé.

Aussi est-ce de tout cœur que l'Académie royale de Belgique s'associe aujourd'hui au deuil de sa famille, à celui de l'Institut agricole de Gembloux et de ses élèves, et adresse à son cher et vénéré membre le suprême adieu.

RAPPORT

SUR

la vie académique pendant la période de guerre 1914-1918,

par Louis LE NAIN, secrétaire de la Commission administrative.

Après les séances du mois d'août 1914, l'Académie entrait en vacances, ainsi que cela se pratiquait, selon le règlement, chaque année à pareille époque.

Entretemps, l'invasion des Germains, la prise de possession de notre local par les Allemands en septembre, ne nous permirent plus de pénétrer dans le Palais des Académies.

Les démarches de fonctionnaires du Ministère des Sciences et des Arts, celles tentées par des académiciens auprès des envahisseurs dans le but de protéger nos bibliothèques, nos archives, nos collections, sinon de libérer notre local, se heurtèrent à tous les refus des nouveaux occupants, se conduisant brutalement en maîtres et en vainqueurs.

Il fut cependant permis, après les premiers jours, à un de nos employés, de retirer quelques documents, tels que le livre des procès-verbaux de la Commission administrative qui lui tomba sous la main. Cette permission fut de courte durée et ne se renouvela guère, ni même plus du tout. A chaque démarche tentée dans la suite, tout fut brutalement refusé, et le Palais nous fut interdit complètement.

Cependant, à l'époque de la reprise de nos séances, en octobre, le Ministère des Sciences et des Arts nous donna l'hospitalité dans les locaux de la Bibliothèque royale. Une salle de réunion était mise à notre disposition, et le personnel du Secrétariat installé tant bien que mal dans le département des manuscrits.

Dès les premières réunions des Classes en janvier 1915, la question se posa de savoir quel serait le caractère des séances. La Classe des lettres et des sciences morales et politiques se ralliait à l'avis de confrères de Gand et de Liége, qui déclaraient ne considérer ces réunions que comme officieuses. Les deux autres Classes opinaient pour le contraire.

L'accord fut vite établi après des échanges de vues, car la discussion ne portait que sur des appellations.

La Classe des beaux-arts, toujours en nombre aux réunions, voulut continuer à siéger, estimant que l'abandon ne s'imposait pas encore; que la privation du local ordinaire n'était pas une raison pour entrer en léthargie. Des intérêts très graves devaient être ménagés, particulièrement en ce qui concerne la Caisse centrale des artistes belges. Elle ne pouvait, dans un pareil moment, suspendre le paiement des pensions aux veuves, les rentes temporaires et secours aux vieillards nécessiteux. Il fallut nommer un nouveau trésorier, et le Comité central devait fonctionner sous le contrôle de la Classe (¹).

Sur les points suivants l'accord fut complet entre les trois Classes :

1° On éviterait de porter à l'ordre du jour tout objet pouvant donner lieu à des discussions importantes ou à des décisions d'ordre général de nature à engager les membres empêchés d'assister aux séances;

2° Il ne serait pas fait d'élection aux places vacantes en ce moment, ni à celles qui pourraient se produire pendant la guerre ou tout au moins avant la reprise de notre activité;

3° Les jugements des concours annuels et des prix perpétuels seraient ajournés;

(¹) Séance du 8 décembre 1914.

4° Les questions à poser pour les prochains concours seraient remises à plus tard ;

5° L'Académie cesserait, à cause de la censure, toutes ses publications ;

6° L'Académie ne s'interdirait pas, cependant, l'impression des travaux en cours, ou des mémoires dont elle aurait en ce moment à sa disposition les manuscrits; ni l'impression des tables ou catalogues relatifs aux publications, aux collections ou bibliothèques qu'elle possède, etc.

Ceci dans la mesure compatible avec les ressources budgétaires minimes qui nous étaient octroyées sous le gouvernement de l'occupant.

En même temps le Ministère des Sciences et des Arts, par l'organe de M. le Directeur général, nous engageait vivement à maintenir constitués les rouages administratifs de l'Académie et du Secrétariat (nous y pensions aussi), afin d'être toujours à même de parer aux événements qui pourraient se produire, et dont nous ne pouvions prévoir la venue. Ne pas être pris au dépourvu, tel fut notre principal souci.

La Commission administrative d'abord devait exister. Les membres qui la composaient se réunirent et prièrent leur confrère Le Nain de continuer à remplir les fonctions de secrétaire. Notification en fut faite à M. le Directeur général. Les mandats des membres délégués des Classes furent continués pendant la dernière période de 1914.

Plus tard, à défaut d'élection pour les Classes des sciences et des lettres de délégués au sein de la Commission administrative, le Secrétaire, soucieux de la représentation de toutes les Classes dans ce collège, pria deux membres de chacune d'elles de remplir les fonctions de commissaire.

Pour ce qui regarde les bureaux des Classes, les membres dont le mandat était expiré, le continuèrent par tacite reconduction.

Si tout ne pouvait se faire toujours conformément au règlement pour les deux Classes des sciences et des lettres, l'essentiel était que les décisions prises ou à prendre par le Secrétaire ou la Commission administrative le fussent au su des Classes ou de leurs représentants.

Les réunions mensuelles, dans les Classes des sciences, et des sciences morales et politiques et des lettres, étaient fréquentées par un nombre restreint d'académiciens. Pour la Classe des beaux-arts, le nombre de membres présents fut pendant longtemps ce qu'il était en temps normal, et cela jusqu'au 30 juin 1917.

A dater de ce moment, les locaux du Secrétariat et des réunions furent transférés rue de Naples, 48. Ceux mis à notre disposition par le Gouvernement à la Bibliothèque royale étaient abandonnés, l'Académie cessant tout rapport avec le Ministère flamand issu de la division administrative. Le Secrétaire faisait approuver sa gestion jusqu'au 31 mai par la Cour des Comptes et cessait de disposer du budget. C'était là un moyen de nous soustraire à l'ingérence officielle éventuelle des traîtres ou de l'occupant, ingérence tentée quelquefois, et de protester contre la division administrative.

La correspondance en flamand émanant de ceux-ci resta toujours sans réponse.

La Commission administrative chargeait le Secrétaire de prendre toutes les mesures que comportaient les circonstances. Ces mesures avaient trait principalement au paiement du personnel resté fidèle, et aux fournitures indispensables de bureau. L'impression des mémoires, lectures dans les Classes, biographies de membres défunts, était arrêtée. L'imprimeur voulut bien nous faire crédit pour les sommes qui seraient dues dans la suite et continuer l'impression des tables, catalogues et autres travaux qui pouvaient nous être nécessaires lors de la rentrée, aux fins de la remise en marche de notre vie académique. La lecture des procès-verbaux des séances de la Commission administrative vous édifiera sur le détail de la gestion du Secrétaire, ff. de Secrétaire perpétuel, les voies et moyens employés pour faire face aux dépenses réduites, mais nécessaires du Secrétariat.

Lors de l'abandon des locaux de la Bibliothèque royale, l'hospitalité nous fut obligeamment offerte par la Société financière de transports et d'entreprises industrielles : deux salles pour y installer nos bureaux et la grande salle de réunion pour nos séances. Vous serez certainement d'avis de lui témoigner notre reconnaissance. (J'appris plus tard que la Banque Nationale, si elle avait connu notre situation, nous eût fait la même offre.)

A dater de cette époque, les Classes des sciences, et des sciences morales et politiques et des lettres ne se réunirent plus. La Classe des beaux-arts, sans convocation, continua à siéger, mais en nombre restreint de plus en plus jusqu'au jour (vers avril 1918) où elle ne se réunit plus du tout. Le Comité central de la Caisse des artistes avait alors les pouvoirs nécessaires pour continuer son œuvre.

Dans les réunions, des lectures et des communications étaient faites par des membres. La matière des futurs bulletins et des biographies d'académiciens défunts était recueillie pour l'impression.

Dans les Classes des sciences, et des sciences morales et politiques et des lettres, à raison du nombre restreint de membres présents aux réunions mensuelles, les lectures et communications faites pour le *Bulletin* étaient réservées généralement à l'approbation ultérieure de ces Classes,

Dans la Classe des beaux-arts, ces lectures, vu le nombre de membres présents, étaient soumises au vote de l'assemblée, ainsi que cela s'est toujours pratiqué. La Classe des beaux-arts, en outre, soucieuse d'accroître l'intérêt de ses travaux dans l'avenir, faisait appel aux lumières de membres d'autres Classes. C'est ainsi que feu notre regretté confrère Ch. Francotte vint nous donder deux conférences, avec projections, sur l'art grec. Le décès inopiné de ce savant confrère nous prive d'un intéressant travail que la Classe lui avait demandé pour son *Bulletin*, et qu'il ne put exécuter.

Plus tard nous priâmes notre confrère Rutot de nous faire une communication sur la reconstitution des races humaines préhistoriques au point de vue plastique, et sur les premières manifestations d'art chez ces races. Il en résulta un fort beau travail qui prit l'ampleur d'un mémoire. N'ayant pas d'autre manuscrit antérieur à notre disposition, dans le but d'utiliser le budget, la Classe décida d'en commencer l'impression.

C'est là une pratique à retenir pour l'avenir, d'inviter à nos séances des membres d'autres Classes et de leur demander de mettre à notre service leur savoir, lorsque l'art peut y trouver son intérêt. En même temps que nos bulletins y gagnent, nous donnons l'occasion aux confrères des sciences et des lettres d'abréger le temps d'attente pour leurs publications dans les recueils ressortissant à leurs Classes respectives, et d'alléger d'autant le stock des ouvrages qui attendent leur tour d'impression.

Au commencement de septembre 1918, le Gouvernement du Havre demanda une estimation (approximative bien entendu) des frais que nécessiterait la réadaptation du Palais des Académies. Les autres établissements scientifiques étaient saisis de la même demande. Le Secrétaire s'empressa de présenter ce travail au représentant du Gouvernement, en faisant ses réserves quant aux estimations.

Aussi longtemps que nous fûmes réduits au budget mis à notre disposition par l'occupant et avant la division administrative, le Secrétaire s'appliqua à employer entièrement ces maigres ressources et à n'en rien retourner au Trésor, comme cela lui était suggéré. C'est ainsi qu'une somme put être prêtée à la Commission royale d'histoire, une autre à la Biographie nationale; il fut procédé aussi à l'achat de quelques meubles de bureau indispensables.

Tout en se livrant aux travaux utiles intérieurs de l'Académie, le Secrétaire et les fonctionnaires eurent le temps de rechercher et de saisir, au fur et à mesure de leur apparition, les améliorations de détail de l'organisation, dont quelques-unes décrétées depuis de longues années, et que la besogne courante du Secrétariat avait empêché de réaliser.

La correspondance étrangère, quoique extrêmement rare pendant la période de guerre, l'examen de nombreuses questions intéressant l'avenir de l'Académie, furent l'objet de notre attention.

Les traditions fondamentales de l'Académie sauvegardées, nous pensons qu'une vie plus jeune et plus active peut être imprimée à notre institution. Les récents événements et l'attitude des Belges nous ont mis en belle posture devant le monde. Déjà d'Amérique nous est venue, par l'intermédiaire de notre Ministre des Affaires Étrangères au Havre et de la légation d'Espagne, une demande de relations et de correspondances plus effectives et plus fréquentes. Le Secrétaire a répondu par la même voie à cet appel. La libre entrée sur le territoire de la Patrie libérée doit nous amener de nombreux visiteurs savants étrangers; nous serons heureux de mettre tout en œuvre le plus tôt possible pour les recevoir dignement dans notre Palais restauré et mieux aménagé.

Le Secrétaire, s'appuyant sur la Commission administrative, demandera la confiance de l'Académie pour les modifications nécessaires à apporter dans l'aménagement de nos locaux, aujourd'hui trop exigus, et au Gouvernement la direction des travaux intérieurs de réadaptation, aux fins de leur prompte exécution.

Le Secrétaire a déjà prévu, dans l'aménagement nouveau qu'il projette, une salle des séances ordinaires plus vaste, mieux meublée; une salle des Commissions, et si possible, une salle pour chacune des grandes Commissions avec leur outillage particulier; une salle de lecture et de travail pour les académiciens voisine de la salle des séances; une autre pour les personnes étrangères à l'Académie, etc.

Pour réaliser ce projet, tout le Palais, exception faite en ce qui concerne les locaux utilisés jusqu'ici par l'Académie de médecine, nous est nécessaire. Le Gouvernement ayant affecté Palais à l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts, il doit nous appartenir d'en disposer entièrement pour notre usage exclusif.

Enfin le Secrétaire et la Commission administrative ont la satisfaction de faire connaître à la Compagnie que le personnel du Secrétariat, durant la période douloureuse que nous avons traversée, a témoigné en toutes circonstances de son patriotisme et de son attachement à l'Académie. Prêts à tous les sacrifices, nos employés sont dignes du souci que nous prîmes de leur situation matérielle.

Le Secrétaire et la Commission administrative pensent aussi avoir pris toutes les mesures nécessaires pour sauvegarder les intérêts moraux et matériels de l'Académie, et d'avoir maintenu intacts devant l'envahisseur son indépendance, sa dignité, son honneur.

Bruxelles, le 15 novembre 1918.

COMMISSION ADMINISTRATIVE

(Extraits des procès-verbaux dont l'impression au BULLETIN *a été décidée.)*

Séance du 21 juin 1917.

Sont convoqués deux membres de chacune des trois Classes : MM. Gossart, *président;* Lameere; Hermans et Le Nain; Demoulin. M. Rutot s'excuse par lettre et déclare adhérer à toutes les résolutions qui seront prises. M. Vauthier, de la Classe des lettres, a été prié d'assister à la séance.

M. LE NAIN, *secrétaire,* donne lecture du procès-verbal de la dernière séance. — Approuvé.

Il déclare que les employés sont disposés à donner leur démission plutôt que de faire acte d'adhésion à l'état de choses créé par la séparation administrative. Ils s'en rapportent d'ailleurs à la décision qui sera prise par la Commission.

La correspondance consiste en une lettre de M. le Directeur général Beckers, en date du 9 juin courant, priant l'Académie d'adresser à l'avenir la correspondance au Ministère des Sciences et des Arts, rue Hydraulique, à Bruxelles.

L'Académie, les Classes déjà consultées, déclare ne pas reconnaître la division administrative.

Les Classes ont décidé de suspendre les réunions mensuelles officieuses.

La Commission administrative cessera toute correspondance en franchise postale.

La Commission approuve la mesure, prise depuis le 1er juin, d'arrêter les travaux d'impression pour compte de l'Académie.

Les comptes arrêtés au 31 mai dernier sur la première avance de

500 francs du budget de 1917 sont approuvés. Aucune autre avance sur le même budget ne sera plus demandée pour frais de bureau ou de matériel.

La Commission administrative, envisageant le cas d'une renonciation à la dotation de l'État ou la suppression par celui-ci de cette dotation, examine les voies et moyens propres à sauvegarder les intérêts matériels du personnel du Secrétariat. Les explications fournies par le Secrétaire rassurent la Commission sur ce point.

M. Vauthier. — Nous considérons la séparation administrative comme contraire aux intérêts du pays; mais, conformément aux conventions internationales, nous sommes gouvernés par l'occupant. Nous ne pouvons donc pas refuser de répondre si le Gouvernement allemand nous écrit. S'il le fait à propos d'une mesure qui, à notre avis, ne peut être prise, on lui dira pourquoi nous ne répondons pas. En aucun cas, on ne correspondra avec les Belges qui trahissent : nous les ignorons. Si le Gouvernement allemand réclame l'envoi des états de traitement, ou des propositions ayant trait aux émoluments des employés, on les lui enverra. On fera de même s'il réclame une réponse sur d'autres points analogues, par exemple le budget. Il administre.

M. Lameere approuve. Il s'agit surtout d'éviter tous rapports avec les traîtres.

MM. Demoulin et Hermans opinent dans le même sens.

M. Vauthier. — Si par suite de cette attitude, le Gouvernement allemand demandait des explications, nous invoquerions l'impossibilité de répondre au nom de l'Académie ou nous invoquerions une disposition du règlement qui s'oppose à ce que telle ou telle mesure soit prise.

M. Gossart. — Le cas s'est présenté quand nous avons été invités à dresser une liste de noms en vue de la constitution du jury pour l'examen sur les langues modernes à la fin des études moyennes « dans la partie wallonne du pays ».

. . . .

. . . .

Séance du 2 juillet 1917.

La Commission administrative est constituée par deux membres de chacune des trois Classes.

Sont présents : MM. Gossart, *président;* Lameere, Hermans, Rutot et Lenain, *secrétaire.*

M. Demoulin s'est fait excuser.

M. Vauthier est invité à prendre part aux délibérations de la Commission.

Le procès-verbal de la séance du 21 juin dernier est lu et approuvé.

La correspondance contient :

1° Une lettre, en flamand, en date du 25 juin dernier, demandant d'urgence de nouvelles propositions en vue d'étendre les indemnités de secours aux employés ;

2° Une lettre, en flamand, en date du 26 juin dernier, demandant d'urgence des propositions de promotion et d'augmentation du traitement des employés.

D'autres communications émanant de la même source sont attendues.

La Commission réitère sa déclaration de ne répondre à aucune lettre émanant de l'administration flamande. Elle refuse l'intervention flamande pour accorder à son personnel les promotions et augmentations qui lui sont dues, depuis le début de la guerre.

Le Secrétaire demande à la Commission de se prononcer définitivement au sujet de la situation des employés, situation laissée en suspens par le mutisme qu'observera le Collège touchant la correspondance avec le Département des Sciences et des Arts flamand.

Il est décidé que les états de traitement mensuels des employés ne seront pas envoyés; qu'il ne sera pas répondu aux deux lettres susmentionnées, ni à d'autres venant de la même administration; que la Commission ne provoquera pas la rupture et attendra que l'autorité allemande prenne elle-même une décision.

Le Secrétaire ayant convoqué deux représentants du personnel pour, le cas échéant, recevoir tous leurs apaisements à ce sujet, MM. Leuridant et Perrée sont introduits et la Commission les assure de toute sa sollicitude et du soin qu'elle prend de leur position, tant matérielle que morale, et les félicite, au surplus, pour leur patriotisme et leur dévouement.

L'ordre du jour étant épuisé, la séance est levée.

* * *

RAPPORT SUCCINCT

SUR

l'état du Palais des Académies après le départ des Allemands,

par Louis LE NAIN, secrétaire de la Commission administrative.

Quelques jours avant l'évacuation du Palais des Académies par ses occupants, j'invitai le concierge à se tenir prêt à y rentrer, afin de soustraire l'immeuble à la curiosité et aux déprédations de la foule.

Je demandai, entretemps, pour le jour de la libération, à M. le Procureur du Roi, d'apposer les scellés sur le Palais.

Le concierge se rendit dans sa loge, alors que les installations du lazaret étaient presque entièrement déménagées. Il put même, dans la nuit du 15 au 16 novembre, y dormir. Il installa un lit de camp dans la loge de l'aile droite. En entrant dans le Palais, il fut suffoqué par une forte odeur de pourriture. Il en rechercha la cause, et découvrit d'abord dans les sous-sols, en un réduit servant de dépôt mortuaire, deux cadavres en état de décomposition avancée. Il signala le fait aux Allemands, et les corps furent enlevés.

Dans la loge de l'aile droite, près de la porte, avait été apportée la grande pendule Empire de l'antichambre précédant la salle des séances. Pendant la nuit, le concierge fut réveillé par un bruit provenant de la porte de la loge que l'on essayait d'ouvrir. N'y parvenant pas assez rapidement, les visiteurs nocturnes brisèrent la vitre de la porte pour s'introduire à l'intérieur. Le concierge s'étant vêtu à la hâte et survenant, il vit deux soldats allemands s'enfuir. Ils venaient sans doute chercher la pendule.

Entre le départ du lazaret et la libération définitive du Palais le 17, à 8 heures du matin, différentes troupes se succédèrent, conduisant des camions automobiles, occupèrent encore le local et achevèrent le déménagement.

Le dimanche matin 17, M. le Juge d'instruction, ff. de Substitut du Procureur du Roi, et qui avait le Palais des Académies dans son ressort, arriva et, après un rapide coup d'œil, me donna rendez-vous pour le lendemain matin.

Immédiatement nous reconnûmes l'impossibilité d'apposer des scellés sur un tel cloaque, qui constituait un réel danger pour la santé publique. Je fis rapidement, avec les employés du Secrétariat, la visite sommaire de l'immeuble, un bâillon sur le nez et la bouche. Une odeur épouvantable régnait partout. Je redescendis, et avec M. le Substitut du Procureur du Roi, nous convînmes de photographier toutes les salles avant que rien ne fût dérangé. Cet obligeant magistrat mit le même jour et le lendemain le photographe du Parquet à ma disposition. Le concierge s'installait définitivement, tant bien que mal, dans son logement.

Ni la plume ni le pinceau ne peuvent donner une idée du tableau d'horreur que présentait notre local. Dès la porte du vestibule de l'aile gauche, il fallait chercher un endroit où mettre le pied sans marcher dans des excréments. Chacune des salles était encombrée de lits bouleversés, de vêtements de malades traînant par terre, de casques, de vareuses, de pansements souillés, de matériel de pharmacie ayant ou n'ayant pas servi, de cartouches, de caisses de poudre, de casseroles, de bouteilles et de verres cassés ou sales ; des séries de latrines et des urinoirs installés dans des salles, des chariots de mitrailleuses dans la grande salle; dans celles affectées aux cuisines, les réfectoires réservés aux médecins, aux pharmaciens ou aux officiers, partout la même saleté, le même désordre, la même destruction; des vitres brisées aux fenêtres, les bronzes et cuivres des portes enlevés. Les bibliothèques bouleversées, de nombreux vides par place dans les rayons, particulièrement dans la bibliothèque de Stassart, en grande partie vidée de ses livres, manuscrits et autographes. Si tout n'a pas été volé, nous en retrouverons sans doute une partie en divers endroits du Palais, lors de l'inventaire et de la désinfection. Désordre aussi dans la bibliothèque Ducpetiaux.

Des scellés qui avaient été mis sur une armoire, violés et les portes refermées au moyen de planches clouées.

Les meubles ont beaucoup souffert, notamment les fauteuils et banquettes, brisés, déchirés, vidés de leur rembourrage, mis hors d'usage totalement. Les bustes en marbre entassés pêle-mêle en haut du grand escalier, salis par des crayonnages. D'autres dans les caves, certains brisés. Les parquets détériorés. Tout l'immeuble, enfin, dans un état de malpropreté sans nom.

Le portrait de Léopold I^er^, figurant dans un des tableaux de la grande salle, a été décoré de la Croix de fer par un de ces artistes barbares. Le même portrait par Dewinne a subi pareil outrage. Plusieurs de ces tableaux sont déchirés.

Dans les greniers, un amas confus de papiers imprimés ou manuscrits, jetés en tas, au hasard; les boîtes ou cartons qui les contenaient, enlevés pour servir à l'emballage, aux envois de *Delicatessen* expédiées en Allemagne. On y trouve jusqu'à des dossiers de différents ministères.

J'adressai une plainte au Parquet au sujet de la disparition de livres et autres documents, faisant toutefois cette réserve que n'ayant pu, dans un premier coup d'œil, connaître toute l'étendue du dommage, je ne serais à même de préciser que plus tard, Mais je signalai que vers le mois de juillet 1918, un officier allemand, appelé Thron, autrefois libraire à Bruxelles, rue Royale, et alors associé de Misch, s'était livré à un travail assez long, parmi nos collections, sans que je sache exactement en quoi il consistait.

Il n'est pas probable, comme me le disait M. le Juge d'instruction, que le Parquet ait pu l'interroger à cet égard, car sans doute il aura quitté Bruxelles.

Notre médailler a disparu, semble-t-il, ainsi qu'une grande partie de la collection de la Société de numismatique. Le coffre-fort médailler a été retrouvé dans la cave, les serrures forcées.

La partie du Palais réservée à l'Académie de médecine, tout en étant également en pitoyable état, paraissait avoir moins souffert, sauf pour le parquet, complètement perdu.

Un don fait par feu Potvin et enfermé dans une caisse qui ne devait être ouverte que dix ans après sa mort, c'est-à-dire vers 1916 ou 1917, a été retrouvé. Un essai d'effraction fut constaté aux fermetures. Peut-être l'auteur de cette tentative a-t-il été interrompu pendant son travail, et n'a-t-il pu dans la suite le reprendre.

Une porcherie officielle se trouvait dans le jardin. On ne sait quelle sotte pudeur avait empêché ces Allemands d'en loger les hôtes à l'intérieur du Palais, ce qui n'aurait guère pu en modifier l'aspect. Mais les produits de cette installation se trouvaient, sous forme de jambons et pièces de lard dans la salle affectée à la Commission royale d'histoire, transformée en boutique de charcutier.

Je pris soin, avant de procéder à un premier déblaiement, de demander au Génie et à l'Intendance militaires de me débarrasser des explosifs qui pourraient se trouver dans le Palais, et de tout le matériel de literie et autres objets de l'armée. Je priai aussi l'Administration des Hospices civils de Bruxelles de venir reconnaître et faire enlever tout ce qui pourrait lui appartenir. La prison de Forest avait aussi de la literie dans le Palais.

Le Service d'hygiène de la ville de Bruxelles fut mandé pour procéder ensuite à une première désinfection des locaux. Je dis une première désinfection, car nos livres et documents de toute nature ne pourront être stérilisés qu'au fur et à mesure du récolement au moyen des catalogues, par les employés du Secrétariat et sous notre surveillance. Je requis aussi, au dehors, un personnel pour procéder au plus gros nettoyage, sous la surveillance constante de nos employés.

Certes, nous ne nous attendions pas à trouver tout en bon ordre dans le Palais transformé en lazaret de guerre, mais on reste confondu devant un aussi gigantesque bouillon de culture, composé de tous les éléments morbides que peuvent exhaler les misères humaines, de tout ce que peut rejeter de matières infectes un corps malade. Des salles étaient affectées aux tuberculeux. Il y a là une menace pour la santé de nos employés si dévoués et pour le personnel affecté au nettoyage. Je veille et fais prendre toutes les précautions.

Il faudra du temps pour rendre le Palais habitable et dénombrer les objets perdus, volés ou déplacés, ainsi que pour effectuer les réparations nécessaires aux bâtiments.

* * *

PHOTOGRAPHIES PRISES
AU
PALAIS DES ACADÉMIES
AU
LENDEMAIN DE L'ÉVACUATION

REZ-DE-CHAUSSÉE

5293. **Salle des manuscrits de Stassart.**

La porte vitrée du fond était condamnée et recouverte par une armoire vitrée du même genre que celle que l'on aperçoit sur le côté. Cette armoire-bibliothèque, legs du baron de Stassart, contenait les manuscrits de ce dernier. L'armoire a disparu du Palais. Les boîtes ont été déchirées. Une partie des autographes a été retrouvée dans un entresol, une autre dans une armoire, une autre sous un lit. Une autre sous les loges de la grande salle. La collection est complètement en désordre, et il y a de nombreuses lacunes.

La bibliothèque vitrée contient la correspondance du baron de Stassart. Toutes ces brochures ont été mises sur le plat, ce qui prouve qu'elles ont été visitées. Remarquez également le désordre dans les autres livres et les scellés arrachés qui ont été remplacés par des appliques en bois

Ets J. Malvaux, sc.

REZ-DE-CHAUSSÉE.

5292. Bibliothèque de Stassart.

Dans un communiqué à la presse des pays neutres, les Allemands ont déclaré que la bibliothèque académique n'avait pas souffert, qu'ils avaient protégé les livres par des toiles. On peut remarquer ici comment ils ont disposé ces toiles : dans la partie supérieure seulement. Une petite quantité de volumes a été placée sur les corniches, le reste a disparu.

Remarquez dans le milieu de la salle, les mappothèques transformées en meubles à tiroirs. La collection de cartes et gravures qui s'y trouvait a disparu.

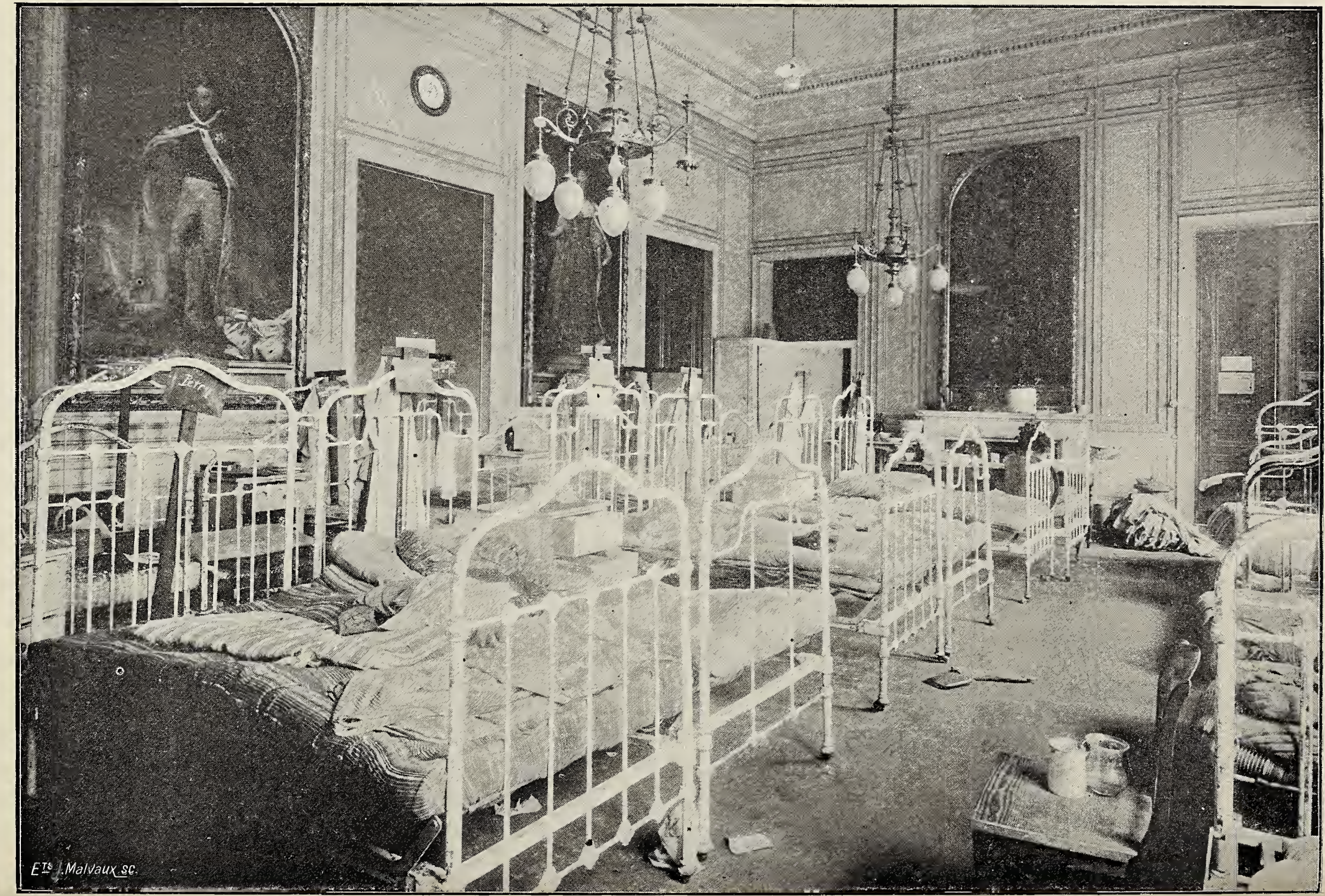
PREMIER ÉTAGE

5294 **Secrétariat**

Cette salle a servi pour les tuberculeux.

Les meubles-bureaux des fonctionnaires ont été forcés et vidés de leur contenu. On aperçoit les deux meubles cartonniers vides. Au début de l'occupation, alors que le gardien du Palais était autorisé à y demeurer, il a constaté que les soldats qui retournaient en congé de convalescence vidaient les cartons pour s'en faire une valise. On aperçoit sur le lit, comme dans toutes les salles, des assiettes avec des déchets de viande en putréfaction.

Ets J. Malvaux Sc.


Ets Malvaux sc.

PREMIER ÉTAGE.

5296. Salle des séances.

Des conduites d'eau ont été installées en abîmant les murs. Les bustes ont été enlevés ; certains sont endommagés.

PREMIER ÉTAGE.

5290. **Salle de marbre.**

Des plaques de marbre ont été fendues, les parquets abîmés.

PREMIER ÉTAGE.

5291. Salle de marbre, fond.

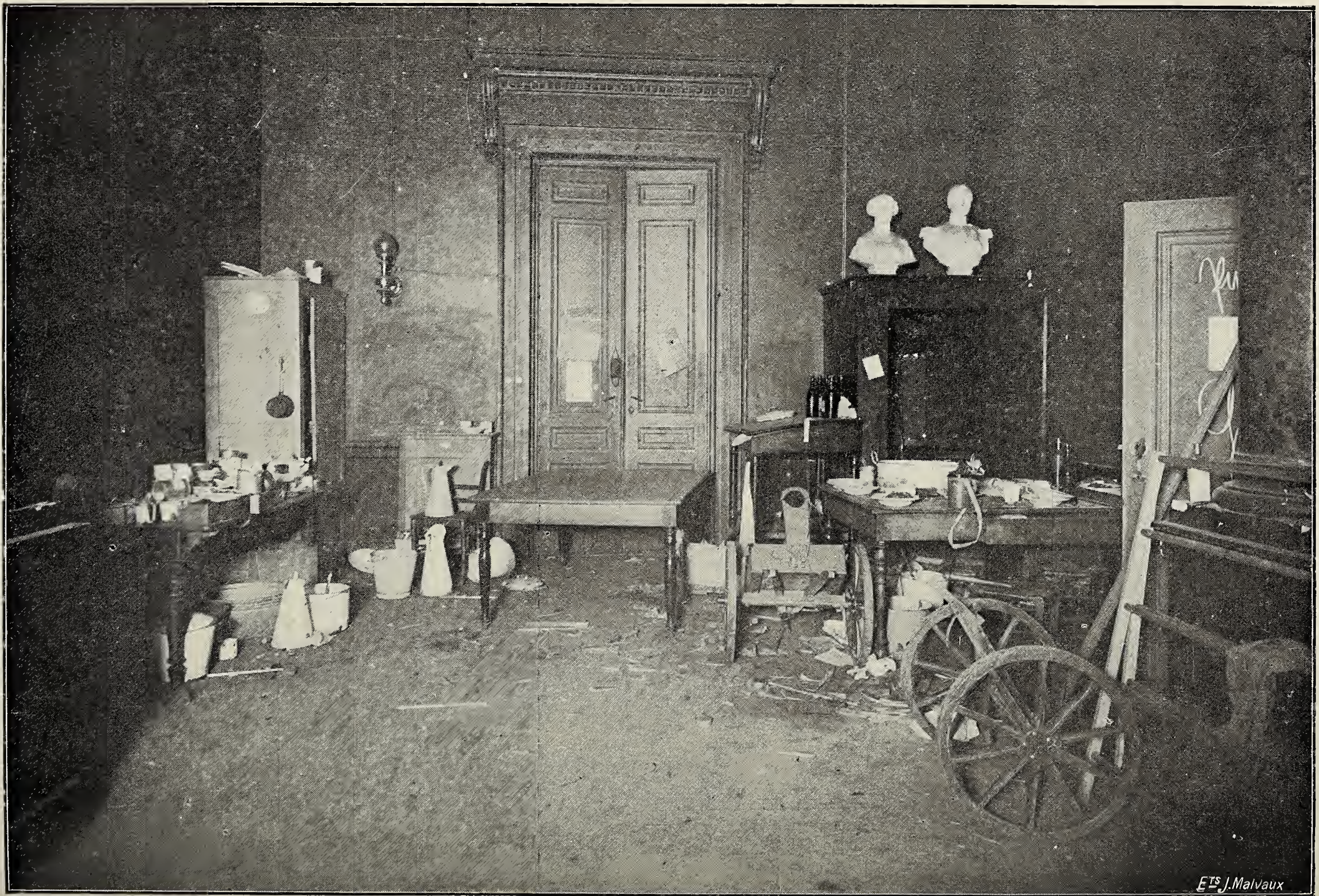
Un amas indescriptible de linges malpropres couverts de vermine et des restes de repas.

PREMIER ÉTAGE.

5289. Grande salle, fond.

Les bustes des Princes royaux ont été endommagés.

Servait de cuisine. Les Allemands sont partis en y laissant un réchaud allumé. A proximité se trouvait une caisse de dynamite que le génie belge est venu enlever.


Ets J. Malvaux

PREMIER ÉTAGE.

5288. Grande salle, aspect général.

Invraisemblable amas de lits, linges sales. On y avait installé des mitrailleuses. On y a découvert une caisse de dynamite et des cartouches. Sur un des tableaux de Slingeneyer, on a ajouté au portrait du roi Léopold I^{er}, la croix de fer. Également décoré le portrait de Léopold I^{er} par Dewinne.

Partout des vases remplis d'excréments, des restes de victuailles en décomposition.

DEUXIÈME ÉTAGE.

5295. **Salle de la Commission royale d'histoire.**

Le mobilier et la plus grande partie de la bibliothèque ont été enlevés. On y a installé des barres pour pendre des jambons. (Une porcherie avait été construite dans le jardin.)

Ets J.Malvaux

Ets J. Malvaux Sc.

DEUXIÈME ÉTAGE.

5297. **Salle belge**

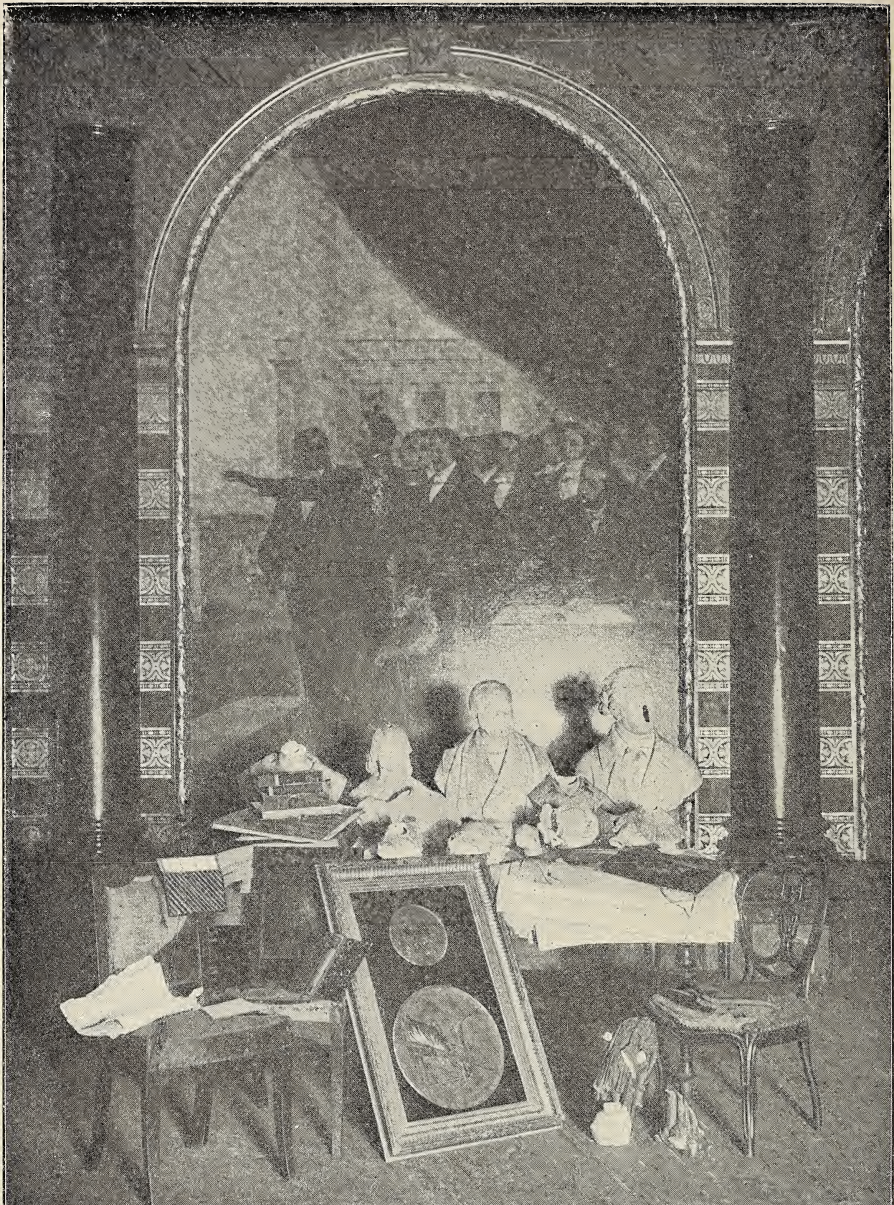
Cette salle, complètement remplie des publications périodiques de sociétés savantes belges, a été vidée entièrement. Une partie des livres qui a été remisée sur le grenier a souffert de l'humidité et a été rongée par les rats, qui se sont introduits dans l'immeuble par les égoûts que les Allemands ont obstrués et bouleversés; le reste a disparu.

DEUXIÈME ÉTAGE.

5298. Salle américaine.

Cette salle qui contenait les publications des multiples sociétés savantes des États-Unis d'Amérique a été complètement vidée ; les livres jetés pêle-mêle sur le grenier sont perdus.

Et J. Malvaux S


Ets J. Malvaux sc.

GRANDE SALLE HISTORIQUE

Exposition de quelques spécimens du vandalisme allemand.

Les bustes du prince de Ligne, de Gachard, de Wagener, des enfants de Léopold Ier, mutilés.

Un cadre contenant l'œuvre du graveur Oudine : toutes les petites médailles ont été volées.

Toute une série de volumes anglais dont les couvertures ont été arrachées; les portefeuilles contenant les autographes de Stassart, détruits; des volumes dont les planches ont été enlevées, des cartes et gravures lacérées; quelques spécimens de l'état dans lequel se trouvent les chaises.

Dans le fond, le tableau de Slingeneyer représentant le roi Léopold Ier prêtant le serment constitutionnel.

LES
RELATIONS INTELLECTUELLES INTERNATIONALES
D'APRÈS GUERRE

par

GEORGES LECOINTE, correspondant de l'Académie,
et H. DE GUCHTENAERE.

PRÉAMBULE

Dans le courant de 1917, le Président du Conseil des Ministres, Ministre des Affaires Étrangères, avec l'assentiment préalable du Ministre de la Guerre et du Ministre des Sciences et des Arts, voulut bien me charger de l'étude préalable des relations intellectuelles internationales à prévoir pour l'après-guerre.

En décembre 1917, j'adressai au Gouvernement belge le présent rapport, qui exprime exclusivement des opinions personnelles et n'engage donc en rien la Belgique.

Lady Rothermére, la toute gracieuse femme du précédent Ministre de l'Aviation britannique et belle-sœur de lord Northcliffe, voulut bien, de sa belle plume, traduire ce rapport en anglais. Qu'elle reçoive ici l'expression de notre respectueuse et profonde reconnaissance.

L'infirmité dont je suis atteint au bras droit me rend fort pénible tout travail d'écriture. J'ai proposé, en conséquence, au Gouvernement royal, de m'adjoindre, comme secrétaire, M. DE GUCHTENAERE, soldat-homme de lettres, que les autorités militaires belges avaient déclaré inapte au service en campagne pour motif de santé, et qui m'avait offert de remplir ces fonctions.

Au cours de mon étude, M. DE GUCHTENAERE m'a apporté un concours qui dépassait sa mission primitive. J'ai donc vu en lui un collaborateur autant qu'un ami, et je l'ai prié de signer avec moi la présente note. Celle-ci constitue la première partie d'un travail plus complet dans lequel nous recherchons les conditions pratiques d'application des principes émis ci-après au cas particulier de chacun des nombreux groupements intellectuels internationaux existant avant la guerre.

G. LECOINTE.

Les Relations intellectuelles internationales d'après guerre.

Pour rechercher une solution pratique à l'important problème des relations intellectuelles internationales d'après guerre, nous ne pouvons pas nous inspirer exclusivement des sentiments de haine et de répulsion que nous dicte notre cœur exaspéré par les injustices et les souffrances subies. Nous avons à peser soigneusement les conséquences de nos actes, afin que des décisions insuffisamment mûries ne nous entraînent pas à des mesures que nous aurions à regretter ultérieurement. Et nous nous devons à nous-mêmes qu'une fois notre programme arrêté, nous en poursuivions la réalisation, sans l'atténuer par des restrictions qui en altéreraient la portée et témoigneraient de notre faiblesse.

Il ne faut pas davantage toutefois que, sous le fallacieux prétexte de vouloir juger les événements avec le « recul » désirable, nous fassions le jeu de nos ennemis. Ceux-ci savent que cette guerre a soulevé dans les âmes, même les plus fermées à la violence, une noble et légitime indignation devant laquelle s'efface aujourd'hui tout intérêt matériel. Mais ils escomptent que les effets du temps atténueront l'acuité de nos sentiments et ils espèrent que, dans le calme de la vie quotidienne et conseillés par le désir d'une existence facile, des esprits mal trempés se laisseront aller à des faiblesses. Aussi réclament-ils de notre impartialité que nous ne prenions à présent aucune mesure à l'égard de leurs intellectuels.

La morale impose que la réprobation des générations futures s'abatte sur l'Allemagne spoliatrice d'un sol que sa propre parole devait sauvegarder de toute crainte d'envahissement, sur l'Allemagne capable de traiter de « chiffon de papier » le parchemin sur lequel se trouvait apposé le sceau du roi de Prusse; sur l'Allemagne dont les chefs ont l'impudence d'affirmer publiquement que « la force prime le droit » et que « nécessité seule fait loi »; sur l'Allemagne qui a déchiré sans scrupule les conventions solennellement signées à La Haye et qui a tenté traîtreusement de déshonorer la Belgique, sa première victime, en l'accusant de s'être, antérieurement à la guerre déjà, liguée contre elle avec la France et l'Angleterre; sur l'Allemagne dont l'aigle sanguinaire et meurtrière enfonce des serres inutilement cruelles dans les chairs des populations qu'elle détient comme une proie.

L'histoire doit attester qu'on ne massacre pas sans châtiment des femmes et des enfants, que les pillages et les déportations des citoyens, comme des esclaves sous le joug, sont des crimes qui ne demeurent pas impunis.

Et il faut que le peuple qui a commis ces atroces exactions en subisse la réprobation, car ce peuple tout entier est coupable; les excès ont été organisés systématiquement, administrativement, par un gouvernement choisi et soutenu par toute la nation.

La morale qui régit les collectivités doit être aussi saine et aussi forte que celle qui impose ses lois aux individus ; et si des collectivités cherchent à s'y soustraire, elles doivent y être ramenées par l'élite qui les dirige.

Or, en Allemagne, la collectivité a été excusée, et, ce qui plus est, glorifiée, par son élite, de la déchéance morale où elle tombait. Les intellectuels allemands ont prostitué la science en l'asservissant à leurs intérêts, lorsqu'ils ont lancé leur menteur « appel au monde civilisé »; ils se sont solidarisés avec les incendiaires de l'Université de Louvain, avec les destructeurs de l'Université de Gand, avec les bourreaux des professeurs Pirenne et **Fredericq**, avec ceux qui martyrisaient nos prêtres patriotes, comme avec ceux qui souillaient nos établissements religieux ; et lorsque, plus tard, ils comprirent qu'un jour viendrait où ils auraient à répondre de leurs actes, ils ont inspiré aux Neutres, honteux, eux aussi, de leur tacite complicité par leur silence devant le crime, ces banales excuses : les uns avaient cru de bonne foi ce que leurs chefs militaires leur avaient affirmé, d'autres avaient signé par pur patriotisme, sans lire ce qu'on leur mettait sous les yeux, d'autres n'avaient adhéré à l'acte qu'en formulant des réserves dont on n'aurait pas tenu compte, d'autres encore avouaient qu'ils ne recommenceraient plus...

Les hommes qui font profession de science et d'intellectualité et qui sont, par conséquent, rompus à toutes les méthodes d'analyse et d'investigation, sont inexcusables d'un pareil manque de scrupules. De tels hommes ne doivent plus être admis, pendant un certain temps du moins, à siéger aux mêmes tables que nous. Il n'est pas tolérable qu'à l'heure présente où tant de jeunes existences succombent, où tant de détresses se produisent par la faute initiale et exclusive des Allemands, ceux-ci tirent vanité du fait que des Compagnies savantes des Puissances alliées maintiennent parmi leurs correspondants des signataires de l'« appel » diffamatoire.

Non, c'est maintenant qu'il faut agir, au moment où dans la plus inébranlable conscience de notre droit, avec le sens aigu et précis des cruautés dont nous avons souffert, nous voyons clairement l'immoralité profonde et collective de l'Allemagne.

Nous le devons encore pour que, dès la cessation des hostilités, nous mettions à exécution un plan d'ensemble, commun à tous les Alliés, applicable par tous les gouvernements intéressés, par toutes les administrations publiques, donnant des directives, voire des conseils, aux particuliers patriotes. Nous éviterons ainsi les erreurs, les hésitations, les divergences de vues qui pourraient se produire sans une étude préalable générale et dont l'Allemagne, si experte à créer des mésintelligences, profiterait avec empressement.

Les considérations qui précèdent nous amènent à conclure que les Alliés ont à rompre, *pour un temps déterminé tout au moins*, dans la plus large mesure possible, les relations intellectuelles avec les Empires du Centre et les peuples soumis à leur influence.

M. Picard, l'éminent secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences de Paris, a publié dans le *Journal des Débats* du mercredi 17 octobre 1917 un remarquable article, formulant, en termes lapidaires, son avis à ce propos. D'autre part, la Commission géodésique française, dans sa séance du 24 octobre 1917, a voté à l'unanimité la résolution suivante :

« La Commission géodésique française émet le vœu que des
» pourparlers soient engagés avec les Alliés pour la création
» d'une Association géodésique internationale à l'exclusion des
» Puissances centrales. »

M. Picard encore, dans sa notice historique sur Gaston Darboux, lue dans la séance publique annuelle de l'Académie des sciences de Paris, du 10 décembre 1917, disait :

« Des esprits généreux pensaient, avant la guerre actuelle,
» que les Congrès internationaux étaient des instruments puis-
» sants de concorde entre les peuples. C'est ainsi que Darboux
» avait l'intime et profonde conviction, il l'a écrit quelque part,
» qu'en allant à Berlin, à Vienne, à Budapest, il participait à
» des œuvres de paix. Malheureusement les nobles pensées qui
» l'animaient n'étaient pas partagées par tous les savants qu'il
» y rencontrait. Nous devons, hélas ! revenir de certaines
» illusions. Les Allemands, toujours organisés, se servaient
» avant tout de ces réunions pour étendre sur le monde leur
» emprise scientifique et même économique. Souhaitons qu'une
» nation qui s'est mise en dehors de l'humanité soit exclue, au
» moins pour un temps, des assises scientifiques entre peuples
» de culture humaine. D'ailleurs les Congrès internationaux

» n'ont d'intérêt que si des relations personnelles s'établissent
» entre les hommes de science des divers pays; ces relations, qui
» supposent la confiance, sont impossibles avant de longues
» années entre savants allemands et savants français. Il y a
» entre eux et nous trop de sang et trop de crimes. »

Voilà déjà des intentions nettement indiquées. Quelques personnalités sont même allées beaucoup plus loin en la matière : elles ont suggéré de ne plus accepter dans nos bibliothèques les publications des Puissances centrales et d'agir auprès des Neutres pour qu'ils adoptent des mesures semblables.

Exposons nos vues à ce sujet.

Les relations intellectuelles internationales ont plusieurs moyens d'expression : il en est d'ordre gouvernemental et il s'en trouve d'ordre privé.

Parmi celles de la première catégorie, certaines devront être maintenues ou renouées, elles revêtent un caractère plutôt économique : telles sont, par exemple, celles qui sont relatives aux chemins de fer, à la navigation, aux postes, aux télégraphes, aux poids et mesures, etc.

Il en est d'autres qui pourront, sans inconvénient, être suspendues temporairement, comme, par exemple, celles qui se rapportent à la sismologie, à la géodésie, à l'heure de précision, à la Carte du monde au millionième, etc.

Quant aux relations intellectuelles internationales d'ordre privé, elles peuvent, et même doivent, selon nous, toutes être rompues.

Nous ne devons pas nous arrêter à la question de savoir si le progrès intellectuel général de l'humanité souffrira de cette lutte. Nous le répétons, il y a une nécessité d'ordre moral qui s'impose et parle même plus haut que nos devoirs vis-à-vis de la Science. Il est d'ailleurs probable que l'esprit d'émulation engendrera des progrès égaux, sinon supérieurs, à ceux que produiraient des rapports internationaux exempts d'estime et par suite de confiance réciproques.

Si l'on adopte le principe d'une rupture aussi complète que possible des relations intellectuelles internationales entre les Alliés et les Empires du Centre, comment cette rupture devra-t-elle s'opérer ?

Pour les associations internationales privées, une simple notification de la part des adhérents suffit. Mais pour les associations internationales d'États, la question est plus complexe. Peut-on dire que les conventions conclues antérieurement à la guerre avec les Empires du Centre et les États soumis à leur influence militaire sont toutes abrogées, alors que certaines de ces conventions portent la signature d'États neutres ? Dès lors, si des conventions subsistent avec les Neutres, ceux-ci ont le droit d'admettre, à leur gré, les belligérants à faire partie de ces associations en vertu même des statuts qui les régissent.

Prenons un exemple :

L'article 2 de la convention signée à Berlin, en août 1905, à l'occasion de la fondation de l'Association internationale de sismologie, est libellé comme suit :

« Sont membres de l'Association tous les États qui en font
» la demande au Président et qui déclarent adhérer à la pré-
» sente convention. »

Les Neutres ont donc le droit de maintenir les Allemands dans cette association, indépendamment des Alliés.

D'autre part, les Alliés se sont engagés vis-à-vis des Neutres à demeurer membres de certaines associations pendant une durée déterminée. Ainsi il est dit à l'article 16 de l'accord précité, de Berlin :

« La présente convention est conclue pour une durée de
» douze ans, à partir du 1er avril 1904. Après cette première
» période, elle restera obligatoire par périodes de quatre ans,
» sauf dénonciation préalable de six mois. »

La convention n'ayant pas été dénoncée antérieurement au 1er octobre 1915, elle demeure exécutoire jusqu'au 1er avril 1920.

En droit strict, il ne reste donc aux Alliés qu'une solution : celle de notifier, dans le plus bref délai possible, aux Gouvernements désignés à cette fin par les conventions, qu'ils se retirent des groupements intellectuels dont ils donneraient l'énumération, et qui comptent parmi leurs membres des délégués des Empires du Centre.

Cette manière de procéder présenterait cependant un inconvénient. Par son adoption, les Alliés renonceraient à l'actif en matériel et en numéraire de certaines associations, actif important surtout à une époque où l'argent à consacrer aux sciences sera rare.

De plus, les États restant membres des associations jusqu'au moment où ils peuvent s'en détacher légalement, ne devront-ils pas continuer à verser leur contribution annuelle jusqu'à cette époque (par exemple jusqu'en 1920 pour l'Association internationale de sismologie) et, augmenter ainsi un avoir dont les Empires du Centre seront les premiers à profiter ?

Pour être logiques, les Alliés ne devraient pas se borner à la rupture pure et simple des relations intellectuelles avec leurs ennemis d'aujourd'hui. Ils auraient à faire entre eux un accord au sujet d'une application plus générale de cette ligne de conduite, et, à cette fin, nous estimons qu'il serait désirable de voir convoquer une Conférence d'intellectuels interalliés, édictant les règles à suivre, pendant une période déterminée (vingt ans après la cessation des hostilités par exemple), par les administrations publiques, les fonctionnaires et, à titre indicatif, par les particuliers.

Les mesures arrêtées seraient les suivantes (1) :

a) Suppression de l'envoi gratuit, chez nos ennemis, des publications officielles alliées et suspension de la distribution gratuite, par des services organisés (Commission des échanges internationaux), des publications que nos ennemis voudraient répandre dans nos pays. Les publications ennemies que nous jugerions bon de recevoir seraient acquises chez leurs éditeurs ; elles seraient aussi peu nombreuses que possible.

---

(1) Il convient de ne pas perdre de vue que ces propositions ont été formulées à la fin de 1917, alors que l'activisme sévissait en Belgique et que des informations, erronées heureusement, attribuaient à ce mouvement une certaine importance. (Note des auteurs en date du 2 janvier 1919.)

b) Il ne serait plus envoyé de délégués officiels des États et administrations publiques quelconques aux réunions internationales, privées ou officielles, qui compteraient parmi leurs membres des délégués des Empires du Centre.

c) Les fonctionnaires auraient à démissionner des Compagnies savantes nationales germaniques ou internationales, comptant des membres appartenant aux Empires du Centre ; il leur serait interdit d'écrire dans des publications originaires des pays ennemis.

d) Les particuliers seraient invités à suivre la même ligne de conduite. Il serait publié une liste interalliée nominative de ceux qui s'écarteraient de ces règles.

Ceux-ci seraient exclus de tous les emplois publics et ne recevraient plus aucune distinction honorifique ; les distinctions qu'ils posséderaient déjà leur seraient enlevées.

e) Nos sociétés nationales officielles et privées auraient à rayer immédiatement de la liste de leurs membres (d'honneur, titulaires, effectifs, associés, correspondants, etc.) tous les ressortissants des pays avec lesquels nous avons été en guerre.

Ces diverses mesures seraient appliquées sans haine, mais avec fermeté ; elles seraient indépendantes des dispositions d'ordre politique et économique pouvant se trouver dans les traités, soit entre les Alliés exclusivement, soit entre les Alliés et leurs ennemis. Mais, comme nous l'avons dit au début de cette étude, nous ne devons adopter ces mesures que si nous nous sentons disposés à en supporter toutes les conséquences.

Il est un fait certain : c'est que rompre toutes les relations intellectuelles internationales sans les remplacer par une nouvelle organisation de celles-ci, serait faire le jeu des Empires du Centre. Ces derniers, en effet, maintiendraient les institutions dont nous nous serions détachés, et, petit à petit, y engloberaient les Neutres, que nous aurions repoussés. Par ce fait, nous abandonnerions bénévolement à nos ennemis la direction du mouvement intellectuel international.

Si, d'un autre côté, on constituait, comme on l'a suggéré, des groupements nouveaux, que les grandes Puissances alliées auraient exclusivement le droit de fonder, quitte à admettre ultérieurement les représentants des petits États alliés à en faire partie, et à permettre éventuellement aux Neutres d'y entrer, ce serait agir avec peu de justice envers les petits États alliés qui ont fourni (telle la Belgique) des noms illustres à l'histoire des sciences et de l'art contemporain, et qui se sont sacrifiés généreusement et sans regrets pour la cause de l'humanité entière. Ce serait agir aussi avec peu de clairvoyance; car, en traitant les Neutres avec si peu d'égards, on les jetterait irrémédiablement dans les bras des Empires du Centre.

L'attitude à prendre envers les Neutres est d'ailleurs un problème des plus difficiles.

Qu'exigera-t-on d'eux, par exemple, s'il se fonde parallèlement des groupements interalliés et des groupements similaires, constitués par les Empires du Centre? Leur interdira-t-on de faire partie simultanément de ces deux groupements?

Quelle sanction devra-t-on infliger à un Neutre si, ultérieurement à son adhésion à un groupement interallié, il s'affilie à un groupement germanique? Des mesures draconiennes en la matière ne conduiront-elles pas à une regrettable impopularité?

En tout cas, il se produira sans aucun doute, entre les deux organismes rivaux, une lutte d'influence, dans laquelle les Alliés ne peuvent s'engager *qu'après avoir fermement résolu de rester unis jusqu'au bout de leur action, et qu'après avoir assuré, sans lésiner, les moyens d'existence et de propagation indispensables aux nouvelles institutions.*

Paris, le 14 décembre 1917.

CONFÉRENCE

DES

ACADÉMIES DES SCIENCES INTERALLIÉES

tenue à Londres en octobre 1918.

COMPTE RENDU

présenté à l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique

PAR

MM. CH.-J. DE LA VALLÉE POUSSIN, LECOINTE ET MASSART

Membres de l'Académie.

La Conférence eut lieu les 9, 10 et 11 octobre 1918, sous les auspices de la Royal Society de Londres, avec laquelle des membres de l'Académie des sciences de Paris et M. LECOINTE (chargé par le Ministre des Affaires Étrangères de Belgique d'une étude préparatoire sur les relations intellectuelles internationales d'après guerre) avaient eu, à titre privé, divers échanges de vues antérieurs à ce propos.

Elle avait pour objet essentiel de provoquer un accord entre les Académies des sciences associées sur les mesures à prendre pour la réorganisation immédiate des relations scientifiques interalliées.

Subsidiairement, la Royal Society demandait à la Conférence son avis sur l'opportunité de rayer de la liste de ses membres associés, non seulement les quatre-vingt-treize savants allemands signataires du mensonger « Appel au monde civilisé », mais encore, d'une façon générale, tous les ressortissants des pays avec lesquels nous étions en guerre.

Enfin la Conférence devait émettre son opinion : 1° sur la proposition formulée par l'Académie Nationale des sciences de Washington en vue de la création d'un Conseil interallié de recherches scientifiques; 2° sur toutes questions scientifiques d'ordre international soulevées par les membres de l'Assemblée.

⁂

Les pays représentés à la Conférence étaient les suivants : Belgique, Brésil, États-Unis d'Amérique, France, Grande-Bretagne, Italie, Japon, Portugal, Serbie.

La liste nominative des délégués constitue l'annexe I du présent compte rendu.

Les délégués étaient porteurs de pouvoirs divers.

Les uns avaient reçu mandat de leur Académie de défendre certaines thèses; d'autres jouissaient d'une liberté absolue.

A titre exceptionnel, les délégués des États-Unis d'Amérique s'estimaient investis d'une mission diplomatique, attendu que leur chef avait eu un entretien particulier avec le Président Wilson et avait reçu de lui des directives, voire des instructions formelles.

En tout cas, les délégués n'avaient, en fait, qu'une mission d'information. Les résolutions de la Conférence devaient être soumises à la ratification des Académies intéressées; et même, après cette ratification, elles ne devaient engager en rien les Gouvernements.

Subsidiairement, signalons la situation particulière des membres de la Classe des sciences de l'Académie royale de Belgique qui participaient à la Conférence. Ils n'avaient pu être désignés par cette Académie elle-même, vu l'occupation de Bruxelles par l'ennemi. Ils avaient été choisis par le Ministre des Sciences et des Arts, suivant un désir exprès formulé par la Royal Society, le Gouvernement n'intervenant que pour leur permettre d'effectuer leur voyage en Angleterre.

* * *

Le Bureau fut constitué comme suit :

Président : Sir Joseph Thomson.
Secrétaire général : M. A. Schuster.
Secrétaires : MM. Lallemand et Durand.

* * *

Au lieu d'exposer les discussions dans leur ordre chronologique, il nous paraît préférable d'en analyser les conclusions dans celui où celles-ci ont été adoptées finalement.

Ces conclusions, qu'on trouvera à l'annexe II du présent compte rendu, sont précédées de considérations présentées par la Société royale de Londres, qui amenda son texte primitif, sur des points de détail, suivant les vœux émis par les délégués de l'Institut de France et de l'Académie Nationale des sciences de Washington.

Les trois premières résolutions furent votées à peu près sans discussion.

L'Institut de France proposa de les compléter par le vœu suivant :

« Les Gouvernements des pays alliés et des États-Unis
» s'abstiendront d'envoyer des délégués à toute réunion inter-
» nationale, en dehors de celles visées au § 3, où devraient
» figurer des représentants des Empires du Centre.

» Il est désirable que les nationaux des pays de l'Entente et
» des États-Unis adoptent la même ligne de conduite et ne
» prennent part à aucune entreprise scientifique où collabore-
» raient des nationaux de ces Empires. »

Ce vœu fut jugé comme implicitement compris dans la première des résolutions votées et comme constituant une conséquence logique du préambule, dont le texte proposé avait déjà été distribué aux délégués et admis par eux en principe.

* * *

La Conférence porta ensuite son attention sur le projet présenté par la délégation américaine en vue de la création d'un Conseil interallié de recherches scientifiques.

Après une laborieuse discussion, la Conférence vota les résolutions rapportées aux §§ 4, 5 et 6 de l'annexe II. Elle décida en outre que tous les membres de la présente réunion feraient partie du premier groupement dont il est question à la sixième résolution.

* * *

Sur la proposition de l'Institut de France, amplifiant le texte présenté par M. Massart, l'Assemblée vota la septième résolution, dont le but essentiel est de montrer aux Gouvernements intéressés combien leurs *intérêts matériels* sont étroitement unis à l'établissement de grands laboratoires privés et nationaux de science expérimentale.

* * *

La Conférence entama alors l'examen de la question délicate de la radiation éventuelle de nos Compagnies savantes des associés étrangers appartenant aux pays avec lesquels nous sommes en guerre.

S'appuyant sur les considérations émises dans son rapport (1) adressé au Ministre des Affaires Étrangères de Belgique, sous la date du 14 décembre 1917, et ayant pour titre : « Les relations intellectuelles internationales d'après guerre », M. **Lecointe** réclama la mesure radicale de la radiation absolue pour une certaine durée.

---

(1) Rédigé en collaboration avec M. H. de Guchtenaere.

M. **Picard**, secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences de Paris, suggéra de remplacer le mot « radiation » par le mot « suspension ».

Un long échange de vues eut lieu à ce propos, à la suite duquel le Président de la Société royale estima qu'un vote était inutile.

La Compagnie savante anglaise précitée avait, en effet, demandé l'inscription de cette question à l'ordre du jour uniquement dans le but de connaître les sentiments des autres Académies interalliées et de s'en inspirer; et ces sentiments s'étaient clairement manifestés : le préambule voté par la Conférence comportait implicitement le principe de la radiation pure et simple.

* * *

La Conférence renvoie ensuite à l'Assemblée qui siégera à Paris en novembre, en les recommandant à toute son attention : *a*) les propositions formulées par M. **Massart** (annexe III), se rapportant aux échanges internationaux, à l'unification des programmes universitaires et à la création de recueils bibliographiques (ainsi que les amendements à ces propositions présentés par MM. **Volterra** et **Hardy**) ; *b*) le vœu émis par M. **Bigourdan**, en vue d'unifier les notations bibliographiques relatives à tout l'ensemble de nos connaissances.

* * *

Comme mesures d'exécution, l'Assemblée décida :

1° De recommander aux délégués la communication à leurs

Gouvernements respectifs des résolutions (avec leur préambule) votées par la Conférence ;

2° De prier les Académies des sciences interalliées d'informer de ces résolutions les sociétés savantes de leurs pays respectifs ;

3° De confier à la Royal Society la mission d'aviser de ces susdites résolutions les divers organismes internationaux existants.

Enfin elle conféra à M. Schuster, secrétaire de la Société royale, la présidence du Comité provisoire, en le chargeant de l'expédition des affaires courantes. Mais il fut bien entendu que la présidence de la Conférence à réunir à Paris cette année même, dans la deuxième quinzaine de novembre, appartiendrait de droit, conformément à l'usage, au président de l'Académie des sciences du pays où se tient l'assemblée, c'est-à-dire au président de l'Académie des sciences de Paris.

Le 15 octobre 1918.

Annexe I

LISTE DES DÉLÉGUÉS.

Belgique :	MM. Ch.-J. de la Vallée Poussin.
	Lecointe.
	Massart.
Brésil :	M. Carlos de Carvalho.
États-Unis d'Amérique :	MM. H. A. Bumstead.
	J. J. Carty.
	W. J. Durand.
	S. Flexner.
	G. Hale.
	A. A. Noyes.
France :	MM. Baillaud.
	Bigourdan.
	Haller.
	Lacroix.
	Lallemand.
	Moureu.
	Picard.

Grande-Bretagne :	M. Mc. Clellan.
	Sir Frank Dyson.
	M. W. B. Hardy.
	M. W. A. Herdman.
	M. J. H. Jeans.
	Sir Alfred Kempe.
	M. H. G. Lyons.
	Sir Edward Sharpey Schafer.
	M. A. Schuster.
	M. C. Sherrington.
	Sir William Tilden.
	Sir Joseph Thomson.
Italie :	M. V. Volterra.
Japon :	MM. Jōji Sakuraï.
	A. Tanakadate.
Portugal :	M. Braamcamp Freire.
Serbie :	MM. Bogdan Popovitch.
	Zoujovitch.

Annexe II.

Déclaration votée à l'unanimité par la Conférence pour servir de préface à ses résolutions.

Lorsque, il y a quatre ans, la guerre éclata, divisant l'Europe en camps ennemis, les hommes de science pouvaient encore espérer que la conclusion de la paix renouerait les liens rompus et que les ennemis de la veille pourraient de nouveau se rencontrer dans des conférences amicales et unir leurs efforts pour le progrès de la science. De tous temps, depuis la renaissance des études scientifiques au moyen âge, la recherche du vrai a formé une chaîne assez solide pour résister à l'effort des antagonismes nationaux. Et ce lien s'est encore fortifié vers la fin du dernier siècle, lorsque le développement de certaines branches de la science a requis, pour leur étude, la collaboration de toutes les nations civilisées. Associations et conférences se sont rapidement multipliées, et des relations amicales de plus en plus intimes se sont établies entre les savants des différents pays, en dépit des divergences politiques, volontairement laissées dans l'ombre.

La guerre, jadis, a fréquemment interrompu la coopération des individus sans détruire leur mutuelle estime, basée sur le sentiment de la valeur de la science; la paix venait bientôt effacer les traces des luttes passées.

Si, aujourd'hui, les délégués des Académies scientifiques des nations alliées et des États-Unis d'Amérique se voient dans l'impossibilité de reprendre des relations personnelles, même en matière de science, avec les savants des Empires centraux, tant que ceux-ci n'auront pas été admis de nouveau dans le concert des nations civilisées, ils le font en pleine conscience de leur responsabilité, et ils ont pour devoir de rappeler les motifs qui les ont amenés à cette décision.

La civilisation a imposé des règles de conduite aux nations qui entendent servir les intérêts de l'humanité et qui ont, à un haut degré, le souci de leur honneur. Telles sont la reconnaissance du caractère sacré des traités (spécialement de ceux concernant l'état de guerre) et la suppression d'inutiles cruautés envers les populations civiles. A ces deux points de vue, les Puissances centrales ont enfreint les lois de la civilisation, dédaignant toutes les conventions et déchaînant dans l'âme humaine les pires passions engendrées par la férocité de la lutte. La guerre est fatalement pleine de cruautés, et des actes individuels de barbarie ne sauraient être évités; il faut en prendre son parti. Ce ne sont pas ces actes que nous visons, ce sont les horreurs organisées, encouragées et imaginées, dès l'origine, dans le seul but de terroriser les populations inoffensives. La destruction d'innombrables propriétés privées, les violences et les massacres sur terre et sur mer, le torpillage des navires-hôpitaux, les insultes et les tortures infligées aux prisonniers de guerre laisseront, dans l'histoire des nations coupables, une tache que ne saurait laver la simple réparation des dommages matériels. Pour restaurer la confiance, sans laquelle toute collaboration fructueuse serait impossible, les Empires centraux devront désavouer les méthodes politiques dont l'application a engendré les atrocités qui ont indigné le monde civilisé.

Résolutions.

1° Aussitôt que les circonstances le permettront, les conventions relatives aux Associations scientifiques internationales seront, conformément aux statuts ou règlements propres à chacune d'elles, dénoncées par les groupements compétents des nations en guerre avec les Empires centraux.

Les nouvelles Associations reconnues utiles au progrès des sciences et de leurs applications seront établies, dès maintenant, par les nations en guerre avec les Empires centraux, avec le concours éventuel des Neutres.

2° Certaines Associations résultant des conventions diplomatiques, telle la Convention du mètre, devront faire l'objet d'un examen spécial lors des négociations de la paix.

3° Les mesures visées ci-dessus laissent de côté les accords concernant exclusivement les relations administratives indispensables entre des services publics, comme celles réglementant la navigation, les dépêches météorologiques, les chemins de fer, les postes et télégraphes, etc.

4° Il est constitué, dans le sein de la Conférence, une Commission d'études à laquelle pourront s'adjoindre des délégués désignés par les Académies des pays en guerre avec les Puissances centrales.

Cette Commission dressera un plan général d'organisations internationales pour satisfaire aux besoins des diverses branches des recherches scientifiques et industrielles, y compris celles relatives à la défense nationale.

La Commission se réunira à Paris, cette année même, dans la deuxième quinzaine de novembre.

5° Chacune des Académies représentées à cette Conférence sera invitée à provoquer la création d'un Conseil national, ayant pour objet l'avancement des recherches mentionnées au paragraphe précédent.

6° Un Conseil international sera constitué par la Fédération des Conseils nationaux.

7° La Conférence, estimant que tous les progrès industriels, agricoles, médicaux, etc., reposent sur les découvertes de la science pure, appelle l'attention des Gouvernements sur l'importance des recherches théoriques et désintéressées, dont les budgets, après la guerre, devront être dotés le plus largement possible.

Elle insiste également sur la création de grands laboratoires, privés et nationaux, de sciences expérimentales.

Mesures d'exécution.

a) Les §§ 1 à 7 des résolutions prises par la Conférence seront communiqués par les Académies à leurs Gouvernements respectifs.

b) Il est demandé aux Académies de bien vouloir faire connaître ces résolutions aux Sociétés savantes de leurs pays respectifs.

c) La Royal Society est priée d'informer — autant que faire se peut — les Bureaux des Associations internationales existantes des résolutions adoptées par la Conférence, en les priant de s'y conformer.

ANNEXE III.

Propositions formulées par M. Jean Massart.

1. — Étendre la notion des « échanges internationaux ».

a) Opérer gratuitement l'échange des publications (livres, tirés à part, périodiques, etc.) envoyées sans but commercial, soit par les auteurs, soit par les sociétés, les universités, les musées, les bibliothèques, etc. ;

b) Permettre à tous les établissements scientifiques des Alliés d'emprunter les livres conservés dans toutes les bibliothèques publiques, et opérer le transport gratuit de ces ouvrages.

2. — Unifier les programmes universitaires, afin de rendre possibles :

a) Les échanges d'étudiants qui iraient alors poursuivre leurs études dans divers pays ;

b) Les échanges de professeurs. On pourrait aussi envisager les échanges de savants n'appartenant pas à l'enseignement : observateurs astronomiques, bibliothécaires, conservateurs de musées, etc.

3. — Permettre la création de recueils bibliographiques dans toutes les branches, afin de nous rendre indépendants des « Centralblatt » et « Jahresberichte ». Les Gouvernements devraient soutenir pécuniairement ces entreprises en souscrivant des abonnements.

4. — Créer des instituts purement scientifiques, consacrés aux divers domaines de la science.

CONFÉRENCE
DES
ACADÉMIES DES SCIENCES INTERALLIÉES
(DEUXIÈME SESSION)
tenue à Paris en novembre 1918

COMPTE RENDU
présenté à l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique

PAR

MM. CH.-J. DE LA VALLÉE POUSSIN, LECOINTE ET MASSART,
Membres de l'Académie.

Les résolutions 4, 5 et 6, prises à Londres quelques semaines auparavant, au cours de la première session de la Conférence des Académies des sciences interalliées, avaient recommandé la constitution, dans le plus bref délai possible, d'un *Conseil international de recherches,* émanant de la fédération de *Conseils nationaux de recherches* à fonder dans chacun des pays en guerre avec l'Allemagne et les nations soumises à son influence.

D'autre part, la première des résolutions votées à Londres, précédée d'un vibrant réquisitoire contre les intellectuels germaniques qui avaient incontestablement prostitué la Science en l'asservissant à de criminels desseins, concluait à la dénonciation d'urgence, dans les formes légales, des conventions relatives aux associations internationales comptant parmi leurs membres des ressortissants des Empires du Centre. En même temps les Académies interalliées avaient décidé de créer, dès maintenant, avec le concours éventuel des Neutres, en remplacement de celles dont les Alliés allaient se retirer, les nouvelles associations reconnues utiles au progrès des sciences et de leurs applications.

Enfin la Conférence de Londres avait renvoyé à une session ultérieure l'examen de diverses questions d'ordre scientifique nécessitant une étude préalable.

La deuxième session de la Conférence des Académies des sciences interalliées, tenue à Paris les 26, 27, 28 et 29 novembre 1918, devait avoir pour objet d'apporter des solutions aussi complètes que possible à ce programme.

* * *

Les pays représentés à la Conférence étaient les mêmes que ceux qui avaient adhéré à celle de Londres, à savoir :

La Belgique, le Brésil, les États-Unis d'Amérique, la France, le Royaume-Uni de Grande-Bretagne et d'Irlande, l'Italie, le Japon, le Portugal et la Serbie.

En outre, des représentants de la principale Académie, respectivement de la Grèce, de la Pologne et de la Roumanie, ayant contracté pour leurs confrères l'engagement d'observer strictement les résolutions prises à Londres et se disant qualifiés à cette fin, participaient aux travaux de l'Assemblée. La liste nominative des délégués figure à l'annexe I du présent compte rendu. Les délégués belges qui avaient siégé à Londres, présumant que la Conférence de Paris entrerait dans le détail de l'examen de certaines questions d'ordre industriel, bibliographique et chimique, avaient proposé à l'autorité nationale compétente de leur adjoindre des personnalités spécialistes en la matière et dont ils avaient suggéré les noms.

Leur proposition fut agréée, mais ils en furent avisés après la clôture de la Conférence seulement, par suite des difficultés extrêmes, en ce moment, des relations télégraphiques entre Paris et Bruxelles.

Cet incident fut toutefois sans conséquence, attendu que l'examen des susdites questions fut remis à une session ultérieure.

Disons enfin que, tout comme à Londres, les délégués des institutions scientifiques des divers pays représentés avaient uniquement à remplir une mission d'information; leurs décisions devaient être soumises à la ratification des susdites institutions et éventuellement de leurs Gouvernements.

* * *

Le Bureau de la Conférence fut constitué comme suit :

Président honoraire : M. PAINLEVÉ, président de l'Académie des sciences de Paris.

Président effectif : M. SCHUSTER.

Vice-Président : M. ÉMILE PICARD.

Secrétaires généraux : MM. DURAND et LALLEMAND.

* * *

L'Assemblée fit d'abord la déclaration de principe suivante :

« La Conférence, reconnaissant qu'en matière de Science
» les premiers progrès sont toujours le résultat d'efforts indi-
» viduels, considère comme l'une de ses tâches essentielles
» d'encourager tous les efforts ayant pour but de réunir les
» ressources et d'assurer aux savants qualifiés la liberté d'esprit
» nécessaire au succès des recherches scientifiques d'ordre
» élevé. »

Elle entendait nettement établir par là qu'en voulant organiser les recherches, elle ne poursuivait pas le but chimérique de se substituer aux efforts individuels et de prohiber l'activité personnelle et originale des chercheurs : elle reconnaissait même que cette initiative individuelle est de beaucoup le plus important facteur dans le progrès des sciences.

* * *

En vue de la constitution, dans les meilleures conditions pratiques possibles, du Conseil international de recherches, la Conférence, après discussion, arrêta les neuf résolutions suivantes :

1. — La Commission d'études prévue à l'article 4 des résolutions de la Conférence de Londres remplira jusqu'à nouvel ordre le rôle du *Conseil international de recherches* visé à l'article 6 des mêmes résolutions.

2. — Les Académies ou Gouvernements représentés au Conseil international auront la faculté d'adjoindre à leur délégation de nouveaux membres appartenant soit au *Conseil national* prévu à l'article 5 des résolutions de Londres, soit à toute autre organisation similaire.

3. — Le Conseil international instituera immédiatement un *Comité exécutif* de cinq membres chargé d'étudier les questions scientifiques ou techniques qui lui auront été envoyées par le Conseil international.

4. — Le Comité exécutif étudiera également les projets d'ordre scientifique ou industriel et de caractère international visés à l'article 4 des résolutions de la Conférence de Londres, et notamment les projets de création de nouvelles Associations qui lui seront soumis par l'une des Académies représentées à la Conférence ou par un groupe de délégués, soit de ces Académies, soit d'un Conseil national de recherches.

A cet effet, le Comité exécutif pourra entrer en relations avec les organismes ou les personnes jugés par lui compétents en la matière.

5. — Le Comité exécutif formera des Comités spéciaux chargés d'étudier en détail la fondation des nouvelles Associations envisagées à l'article 1er des résolutions de la Conférence de Londres, ainsi que des Associations dont la création aurait été décidée par la présente Conférence. Les membres de ces Comités ne seront pas nécessairement membres du Conseil international. Un Comité spécial pourra nommer de nouveaux membres à la majorité des deux tiers des voix des membres qui le composent.

6. — Le Comité exécutif aura pouvoir de convoquer des réunions du Conseil international de recherches.

7. — Dès que le Comité exécutif estimera que les Conseils nationaux sont en nombre suffisant pour permettre la constitution du Conseil international définitif prévu à l'article 6 des résolutions de Londres, il provoquera la réunion de ce Conseil.

Les membres du Comité exécutif résigneront alors leurs fonctions.

8. — Pour les organisations sortant de la compétence des Comités spéciaux déjà constitués, le Comité pourra entrer en relations avec les organisations ou les personnes les mieux qualifiées.

9. — Le Comité exécutif créera, sous sa direction, un Bureau administratif.

⁂

L'Assemblée désigna ensuite à l'unanimité, comme membres du Comité exécutif :

MM. Hale,
Lecointe,
Picard,
Schuster,
Volterra.

Ce Comité exécutif, à son tour, arrêta que le siège du Bureau administratif serait établi à Londres.

Elle élut M. Picard en qualité de président du Comité exécutif et M. Schuster comme directeur du Bureau administratif.

⁂

La Conférence avait à jeter les bases des nouvelles associations internationales reconnues utiles au progrès des sciences et de leurs applications. Elle ne mit pas en doute un instant que le détail de l'organisation de ces groupements relevait exclusivement des spécialistes qui allaient les composer. Elle crut toutefois utile d'arrêter des dispositions générales, applicables à la constitution de toutes celles qui allaient être rattachées au Conseil international des recherches, dans l'esprit qui avait présidé à l'adoption de la première des résolutions de Londres.

Les dispositions générales ainsi admises furent les suivantes :

« 1. — Pourront participer à la fondation des Associations
» scientifiques rattachées au Conseil international de recherches
» ou adhérer ultérieurement aux mêmes Associations, les pays
» dont les noms suivent :

» Belgique, Brésil, États-Unis, France, Royaume-Uni de Grande-
» Bretagne et d'Irlande, Australie, Afrique du Sud, Canada,
» Nouvelle-Zélande, Grèce, Italie, Japon, Pologne, Portugal,
» Roumanie, Serbie.

» 2. — Une Association étant constituée, les nations non
» comprises dans l'énumération précédente, mais rentrant dans
» les conditions de l'article 1er des résolutions de la Confé-
» rence de Londres, pourront éventuellement y être admises,
» soit sur leur demande, soit sur la proposition de l'un des
» pays faisant déjà partie de l'Association.

» Ces demandes seront soumises au Comité international, qui
» décidera de leur admission à la majorité des trois quarts des
» voix de l'ensemble des pays déjà entrés dans l'Association. »

Les dispositions qui précèdent ne doivent donner lieu à aucune interprétation fâcheuse de la part de plusieurs États en guerre avec l'Allemagne et qui, en conséquence, pourraient s'estimer en droit d'adhérer aux nouvelles Associations internationales, en vertu de la résolution de Londres (Bolivie, Bohême, Chine, Costa-Rica, Cuba, Équateur, Guatémala, Haïti, Honduras, Libéria, Nicaragua, Panama, Pérou, Siam, Uruguay).

La Conférence a estimé qu'il convenait d'établir une différence entre les États fondateurs des nouvelles Associations internationales, ayant siégé à Londres et à Paris, et les pays qui n'avaient point participé aux nouvelles créations et que des raisons d'ordre économique, peut-être, tiendraient écartés de ces institutions, exigeant des cotisations annuelles parfois élevées. Quant aux Neutres, il convenait de ne contracter vis-à-vis d'eux aucun engagement; la guerre n'est pas finie et par suite on ne peut affirmer quel État sera effectivement neutre jusqu'au bout. La Conférence n'a eu aucunement l'intention d'écarter systématiquement les Neutres actuels, elle n'en a incriminé aucun, puisqu'elle est allée jusqu'à les mettre sur le même pied que certains de nos Alliés.

⁂

Parmi les sciences qui exigent le plus impérieusement la création de nouveaux organismes internationaux, figurent tout d'abord l'astronomie et la géophysique.

La Conférence a donc prié le Comité exécutif d'élaborer, dans le plus bref délai possible, des projets de statuts pour la constitution de :

1° L'Union astronomique internationale;

2° L'Union géophysique internationale.

Elle a donné, à cet effet, les directives suivantes :

A. — POUR L'UNION ASTRONOMIQUE.

« 1° Entre les pays désignés à l'article 1er des dispositions
» générales, il est institué, sous le nom d'Union astronomique,
» une Association internationale ayant pour objet le progrès
» général de l'astronomie et des sciences et arts connexes.
» Elle exerce principalement son action en provoquant et faci-
» litant la réalisation des œuvres de cet ordre qui nécessitent
» une coopération.

» 2° L'Association est régie par un Comité international
» composé de délégués des Comités nationaux relatifs à chacun
» de ces pays, formés comme il est dit à l'article 3.

» 3° Chaque Comité national est composé de représentants
» des sociétés savantes et des services publics compétents, ainsi
» que de représentants du Gouvernement. Il est formé par les
» soins de l'Académie nationale des sciences du pays, ou, à son
» défaut, par les soins du Comité national de recherches ou bien
» d'autres institutions nationales.

» 4° Dans le Comité international, les résolutions sont prises
» à la majorité des membres présents pour les questions d'ordre
» scientifique. Pour les questions d'ordre administratif et les
» questions mixtes, le vote a lieu par pays, le nombre de voix
» de chaque pays étant fixé d'après sa population, comme il est
» indiqué ci-après :

Catégorie	*A.*	Moins de 5	millions d'habitants :	1	voix.
—	*B.*	Entre 5 et 10	—	2	—
—	*C.*	Entre 10 et 15	—	3	—
—	*D.*	Entre 15 et 20	—	4	—
—	*E.*	Plus de 20	—	5	—

» Les habitants des colonies et protectorats d'un pays sont
» comptés dans la population de ce pays d'après les indications
» de son Gouvernement.

» Au contraire, chaque Dominion (Afrique du Sud, Australie,
» Canada, etc.) a un nombre de voix correspondant à sa population
» et fixé d'après le barème précédent. »

B. — Pour l'Union géophysique.

« 1° Entre les États désignés à l'article 1er des dispositions
» générales, il est institué, sous le nom d'*Union géophysique*
» *internationale*, une Association ayant pour but de provoquer,
» de coordonner et de faciliter, sur leurs territoires respectifs,
» l'exécution de tous travaux d'utilité générale intéressant l'une
» des branches de la physique du globe.

» 2° L'Union se divise en deux sections correspondant à

» chacune des branches essentielles de son activité, savoir :

» *a*) La section de géodésie avec ses annexes, notamment » l'étude des marées et la cartographie mathématique;

» *b*) La section de météorologie, à laquelle sont rattachés le » magnétisme terrestre, la sismologie et la vulcanologie.

» Chacune des deux sections élit son Bureau, composé d'un » président, d'un vice-président et d'un secrétaire.

» 3° L'Union est régie par un Comité international formé de » délégués des Comités nationaux constitués, en vue du même » objet, dans les divers pays associés.

» 4° Dans chaque pays, le Comité national est créé par les » soins de l'Académie nationale des sciences ou, à son défaut, » par le Gouvernement.

» Il se compose de représentants des Sociétés savantes intéressées et de délégués, nommés par le Gouvernement, pour » les services publics compétents. »

En outre, le § 4, concernant l'Union astronomique, devait être applicable également à l'Union géophysique.

A propos de cette dernière Association, il est à remarquer que les statuts en projet semblent attribuer aux Gouvernements une influence plus directe que dans le cas de l'Union astronomique. Cette tendance trouve son explication dans le fait que certains services publics sont plus étroitement unis aux sciences géophysiques qu'aux sciences astronomiques.

Il appartiendra toutefois, comme nous l'avons dit précédemment, aux fondateurs effectifs des nouvelles Associations de manifester d'une façon formelle leurs desiderata à ce propos.

Le Comité exécutif, actuellement déjà, a établi les susdits projets de statuts; ceux-ci seront soumis incessamment à l'avis des corps scientifiques adhérents à la Conférence.

⁂

Il ne nous paraît pas inopportun de signaler que le 29 novembre 1918 les astronomes et géophysiciens présents à la session

(MM. **Baillaud**, **Bigourdan**, **Deslandres**, **Dyson**, **Hale**, **Lecointe**, **Ricco** et **Schuster**) se sont réunis en Commission spéciale, de l'assentiment de la Conférence, et ont exprimé le vœu que l'Assemblée générale constitutive de l'Union astronomique internationale ait lieu aussitôt que les circonstances le permettront et coïncide avec l'Assemblée générale constitutive de l'Union géophysique internationale.

Les astronomes et géophysiciens précités ont demandé, en outre, que notamment les questions scientifiques mentionnées ci-après soient l'objet de rapports spéciaux, dont l'examen serait porté à l'ordre du jour.

1. Fonctionnement du Bureau international de l'Heure.
   Rapporteur : M **Baillaud**.
2. Fonctionnement du Bureau central des télégrammes astronomiques.
   Rapporteur : M. **Baillaud**.
3. Publication d'un recueil donnant le plus rapidement possible les travaux astronomiques récents.
   Rapporteur : M. **Bigourdan**.
4. Question des Éphémérides en général, et en particulier de l'origine du jour, des éphémérides et des observations de petites planètes.
   Rapporteur : Sir W. **Dyson**.
5. Carte photographique du ciel.
   Rapporteur : M. **Baillaud**.
6. Rapport de l'Union solaire.
   Rapporteur : Prof^r **Schuster**.

Ils décidèrent d'autre part que :

Les Bureaux de l'Heure et des télégrammes astronomiques fonctionneraient jusqu'à nouvel ordre sous la direction de l'Observatoire de Paris.

Le Comité exécutif s'est rallié à cette manière de voir et a décidé que les Assemblées constitutives précitées auraient lieu à Paris dans la seconde quinzaine du mois de mai 1919.

* * *

Les trois propositions reproduites ci-après et formulées par les représentants de la Belgique, du Brésil, de la Pologne, de la Roumanie et de la Serbie, ne sont en quelque sorte que la reproduction, sous une autre forme, des vœux émis par M. Massart à la Conférence de Londres.

I.

« Nommer une Commission chargée d'étudier l'ensemble du
» service des échanges internationaux, notamment en ce qui
» concerne :
» *a*) Les échanges des publications des Académies et institu-
» tions similaires entre elles;
» *b*) Le prêt des ouvrages conservés dans les bibliothèques
» publiques ou éventuellement des photographies d'ouvrages
» rares. »

II.

« Nommer une Commission chargée d'étudier l'internationa-
» lisation des grands laboratoires actuellement existants ou en
» voie de formation et éventuellement la création de nouveaux
» laboratoires organisés d'une façon internationale, par exemple
» dans le domaine de la physique, de la chimie et de la biologie. »

III.

« Nommer une Commission chargée de réunir les pro-
» grammes universitaires des pays alliés et d'en faire une étude
» comparative. »

Ces propositions ont été agréées et les Commissions projetées composées comme suit :

I.

Commission des échanges.

MM. Bigourdan, président.
Massart, secrétaire.
Mickiewicz.
Petrovitch.

MM. Reina.
Schafer.
Walcott.

II.

Commission des laboratoires.

MM. Lippmann, président.
Moureu, secrétaire.
Carty.
Flexner.
Hurmuzesco.
Le Chatelier.
Marinesco.

MM. Massart.
Périer.
Roux.
Sakurai.
Schafer.
Starling.

III.

Commission des programmes.

MM. Appell, président.
Massart, secrétaire.
de Carvalho.
Flexner.
Guignard.
Hurmuzesco.

MM. Lacroix.
Merrimau.
Noyes.
Painlevé.
Zujovic.

En ce qui concerne la seconde de ces propositions, il nous semble opportun de relater le résumé suivant des considérations dont M. Massart l'a accompagnée.

« Il serait fort désirable que certains grands laboratoires spé-

» ciaux, actuellement existants, fussent internationalisés, par
» exemple le laboratoire des basses températures à Leiden.

» Soutenus par des contributions financières de tous les pays,
» ceux-ci auraient le droit d'y envoyer des travailleurs. C'est le
» système qui fonctionnait au Laboratoire de Zoologie maritime
» de Naples. D'autre part, il serait très utile de créer des labo-
» ratoires internationaux nouveaux, bien dotés par toutes les
» nations alliées, où les travailleurs trouveraient, pour des
» recherches très spéciales, un outillage et un personnel appro-
» priés ; on pourrait envisager la création de laboratoires pour
» certains domaines de la physique, de la chimie et de la bio-
» logie.

» Enfin il faudrait encore établir des laboratoires d'un autre
» genre. Ainsi, depuis longtemps, les laboratoires du monde
» entier se sont habitués à dépendre de l'Allemagne pour la
» fourniture de produits chimiques purs. Rien n'est plus urgent
» que de fonder un laboratoire international où tous nos chi-
» mistes se procureraient, au prix coûtant, les substances pures
» dont ils ont besoin pour leurs recherches. »

Les Commissions mentionnées ci-dessus ont la faculté de s'adjoindre d'autres spécialistes compétents, et il est bien entendu qu'elles auront à communiquer au Comité exécutif le résultat de leurs études.

⁂

Dans le domaine de la bibliographie, MM. Flahault, Guignard, Massart et Périer ont proposé des principes directeurs que la Conférence a transmis pour examen au Comité exécutif.

M. Massart a présenté une « Liste des recueils bibliographiques des sciences mathématiques, physiques, chimiques et naturelles » que nous publierons dans un prochain *Bulletin*.

M. Otlet a rédigé une note, que M. Lecointe a présentée en son nom, sur les travaux de l'Institut international de bibliographie et sur l'organisation par cet Institut d'un service général de documentation.

⁂

La Conférence a pris également en considération et renvoyé pour étude au Comité exécutif une série de vœux ou propositions tendant :

a) A la création, par chaque pays représenté à la Conférence, d'attachés techniques et scientifiques permanents près les autres pays et siégeant au sein des Conseils nationaux (MM. HALE et VOLTERRA) ;

b) A l'élaboration d'accords internationaux spéciaux relatifs aux brevets (M. VOLTERRA);

c) A l'institution d'une Association internationale de sociétés de physique (MM. HURMUZESCO, LIPPMANN et VOLTERRA) ;

d) A l'organisation d'une coopération interalliée en matière de chimie et de technologie chimique.

Une Commission d'études a été nommée; elle comprend MM. FRANKLAND, HALLER, MOUREU, NASINI, NOYES et SAKURAI ;

e) A la création d'organismes interalliés relatifs aux pêches maritimes et à l'Océanographie (M. PÉRIER, au nom du Prince de Monaco) ;

f) A l'organisation, sur une base nouvelle, de la Commission officielle actuellement existante de la Protection de la Nature (faunes de l'Afrique et des régions chaudes de l'Asie, pêche de la Baleine, du Cachalot, etc.) (M. PÉRIER, au nom du Prince de Monaco).

Une Commission a été nommée à cet effet et se compose de MM. FLAHAULT, GUIGNARD, MASSART et PÉRIER (secrétaire) ;

g) A la prise en considération des travaux du Dr KIMURA pour la réduction des observations relatives à la variation des latitudes (M. TANAKADATE);

h) A l'établissement de relations étroites entre le Conseil international de recherches projeté et l'Union des Associations internationales (note rédigée par M. P. OTLET et présentée par M. LECOINTE).

Paris, le 5 décembre.

Annexe I.

LISTE DES DÉLÉGUÉS.

Belgique.

M. **Ch.-J. de la Vallée Poussin**, membre de l'Académie royale des sciences de Belgique, correspondant de l'Académie des sciences de Paris, professeur de mathématiques à l'Université de Louvain;

M. **Georges Lecointe**, membre correspondant de l'Académie royale des sciences de Belgique et de l'Académie des sciences de Paris, directeur de l'Observatoire royal de Belgique à Uccle;

M. **J. Massart**, membre de l'Académie royale des sciences de Belgique, professeur de botanique à l'Université de Bruxelles.

Brésil.

M. **C. D. de Carvalho**, membre de la Société royale météorologique de Londres, professeur à l'Académie des hautes études de Rio de Janeiro.

États-Unis.

M. **H. A. Bumstead**, membre de l'Académie nationale des sciences des États-Unis, professeur de physique à l'Université Yale;

M. **J. J. Carty**, membre de l'Académie nationale des sciences des États-Unis, ingénieur en chef de l'American Telephon and Telegraph C°;

M. W. J. **Durand**, membre de l'Académie nationale des sciences des États-Unis, professeur de mécanique appliquée à l'Université de Stanford (Californie);

M. S. **Flexner**, membre de l'Académie nationale des sciences des États-Unis, directeur du laboratoire de pathologie et bactériologie de l'Institut Rockfeller;

M. G. **Hale**, secrétaire pour l'étranger de l'Académie nationale des sciences des États-Unis, correspondant de l'Académie des sciences de Paris, directeur de l'Observatoire de Mount Wilson (Californie);

M. A. A. **Noyes**, membre de l'Académie nationale des sciences des États-Unis, professeur de chimie à l'Institut technologique de Massachusetts.

France.

M. B. **Baillaud**, membre de l'Académie des sciences, directeur de l'Observatoire de Paris;

M. G. **Bigourdan**, membre de l'Académie des sciences, astronome à l'Observatoire de Paris;

M. **Charles Flahault**, membre de l'Académie des sciences, professeur de botanique à la Faculté des sciences de Montpellier;

M. **Léon Guignard**, vice-président de l'Académie des sciences, professeur de botanique à l'École supérieure de pharmacie de Paris;

M. **Albin Haller**, membre de l'Académie des sciences, professeur de chimie organique à la Faculté des sciences de Paris;

M. A. **Lacroix**, secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences, professeur de minéralogie au Muséum national d'Histoire naturelle;

M. **Charles Lallemand**, membre de l'Académie des sciences, directeur du nivellement général de la France;

M. **Gabriel Lippmann**, membre de l'Académie des sciences, professeur de physique à la Faculté des sciences de Paris;

M. **Charles Moureu**, membre de l'Académie des sciences, professeur de chimie au Collège de France;

M. **Paul Painlevé**, président de l'Académie des sciences, professeur de mécanique rationnelle à la Faculté des sciences de Paris;

M. **Émile Picard**, secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences, professeur d'analyse supérieure à la Faculté des sciences de Paris;

M. **Edmond Périer**, membre de l'Académie des sciences, directeur du Muséum national d'Histoire naturelle;

M. **Émile Roux**, membre de l'Académie des sciences, directeur de l'Institut Pasteur.

Royaume-Uni de Grande-Bretagne et d'Irlande.

Sir F. W. **Dyson**, membre de la Société royale de Londres, correspondant de l'Académie des sciences de Paris, astronome royal, directeur de l'Observatoire de Greenwich;

M. P. F. **Frankland**, membre de la Société royale de Londres, professeur de chimie à l'Université de Birmingham;

M. J. H. **Jeans**, membre de la Société royale de Londres, professeur de mathématiques à l'Université de Cambridge;

M. C. G. **Knott**, secrétaire de la Société royale d'Édimbourg, professeur de mathématiques appliquées à l'Université d'Édimbourg;

M. H. G. **Lyons**, membre de la Société royale de Londres, ancien directeur général du Survey d'Égypte;

Sir E. S. **Schafer**, membre de la Société royale de Londres, professeur de physiologie à l'Université d'Édimbourg;

M. **Arthur Schuster**, secrétaire de la Société royale de Londres, ancien professeur de physique à l'Université de Manchester;

M. Ch. Sherrington, membre de la Société royale de Londres, professeur de physiologie à l'Université d'Oxford ;

M. E. H. Starling, membre de la Société royale de Londres, professeur de physiologie à l'Université de Londres.

Grèce.

. . . .

Italie.

M. Gaudenzio Fantoli, membre de l'Académie royale des Lincei, professeur d'hydraulique à l'Institut technique supérieur de Milan ;

M. Raffaello Nasini, membre de l'Académie royale des Lincei, professeur de chimie à l'Université de Pise ;

M. Vincenzo Reina, membre de l'Académie royale des Lincei, professeur de géodésie à l'Université de Rome ;

M. Annibale Riccò, membre de l'Académie royale des Lincei, directeur des Observatoires de Catane et de l'Etna ;

M. Vito Volterra, membre de l'Académie royale des Lincei, associé étranger de l'Académie des sciences de Paris, professeur de physique mathématique à l'Université de Rome.

Japon.

M. Jōji Sakuraï, membre de l'Académie impériale des sciences de Tokyo, professeur de chimie à l'Université de Tokyo ;

M. Aikichi Tanakadate, membre de l'Académie impériale des sciences de Tokyo, professeur honoraire à l'Université de Tokyo.

Pologne.

M. Ladislas Mickiewicz, délégué de l'Académie des sciences de Cracovie.

Portugal.

M. **Bettencourt Rodriguez**, membre de l'Académie des sciences de Lisbonne, envoyé extraordinaire et ministre plénipotentiaire de la République de Portugal en France.

Roumanie.

M. **Dragomir Hurmuzesco**, membre de l'Académie roumaine, professeur de physique à l'Université de Bucarest;

M. G. **Marinesco**, membre de l'Académie roumaine, professeur de physiologie à la Faculté de médecine de Bucarest;

M. L. **Mrazec**, membre de l'Académie roumaine, professeur de minéralogie et de pétrographie à l'Université de Bucarest;

M. **Al. A. Soutzo**, membre de l'Académie roumaine, professeur de psychiâtrie à l'Université de Bucarest.

Serbie.

M. **Michel Petrović**, membre de l'Académie royale de Serbie, professeur de mathématiques à l'Université de Belgrade;

M. J. **Zujović**, président de l'Académie royale de Serbie, professeur de géologie à l'Université de Belgrade.

Courbes algébriques gauches représentables par des matrices,

par M. STUYVAERT, correspondant de l'Académie.

La présente note contient un commencement de solution d'un des problèmes que nous avons posés dans notre travail : *Congruences de cubiques gauches*, couronné par la Classe des sciences en 1913 et non encore imprimé.

Voici l'énoncé de ce problème : « Chercher les courbes algébriques gauches représentables par des matrices. »

Considérons une matrice à l lignes et $l+1$ colonnes dont les éléments sont des polynômes homogènes en x_1, x_2, x_3, x_4; l'élément où se croisent la $i^{\text{ième}}$ ligne et la $k^{\text{ième}}$ colonne est de degré $n_i + p_k$, et nous supposons $n_1 \leq n_2 \leq n_3, \ldots$ et $p_1 \leq p_2 \leq p_3, \ldots$

Si une courbe gauche est représentée par cette matrice en ce sens que tous ses points, et ses points seuls, annulent les $l+1$ déterminants qu'on peut extraire de la matrice, deux surfaces circonscrites à la courbe s'obtiennent en supprimant l'une des deux colonnes de degré le plus élevé en x_1, x_2, x_3, x_4.

Le résidu de l'intersection est représenté par la matrice où l'on abolit ces deux colonnes à la fois.

Ce résidu est toujours une courbe de degré inférieur à la courbe initiale, comme il résulte du calcul suivant : d'après une formule de nos *Cinq Études de Géométrie analytique* (*), page 10, ces deux degrés sont respectivement :

$$\sum n_1 n_2 + \sum n^2 + \sum n \sum_1^{l+1} p + \sum_1^{l+1} p_1 p_2,$$

$$\sum_1^{l-1} p_1 p_2 + \sum_1^{l-1} p^2 + \sum_1^{l-1} p \sum n + \sum n_1 n_2,$$

et leur différence peut s'écrire :

$$\sum n^2 + \sum n(p_{l+1} + p_l) + p_{l+1} \sum_1^{l} p + p_l \sum_1^{l-1} p - \sum_1^{l-1} p^2;$$

elle est toujours positive, car le dernier terme, seul négatif, peut être soustrait du précédent si, comme on l'a supposé, p_l est supérieur à p_1, p_2, ... p_{l-1}.

Ainsi, quand une courbe c_n est représentée par une matrice à l lignes et $l + 1$ colonnes, deux surfaces qui la contiennent ont un résidu d'ordre inférieur à n. Le même raisonnement s'applique à ce résidu et, de proche en proche, on arrive à une matrice à une ligne et deux colonnes, c'est-à-dire à une intersection totale de deux surfaces ; — à moins qu'on ne rencontre, avant d'avoir épuisé le procédé, une matrice M dont tous les déterminants s'annulent pour une certaine surface S accompagnée d'une courbe c, qui peut d'ailleurs faire défaut.

Occupons-nous de cette dernière alternative. Supposons la matrice M à l lignes et $l + 1$ colonnes, et faisons-la précéder de deux lignes d'éléments arbitraires quant à leurs coefficients, mais de degrés tels que les déterminants extraits de la nouvelle matrice soient homogènes. La nouvelle matrice M' a $l + 2$ lignes et $l + 1$ colonnes ; les déterminants qu'on en extrait par suppression d'une des deux premières lignes représentent deux surfaces ayant la partie commune S et dont les résidus R, R' se coupent suivant la courbe c plus peut-être une courbe c'.

(*) Van Goethem, Gand, 1908.

Un déterminant D extrait de M′ par suppression d'une des l dernières lignes représente une surface qui peut avoir en commun avec S une surface S′ et une courbe c'', réductible ou non, intersection *totale* de deux surfaces; S′ et c'' ne peuvent manquer à la fois. Or les points communs aux surfaces S et D annulent aussi les déterminants extraits de M′ par suppression de toute autre des l dernières lignes; c'est évident si les points de S annulent tous les premiers mineurs des déterminants extraits de M; sinon on aura choisi D avec des mineurs extraits de M et non tous nuls pour les points de S; alors pour ces points deux séries de ces mineurs sont proportionnels, ou bien ceux de la nouvelle série tous nuls. (Tout ou partie de la courbe c peut annuler M′, notamment si elle annule tous les premiers mineurs des déterminants extraits de M.)

Bref, un point annulant M′ ne peut être que sur la surface S ou sur la ligne $c + c'$; s'il est sur S, comme il doit annuler D, il est sur S′ ou c''. En particulier, si M′ ne s'annule que pour une ligne, une partie c'' de cette ligne, et qui ne manque jamais, est une intersection *totale*.

Par exemple, si la matrice M′ pouvait représenter deux droites non dans un même plan, la surface S devrait être plane, les déterminants analogues à D tous du premier ordre (car S′ manque, et $c + c'$ et c'' sont des droites), donc les l dernières lignes sont toutes pareilles quant à l'ordre de leurs éléments, et cet ordre ne peut être que 0 ou 1. Mais R et R′ sont aussi du premier degré, et les deux premières lignes de M′ aussi pareilles entre elles, avec 0 ou 1 pour degré de chaque élément, sans quoi D serait au moins quadratique. Finalement il n'y a d'éléments de degré 1 que dans une ligne ou une colonne de chaque déterminant D, donc M′ n'a d'éléments linéaires que dans une colonne ou dans deux lignes; mais alors $M' = 0$ ne représente en tout qu'une seule droite, ce qui est contre l'hypothèse.

De même M′ ne peut représenter une *biquadratique ration-*

nelle c_4, car si elle représente un ensemble de courbes, parmi celles-ci figure toujours une intersection *totale* de deux surfaces.

Examinons si la courbe rationnelle c_4 peut être représentée seule par une matrice à l lignes et $l+1$ colonnes. Pour avoir un résidu d'ordre inférieur à 4, il faut considérer deux surfaces circonscrites d'ordres 2 et 3; leur intersection se complète, on le sait, par deux droites non dans un même plan, car nous venons d'exclure la possibilité d'un résidu comprenant une surface. Par ce résidu, on ne peut mener que deux quadriques, et le nouveau résidu est identique au premier, c'est-à-dire formé de deux droites sans point commun, car derechef l'hypothèse où le nouveau résidu comprend une surface a été reconnue fausse.

Donc *la biquadratique rationnelle n'est pas représentable par une matrice à* l *lignes et* $l+1$ *colonnes.*

On ne réussit pas davantage si le premier résidu est formé de deux droites confondues, car deux quadriques de raccordement suivant une génératrice g se coupent encore suivant deux droites généralement distinctes, ou peut-être confondues, mais en tout cas le nouveau résidu est de même ordre que le premier.

Pour le montrer, on prend un point P commun aux deux quadriques et hors de g. Le plan gP est tangent à la première quadrique en un point Q de g; mais en Q le plan tangent à la seconde quadrique est aussi gP, donc la droite QP appartient aux deux surfaces, etc.

On peut aussi établir la chose par le calcul suivant : Soit Oz la droite de raccordement; les deux quadriques étant représentées par

$$\begin{aligned} ax^2 + bxy + cy^2 + dxz + eyz + fx + gy &= 0, \\ a'x^2 + b'xy + c'y^2 + d'xz + e'yz + f'x + g'y &= 0, \end{aligned}$$

si l'on transporte l'origine en un point Q de coordonnées 0, 0, h, les termes du premier degré deviennent

$$\begin{aligned} &(dh + f)x + (eh + g)y, \\ &(d'h + f')x + (e'h + g')y, \end{aligned}$$

et leur évanouissement représente, dans les deux systèmes d'axes, le plan tangent au point Q de la droite de raccordement; ces plans doivent coïncider, donc

$$\frac{dh+f}{d'h+f'}=\frac{eh+g}{e'h+g'};$$

ceci a lieu pour toute valeur de h; par suite $d : d' = e : e' = f : f' = g : g'$ et les équations des deux quadriques peuvent être amenées à avoir les mêmes termes en xz, yz, x, y; leurs points communs sont à l'intersection de l'une d'elles avec une surface

$$(a-a')x^2+(b-b')xy+(c-c')y^2=0,$$

obtenue par soustraction, et composée de deux plans par Oz. Ainsi les quadriques ont encore en commun deux droites généralement distinctes.

Le système de deux droites confondues peut être, comme ci-dessus, un cas limite de deux droites sans point commun, quand il est fourni par deux quadriques de raccordement; ou bien un cas limite de deux droites d'un plan quand il est fourni par un cône et un plan tangent. Ou encore, suivant les circonstances, il est un cas limite d'un système du second ordre à 1 ou 0 point double apparent, et peut être respectivement le résidu d'une courbe c_4 à trois ou deux points doubles apparents.

Pour nous en assurer par un autre moyen, appelons $c_x^2 = 0$ l'équation d'un cône quadratique, $t_x = 0$ celle d'un plan tangent; alors toute surface du second ou du troisième degré passant par les deux droites confondues a respectivement pour équation, en vertu d'un théorème fondamental connu :

$$c_x^2 - t_x a_x = 0, \qquad c_x^2 b_x - t_x d_x^2 = 0;$$

ces surfaces ont en commun les deux droites confondues plus une courbe c_4 annulant la matrice

$$\left\|\begin{matrix} c_x^2 & a_x & d_x^2 \\ t_x & 1 & b_x \end{matrix}\right\|;$$

mais cette courbe c_4 n'est pas rationnelle, car elle est l'intersection totale de deux quadriques que l'on obtient en supprimant la première ou la troisième colonne.

Encore une fois la biquadratique gauche rationnelle seule n'est pas représentable par une matrice à l lignes et $l + 1$ colonnes. (La représentation que nous avons indiquée dans nos *Cinq Études*, page 92, comprend une droite parasite.)

Il en est de même, par exemple, de la courbe gauche c_5 qui complète l'intersection de deux surfaces cubiques passant par la biquadratique rationnelle.

Par contre, la biquadratique rationnelle c_4 est représentable, de plus d'une manière, par une matrice à l lignes et $l + 2$ colonnes. La forme la plus simple serait

$$\| \mathrm{S}_2 \quad \mathrm{S}_3 \quad \mathrm{S}'_3 \| = 0,$$

où S_2 est la seule quadrique contenant c_4 et S_3, S'_3 sont deux surfaces cubiques circonscrites ; car S_3 coupe S_2 suivant c_4 plus deux de ses trisécantes, et S'_3 coupe ces deux trisécantes chacune en trois points de c_4, mais en aucun point extérieur.

Une autre représentation de c_4 se trouve dans notre mémoire couronné de 1913 ; la voici :

$$\left\| \begin{matrix} a_x & & c_x & & e_x \\ b_x & a_x & d_x & c_x & f_x \\ & b_x & & d_x & g_x \end{matrix} \right\| = 0.$$

Ceci représente, en effet, l'intersection de la surface cubique définie par les colonnes 1, 4, 5 de cette matrice avec la quadrique $a_x d_x - b_x c_x$, d'où il faut défalquer les droites $a_x = b_x = 0$ et $c_x = d_x = 0$. Nous laissons au lecteur le soin de démontrer, par le moyen de cette représentation, le théorème suivant :

Une série de génératrices d'un cône quadratique et un système réglé étant rapportés projectivement, le lieu de l'inter-

section du plan tangent le long de la génératrice du cône avec le rayon correspondant du système réglé est une biquadratique rationnelle.

L'exemple de la biquadratique rationnelle n'a pas seulement l'intérêt d'un renseignement particulier et négatif au sujet d'une courbe c_4 et d'une courbe c_5. Sa portée est plus grande. C'est le premier pas dans la solution du problème de la représentation des courbes gauches par des matrices.

Nous savons à présent qu'il y a des courbes représentables par l lignes et $l + 1$ colonnes ; qu'il y a des courbes non représentables par l lignes et $l + 1$ colonnes, mais bien par l lignes et $l + 2$ colonnes.

Y a-t-il un troisième *étage* possible ? La question n'est pas résolue jusqu'ici. Mais il n'y a pas d'étage au-dessus du troisième, car, en vertu d'un résultat connu, toute courbe peut être définie par quatre surfaces circonscrites au plus, S, T, U, V, et l'on peut alors écrire par une convention naturelle :

$$\| \mathrm{S} \quad \mathrm{T} \quad \mathrm{U} \quad \mathrm{V} \| = 0.$$

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE (1).

Bambeke (*Charles Van*). Recherches sur certains éléments du mycélium d'*Ithyphallus impudicus* (L). II. Les Glomérules mycéliens. Bruxelles, 1914; extr. in-8° (pp. 280-287 et pl.). **[4 S]**

Bracke (*A.*) et *de Rumer* (*G.*). Nos plantes sauvages comestibles. Bruxelles, 1917; in-18 (31 p.). **[15 S]**

Gautier (*Raoul*). Rapport sur le concours de réglage de chronomètres de l'année 1917. Genève, 1918; in-8° (22 p.). **[1 S]**

Gley (*Eug.*) et *Quinquaud* (*Alf.*). Relations entre les actions vasomotrices et la sécrétion surrénale. I. Mécanisme de l'action vasoconstrictive des nerfs splanchniques. Bruxelles, 1914; extr. in-8° (pp. 299-339). **[3 S]**

Kraïtchik (*M.*). Sur quelques applications de la monographie (théorie des abaques). Bruxelles, 1918; in-8° (57 p., fig.). **[11 S]**

— Titres à revenu fixe (nouveau procédé pratique de calcul). Bruxelles, 1917; in-8° (67 p.). **[7 S)**

Le Brun (*Léon*). Contribution à l'étude des allongements dans les essais des aciers. Bruxelles, 1916; in-8° (18 p.). **[8 S]**

— Contribution à l'étude des courbes de faibles rayons dans les lignes de tramways et calcul s'y rapportant. Bruxelles, 1918; in-8° (86 p., fig.). **[6 S]**

— Contribution à l'étude des efforts supportés par les essieux moteurs et leurs fusées dans les véhicules de tramways et calcul des diamètres. Bruxelles, 1917; in-8° (38 p.). **[10 S]**

Macloskie (*Ch.-H.*) et *Le Brun* (*Léon*). Contribution à l'étude du calage des roues effectué à la presse hydraulique et de l'ambatage des bandages effectué à chaud pour les véhicules des tramways et des chemins de fer. Bruxelles, 1917; in-8° (24 p.). **[9 S]**

Neuberg (*J.*). Note bibliographique. (Savants du jour, Ernest Le Bon). Bruxelles, 1914; extr. in-8° (1 p.). **[16 S]**

Reychler (*A.*). Contribution à l'étude des solutions. Bruxelles, 1916; in-8° (32 p.). **[13 S]**

— Étude sur l'équilibre de dissociation des électrolytes dissous. Bruxelles, 1917; in-8° (23 p). **[14 S]**

Rutot (*A.*). La conception nouvelle de l'univers d'après les données de la science moderne. Bruxelles, 1918; in-32 (86 p.). **[17 S]**

Uccle. Observatoire royal de Belgique. Éphémérides astronomiques pour l'année 1917, 1918, 1919. Bruxelles, 1916-1918; in-16. **[5 S]**

---

(1) Le dépôt à la Bibliothèque des ouvrages nouvellement entrés est annoncé dans le *Bulletin*. (Art. 2 du Règlement de la Bibliothèque de l'Académie.)

Le numéro de classement est indiqué entre crochets.

TABLE DES MATIÈRES

CLASSE DES SCIENCES. — *Séance du 4 janvier 1919.*

Discours de M. Pelseneer, directeur 1
Adresse au Roi 3

Élections.

M. Cesàro élu directeur pour 1919; M. Gravis pour 1920 3

Nécrologie.

Décès de MM. le chevalier Marchal, De Heen, Ch.-J.-P. Francotte, Mourlon, Malaise et Van Bambeke, membres; Metchnikoff, Duhem, Darboux, Chauveau et Gosselet, associés 3
Discours prononcé par M. Pelseneer aux funérailles de M. Van Bambeke . . 4

Correspondance.

Décès de J. Echegaray, président de l'Académie de Madrid. — Félicitations de la Société mathématique de France et du Service géologique du Portugal. — Projet de création d'un Institut international d'anthropologie. — Vœu de l'Académie des sciences du Portugal pour éviter tout contact avec les corporations scientifiques allemandes. — Protestation de l'Université de Gand contre l'œuvre du militarisme prussien. — Hommages d'ouvrages. — Pli cacheté 9

Prix François Deruyts.

M. Struyvaert remplace M. Neuberg comme premier rapporteur 10

Mémoires de concours.

Détruits par les Allemands. 10

Conférence des Académies des sciences interalliées.

Ratification de la délégation de MM. Ch.-J. de la Vallée Poussin, Lecointe et Massart aux sessions de Londres et de Paris 11

Rapports.

Avis verbal de M. Max. Lohest (*Contribution à l'étude des calcites belges*, par H. Buttgenbach. — Impression dans les *Mémoires* in-8° 11

Assemblée générale.

Projet d'une assemblée extraordinaire 12

Discours prononcé aux funérailles de M. Mourlon, par A. Rutot 12

Discours prononcé aux funérailles de M. Malaise, par Em. Marchal 15

Rapport sur la vie académique pendant la période de guerre 1914-1918, par Louis Le Nain, secrétaire 19

COMMISSION ADMINISTRATIVE. — *Extraits des procès-verbaux.* 27

Rapport sur l'état du Palais des Académies après le départ des Allemands (11 planches), par Louis Le Nain 31

Communications et Lectures.

Les variations et leur hérédité chez les Mollusques, par Paul Pelseneer. (Impression dans les *Mémoires* in-8°.) 11

Les relations intellectuelles internationales d'après guerre, par Georges Lecointe et H. de Guchtenaere 37

Compte rendu de la Conférence des Académies des sciences interalliées, tenue à Londres en octobre 1918, par de la Vallée Poussin, Lecointe et Massart . . 49

Compte rendu de la Conférence des Académies des sciences interalliées (deuxième session) *à Paris en novembre 1918,* par de la Vallée Poussin, Lecointe et Massart 63

Courbes algébriques gauches représentables par des matrices, par Modeste Stuyvaert 11, 83

Bulletin bibliographique 91

Le fonds des publications académiques ayant été systématiquement pillé par les Allemands, il ne sera plus possible de donner suite aux demandes de combler les lacunes antérieures à 1919.

◆

15-2-19.

6.493

MAY 10 1920
Acc. No.

ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

BULLETIN

DE LA

CLASSE DES SCIENCES

1919 — Nos 2-3

SMITHSONIAN INSTITUTION
JUN 16 1937
NATIONAL MUSEUM

BRUXELLES
HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE
112, Rue de Louvain, 112

1919

L. & A.
MAY 10 192
Acc. No.

CLASSE DES SCIENCES

Séance du 8 février 1919.

M. **Léon Fredericq**, doyen d'ancienneté, ff. de directeur.

MM. **Louis Le Nain**, membre de la Classe des beaux-arts, secrétaire de la Commission administrative, ff. de secrétaire perpétuel, et **Paul Pelseneer**, ff. de secrétaire de Classe.

Sont présents : MM. Auguste Lameere, Ch.-J. de la Vallée Poussin, Max. Lohest, Frédéric Swarts, Jean Massart, A. Demoulin, A. de Hemptinne, Paul Stroobant, *membres;* Georges Lecointe, Émile Marchal et Modeste Stuyvaert, *correspondants*.

M. Jules Brunfaut, de la Classe des beaux-arts, assiste à la séance.

Se sont excusés : MM. Gravis, vice-directeur, Deruyts, Rutot, Julin, membres, et Verschaffelt, correspondant.

Avant d'aborder l'ordre du jour, M. le Directeur adresse les félicitations de la Classe à M. Bordet, élu membre de la Royal Society de Londres ; à MM. de la Vallée Poussin, Lameere, Lecointe, élus correspondants de l'Académie des sciences de Paris, et à MM. de la Vallée Poussin et Delacre, à qui ont été attribués respectivement les prix de Parville et Binoux de l'Académie des sciences de Paris.

CORRESPONDANCE.

— M. Gravis remercie pour son élection à la dignité de directeur.

— Les Sociétés royales des sciences médicales et naturelles de Bruxelles, d'anthropologie de Bruxelles et d'entomologie de Belgique annoncent qu'elles ont exclu ou vont exclure leurs associés ou correspondants des pays en guerre avec la Belgique.

— MM. Van Aubel, De Donder et Scholl demandent à l'Académie d'accepter le dépôt de plis cachetés. — Adopté.

— M. Jean Massart adresse une circulaire sollicitant le don de documents de guerre au profit des asiles des soldats invalides belges.

— Hommages d'ouvrages :

La constitution de l'anneau des petites planètes (2^e partie), par Paul Stroobant;

Les progrès récents de l'astronomie (VII-1913), par Paul Stroobant ;

Annuaire de l'Observatoire royal de Belgique (1916-1919), présenté par M. Stroobant, avec une note pour le *Bulletin*.

Ces *Annuaires* ont été imprimés pendant l'occupation, mais viennent seulement d'être distribués. A ce propos, M. Lecointe, directeur de l'Observatoire royal, pendant la guerre major d'artillerie à l'armée belge, signale la part importante qu'a prise M. Stroobant à la direction de l'Observatoire pendant l'occupation allemande et annonce sa nomination au poste de directeur adjoint.

M. le Directeur félicite M. Stroobant au nom de la Classe.

Théorie du champ électro magnétique de Maxwell-Lorentz et du champ gravifique d'Ernstein, par Th. De Donder.

— Remerciements.

— Un ouvrage de M. Maurice Lecat est refusé et renvoyé à son auteur.

ÉLECTIONS.

M. Rutot est nommé membre de la Commission administrative pour 1919.

— MM. le Paige, Deruyts, Lagrange, Gilkinet et Fredericq sont élus membres de la Commission des finances pour 1919.

— MM. Gilkinet et Neuberg sont élus délégués de la Classe à la Commission de la Biographie nationale.

— La Classe, à l'unanimité, décrète l'expulsion des associés allemands.

RAPPORTS.

— M. Massart fait rapport sur le mémoire reçu en reponse à la troisième question du concours pour 1914; M. Lameere sera second commissaire pour ce mémoire, en remplacement de M. Van Bambeke, décédé.

— Sur rapports favorables de MM. Swarts et de Hemptinne, les travaux suivants, présentés à la séance de juillet 1914, seront publiés dans le *Bulletin* :

1° *Thermostat pour basses températures*, par Bruylants et Mund;

2° *Nouveau procédé de détermination du poids atomique du tellure*, par Bruylants et Michielsen.

L'origine des phases ventriculaires de l'électrocardiogramme, par J. De Meyer.

Rapport de M. Léon Fredericq.

M. De Meyer part de l'idée que les *phases initiales* Q R S du schéma classique d'Einthoven de l'électrocardiogramme ventriculaire sont seules l'expression du courant d'action lié à la contraction du muscle ventriculaire. La *phase terminale* T serait l'expression d'un courant de déformation du muscle cardiaque. En opérant sur un muscle gastrocnémien de grenouille dans lequel on provoque d'abord une brève contraction, puis une extension passive, on peut recueillir un électrogramme qui reproduit plus ou moins les plans de l'électrocardiogramme ventriculaire. L'auteur y voit une confirmation de son hypothèse.

Je me permets de faire observer que la phase T de l'électrocardiogramme tombe en pleine systole ventriculaire et est entièrement terminée avant que le muscle ventriculaire subisse le relâchement qui marque la fin de la systole. Je fais donc mes réserves au sujet de l'interprétation que l'auteur donne de l'ondulation T.

La reproduction sur un muscle du squelette de phases électriques rappelant celles de l'électrocardiogramme n'en présente pas moins un certain intérêt. Aussi je propose à la Classe d'insérer la note de M. De Meyer dans le *Bulletin* de la séance, ainsi que les trois graphiques qui l'accompagnent.

— M. Stuyvaert rappelle qu'un mémoire couronné dont il est l'auteur a été volé ou détruit par les Allemands qui ont occupé le Palais des Académies. Il pourra reconstituer ce mémoire à l'aide de ses notes et il demande que ce travail puisse paraître dans les publications de l'Académie à son tour d'ancienneté réelle. — Adopté.

COMMUNICATIONS ET LECTURES.

M. Cesàro présente un mémoire : *Contribution à l'étude des minéraux du Vésuve et du Monte Somma; Les minéraux du groupe de la Néphéline.* — Impression dans le recueil des *Mémoires* in-8°.

— M. A. Demoulin fait une communication *Sur la transformation de Guichard et sur les systèmes* K. — Impression au *Bulletin*.

— Un mémoire de M. Damry *Sur la théorie des erreurs d'observations* est soumis à l'appréciation de la Classe. — Il est décidé de surseoir à tout examen de ce travail.

M. le Secrétaire perpétuel ff. rappelle que, d'après les articles 26 et 27 du règlement général de l'Académie, les communications destinées au *Bulletin* ne peuvent pas dépasser une feuille d'impression.

Les nécessités budgétaires et le coût actuel des impressions exigent la stricte observation de ces articles.

En vertu de l'article 18, le *Bulletin* doit être distribué au moins huit jours avant la séance suivante.

Les auteurs sont priés d'apporter la plus grande célérité dans le renvoi des épreuves pour éviter la remise de leur communication à un *Bulletin* suivant.

— Il est décidé que les communications faites pendant les séances officieuses du début de la guerre seront publiées en annexe au *Bulletin*, avec l'indication de la date à laquelle elles ont été présentées.

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE.

Il est décidé de ne pas convoquer d'assemblée générale extraordinaire avant la séance du mois de mai. Celle-ci sera consacrée notamment à terminer le travail de revision des statuts et règlements.

PRIX ET CONCOURS.

Les questions de concours posées pour 1915 sont posées à nouveau pour 1920.

Pour les prix perpétuels, il est décidé que les années de guerre seront considérées comme inexistantes; les périodes seront modifiées en conséquence.

NOTICE POUR L'ANNUAIRE.

M. Lecointe accepte de rédiger la notice sur A. Brialmont.

MOTIONS.

MM. Stroobant, Demoulin, Rutot, Marchal et Bordet demandent de pouvoir faire aux trois Classes une proposition relative à l'extension des prérogatives de l'Académie. — Renvoi à une commission composée de MM. Pelseneer, Swarts et Stroobant.

— M. Pelseneer propose que la Classe vote : *a*) des remerciements à la Commission administrative et à son secrétaire M. Louis Le Nain pour leur gestion pendant la guerre et pour les soins qu'ils ont donnés aux intérêts de l'Académie ; *b*) des félicitations à tout le personnel du secrétariat pour sa conduite digne et patriotique pendant les années d'occupation.

— Adopté à l'unanimité.

NOTE BIBLIOGRAPHIQUE.

J'ai l'honneur de présenter à la Classe des sciences les volumes de l'*Annuaire de l'Observatoire royal de Belgique* pour 1916 et pour 1919.

A la suite d'un échange de vues qui eut lieu au cours de deux réunions du personnel scientifique de l'Observatoire, tenues le 15 et le 18 juin 1914, sous la présidence de M. le directeur Lecointe, il avait été décidé de modifier certaines parties de l'*Annuaire* et de donner un plus grand développement aux définitions et aux notions fondamentales de la science astronomique.

M. Lecointe ayant repris du service dans l'armée belge dès le début de la guerre, j'ai été chargé de la direction de l'Observatoire royal, fonction que j'ai assumée du 11 août 1914 au 23 décembre 1918.

J'ai réalisé le programme arrêté au mois de juin 1914 dans le volume de 1916 (l'*Annuaire* pour 1915 avait paru dès le mois de juillet 1914), et j'ai rédigé dans ce but une série de petits chapitres relatifs à la sphère et aux coordonnées célestes, au Soleil, à la Lune, aux planètes, aux comètes et à l'Univers sidéral. J'ai cherché à rendre cet exposé plus clair et plus attrayant en insérant dans l'*Annuaire* un certain nombre de planches et de figures explicatives.

Dans les tableaux mensuels du Soleil, on a rétabli les données destinées à la réduction des observations physiques de cet astre; dans ceux de la Lune, on a introduit les valeurs des variations de l'ascension droite et de la déclinaison, et la longitude du terminateur.

Parmi les innovations, signalons un tableau fournissant, de dix en dix jours, certaines données relatives au Soleil. On a joint aux indications concernant le cours des planètes, de petites cartes célestes donnant la marche des planètes supérieures pendant l'année. On a ajouté aux tableaux mensuels relatifs à ces astres, leur distance à la Terre et leurs coordonnées héliocentriques.

Les données de l'*Annuaire* sont complétées par un tableau général des phénomènes visibles en 1916, qui indique, dans l'ordre chronologique, toutes les particularités des mouvements célestes et la récapitulation des phénomènes observables dans le cours de l'année. On a ajouté aussi un nouveau tableau donnant les valeurs de la plus grande digression de la Polaire, inséré dans le chapitre relatif au tracé d'une méridienne et qui a été remanié.

On trouvera à la fin de l'ouvrage une notice que j'ai rédigée sur les *Progrès récents de l'astronomie* (année 1913), faisant suite à celles qui ont été publiées sur le même sujet dans les *Annuaires* précédents.

Ce volume a été imprimé en 1915, à l'insu du pouvoir occupant, mais n'a pas été publié à cette époque, car il aurait dû être soumis à la censure établie par nos oppresseurs.

Les *Annuaires* pour 1917, 1918 et 1919 ont été imprimés dans les mêmes conditions pendant mon intérim.

L'*Annuaire* de 1919 a paru avec un certain retard, imputable aux difficultés matérielles, toujours plus grandes, que l'imprimeur a rencontrées durant ces derniers mois.

Les développements qu'avait reçus l'*Annuaire* de 1916 ont été partiellement supprimés dans les volumes de 1917 et de 1919.

Paul Stroobant.

COMMUNICATIONS ET LECTURES

Géométrie infinitésimale. — **Sur la transformation de Guichard et sur les systèmes K,**

par M. A. DEMOULIN, membre de l'Académie.

Ce travail est divisé en trois parties.

Dans la première partie, nous étudions la transformation des surfaces que M. Bianchi (*Rendiconti* de Palerme, 1908) a appelée *transformation asymptotique* et que nous nommerons *transformation de Guichard*.

Dans la deuxième partie, nous faisons connaître quelques propriétés de la transformation de Lie.

En nous appuyant sur les résultats indiqués dans les deux premières parties, nous complétons, dans la troisième partie, l'étude des congruences de cercles que nous avons appelées *systèmes* K et qui ont déjà fait, de notre part, l'objet de trois notes insérées, en 1910, dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences de Paris*.

Première Partie.

Sur la transformation de Guichard.

1. Soient F_1, F_2 les points focaux de la droite génératrice d d'une congruence W, c'est-à-dire telle que la correspondance entre les surfaces (F_1) et (F_2) (*), dans laquelle F_1 et F_2 sont

---

(*) Lorsque les coordonnées d'un point P dépendent de deux paramètres u, v, nous désignons par (P) le lieu du point P et respectivement par (P_u), (P_v) les lignes $v =$ const., $u =$ const. qui passent par ce point.

des points correspondants, ait lieu avec conservation des lignes asymptotiques. Je dirai que les surfaces (F_1) et (F_2) se correspondent dans une *transformation de Guichard* (en abrégé, *transformation G*).

2. Soit Λ le complexe linéaire osculateur de la congruence (d), lieu de d. Les quadriques de Lie des surfaces (F_1), (F_2), relatives aux points F_1, F_2, sont polaires réciproques par rapport à Λ. Elles se coupent dès lors suivant quatre droites.

Soumettons la figure à la transformation de Lie, qui change les droites en sphères. Soient Σ la sphère qui correspond à d et P_1, P_2 ses points caractéristiques. Les surfaces (P_1), (P_2) se correspondent (par définition) dans une transformation de Ribaucour. Aux droites du complexe Λ correspondent les sphères d'un complexe linéaire. Ces sphères coupent sous un angle constant α la sphère σ dont les points caractéristiques sont les foyers du cercle qui coupe orthogonalement Σ aux points P_1, P_2. La sphère Σ appartient évidemment au complexe; de là résulte la valeur de α. A la transformation par polaires réciproques relativement à Λ correspond la transformation de contact T dans laquelle deux éléments correspondants sont des éléments d'une sphère coupant σ sous l'angle α. D'après tout cela, les cyclides de Lie des surfaces (P_1), (P_2), relatives aux points P_1, P_2, se correspondent dans la transformation T et se touchent en quatre points. J'ajoute que ces quatre points sont concycliques.

3. Rappelons un théorème bien connu, dû à M. Bianchi. Si deux surfaces (A_1), (A_2) correspondent à une surface (A_0) dans des transformations G, il y a une infinité simple de surfaces (A) qui correspondent aux surfaces (A_1), (A_2) dans des transformations G. Les points A sont distribués sur la droite d d'intersection des plans tangents aux surfaces (A_1), (A_2). Les plans tangents aux surfaces (A) passent par la droite A_1A_2 ou d'.

Soit (A_3) une quelconque des surfaces (A). Les surfaces (A_0) et (A_3) correspondent à (A_2) dans des transformations G; donc, en vertu du théorème de M. Bianchi, rappelé ci-dessus, il y a une infinité simple de surfaces (A') qui correspondent aux surfaces (A_0) et (A_3) dans les transformations G. Les points A' sont distribués sur la droite d' et les plans tangents aux surfaces (A') passent par d. Il est clair qu'une quelconque des surfaces (A) et une quelconque des surfaces (A') se correspondent dans une transformation G. Nous désignerons par u, v les paramètres des asymptotiques des surfaces (A) et des surfaces (A').

Le rapport anharmonique de quatre points A (ou de quatre points A') est constant. Il suit de là que les tangentes aux courbes (A_u), (A_v), (A'_u), (A'_v) engendrent des demi quadriques. La première et la troisième sont identiques. Soit Q la quadrique à laquelle elles appartiennent. La deuxième et la quatrième sont identiques. Soit Q_1 la quadrique qui les porte.

Les quadriques Q, Q_1 se coupent suivant d, d' et suivant deux autres droites d_1, d'_1. Soient X, Y les intersections de d et des droites d_1, d'_1 et T, Z les intersections de d' et des mêmes droites d_1, d'_1. Lorsque u varie seul, la caractéristique de Q se compose des droites d, d' et de deux autres droites; lorsque v varie seul, la caractéristique de Q_1 se compose des droites d, d' et de deux autres droites. On déduit de là les propriétés suivantes : 1° les plans des angles du quadrilatère XYZT touchent leurs enveloppes aux sommets de ces angles; 2° les quadriques Q, Q_1 admettant X, Y, Z, T comme points caractéristiques (*).

4. Imaginons deux congruences rectilignes qui se correspondent droite par droite et désignons par d, d' deux droites correspondantes. Si trois points A_1, A_2, A_3 de d décrivent des surfaces dont les plans tangents passent par d', tout point A

(*) Les deux premiers paragraphes de ce numéro sont extraits du mémoire auquel l'Académie des sciences de Paris a décerné le prix Bordin en 1911.

de d tel que $(A_1A_2A_3A)$ = const. décrit une surface dont le plan tangent passe par d'. Supposons, en outre, que trois points A'_1, A'_2, A'_3 de d' décrivent des surfaces dont les plans tangents passent par d; alors, d'après ce qui vient d'être dit, tout point A' de d' tel que $(A'_1A'_2A'_3A')$ = const. décrira une surface dont le plan tangent passera par d. Il est clair qu'une quelconque des surfaces (A) et une quelconque des surfaces (A') sont les focales d'une congruence. Ces surfaces se correspondent dans une transformation G. On retrouve ainsi la figure considérée plus haut.

5. Soit XYZT un quadrilatère dépendant de deux paramètres. Supposons que les plans des angles de ce quadrilatère touchent leurs enveloppes aux sommets de ces angles. Si un point appartenant à un des côtés du quadrilatère, à XY, par exemple, décrit une surface dont le plan tangent passe par ZT, le côté XY portera une infinité simple de points A jouissant de la même propriété et le rapport anharmonique de quatre quelconques de ces points sera constant. En outre, le côté ZT portera une infinité simple de points A' décrivant des surfaces dont les plans tangents passeront par XY. Enfin, une surface (A) et une surface (A') se correspondront dans une transformation G. On retrouve donc de nouveau la figure considérée au n° 3.

6. Nous particulariserons cette figure en supposant qu'un point du côté XT décrive une surface dont le plan tangent passe par YZ. Alors, en vertu du théorème du n° 5, la droite XT portera une infinité simple de points B jouissant de cette propriété, et la droite YZ portera une infinité simple de points B' décrivant des surfaces dont les plans tangents passeront par XT. En outre, une surface (B) et une surface (B') se correspondront dans une transformation G. Les asymptotiques des surfaces (B) et des surfaces (B') correspondent à celles des surfaces (A) et des surfaces (A'). Les tangentes aux courbes (B_v) et les tangentes aux courbes (B'_v) engendrent deux demi-quadriques identiques qui appartiennent à Q. Les tangentes aux courbes (B_u) et les tangentes aux courbes (B'_u) engendrent deux demi-quadriques identiques qui appartiennent à Q_1. Dans ce cas, comme dans le cas général, les quadriques Q et Q_1 admettent X, Y, Z, T comme points caractéristiques. En outre, pour chacune d'elles, les quatre autres points caractéristiques sont les sommets d'un quadrilatère formé de génératrices rectilignes.

Soient, pour la surface (X), α, β les paramètres du réseau conjugué qui divise harmoniquement le réseau (u, v) et λ, μ les paramètres du réseau qui divise harmoniquement les réseaux (u, v) et (α, β). Pour chacune des surfaces que nous aurons à considérer, nous appellerons réseau I celui dont les paramètres sont α, β et réseau II celui dont les paramètres sont λ, μ.

Sur la surface (X), les tangentes du réseau I divisent harmoniquement l'angle YXT.

Sur la surface (Z), le réseau I est conjugué et ses tangentes divisent harmoniquement l'angle YZT.

Sur la surface (Y), le réseau II est conjugué et ses tangentes divisent harmoniquement l'angle XYZ.

Sur la surface (T), le réseau II est conjugué et ses tangentes divisent harmoniquement l'angle XTZ.

Sur les surfaces (A), les surfaces (A'), les surfaces (B), les surfaces (B'), les réseaux I et II sont des réseaux conjugués isothermes à invariants ponctuels égaux et à invariants tangentiels égaux (*).

Les congruences engendrées par les droites AB (ou A'B') sont harmoniques au réseau I tracé sur la surface (X) [ou (Z)]. Les

---

(*) Un réseau conjugué peut être : 1° isotherme ; 2° à invariants ponctuels égaux ; 3° à invariants tangentiels égaux. S'il possède deux de ces propriétés, il possède aussi la troisième.

congruences engendrées par les droites BA′ (ou AB′) sont harmoniques au réseau II tracé sur (T) [ou (Y)].

Le plan tangent α à une surface (A) et le plan tangent β à une surface (B) se coupent suivant une droite passant par Z. Les plans focaux de cette droite sont harmoniquement conjugués par rapport aux plans α, β et les développables qu'elle engendre découpent la surface (Z) suivant le réseau I.

7. On peut établir quelques-unes des propriétés que nous venons d'indiquer en s'appuyant sur le théorème suivant. Supposons que deux surfaces (M), (M′) se correspondent point par point et désignons par M, M′ deux points correspondants. A toute tangente de (M) correspond une tangente de (M′). Soient (t_1, t'_1), (t_2, t'_2) deux couples de tangentes correspondantes. Pour que les droites t_1, t_2 soient coupées respectivement par les droites t'_2, t'_1, il faut que les foyers de la droite MM′ soient harmoniquement conjugués par rapport aux points M, M′. Si cette condition est vérifiée, les plans menés par MM′ et par deux tangentes correspondantes quelconques seront harmoniquement conjugués par rapport aux plans focaux de la droite MM′. Ce théorème est une généralisation de la proposition que M. Darboux, notre maître très regretté, a fait connaître au n° 893 de ses *Leçons sur la théorie des surfaces*. Il conduit facilement à plusieurs propriétés des réseaux conjugués qui se reproduisent après quatre transformations de Laplace.

Deuxième Partie.

Sur la transformation de Lie.

8. Soient d et d' deux droites qui ne se coupent pas. Désignons par m un point quelconque de d, par m' un point quelconque de d', par ω le plan de m et de d', par ω' le plan de m'

et de d. Soient (M, Ω), (M', Ω') les éléments qui correspondent respectivement aux éléments (m, ω), (m', ω') dans la transformation de Lie, qui change les droites en sphères. Si m (ou m') varie, le point M (ou M′) décrit le cercle Γ d'intersection des sphères Σ, Σ' qui correspondent aux droites d, d' et le rapport anharmonique de quatre points M (ou M′) est égal au rapport anharmonique des quatre points m (ou m') qui leur correspondent. Les normales aux éléments (M, Ω) sont les génératrices d'un système d'une quadrique de révolution H dont Γ est un parallèle et dont les foyers sont les centres Φ, Φ' des sphères Σ, Σ'. Les normales aux éléments (M', Ω') sont les génératrices de cette quadrique qui appartiennent à l'autre système. A la droite mm' correspond la sphère contenant les éléments (M, Ω), (M', Ω').

9. Soient X, Y deux points quelconques de d et Z, T deux points quelconques de d'. Désignons par d_1 la droite XT et par d_1' la droite YZ.

En procédant comme plus haut, on peut faire correspondre aux droites d_1, d_1' une quadrique de révolution H_1 admettant comme parallèle l'intersection Γ_1 des sphères Σ_1, Σ_1' qui correspondent à ces droites et comme foyers les centres Φ_1, Φ_1' de ces sphères. Les points Φ_1, Φ_1' appartiennent à la quadrique H et les points Φ, Φ', à la quadrique H_1. Les sphères Σ_1, Σ_1' sont tangentes aux sphères Σ, Σ' ; les points de contact appartiennent à un cercle Γ_2.

On peut disposer des droites d, d' de manière que H soit une quadrique de révolution donnée et Γ, un de ses parallèles, arbitrairement choisi. On peut ensuite disposer des droites d_1, d_1' de manière que Φ_1, Φ_1' coïncident avec deux points donnés.

La quadrique H_1 peut être définie comme il suit. C'est une quadrique de révolution admettant Φ_1, Φ_1' comme foyers et passant par les points Φ, Φ'. Cette définition est indépendante de la considération du cercle Γ. De là cette génération de la quadrique H_1 : soient $\overline{\Sigma}$, $\overline{\Sigma'}$ les sphères de centres Φ, Φ' qui passent par un parallèle variable $\overline{\Gamma}$ de H. Il y a deux sphères $\overline{\Sigma}_1$, $\overline{\Sigma}'_1$ de centres Φ_1, Φ'_1 tangentes aux sphères $\overline{\Sigma}$, $\overline{\Sigma'}$. Leur intersection $\overline{\Gamma}_1$ engendre H_1.

Nous dirons que $\overline{\Gamma}$ et $\overline{\Gamma}_1$ sont deux parallèles correspondants. Si $\overline{\Gamma}$ coïncide avec Γ, $\overline{\Gamma}_1$ coïncidera avec Γ_1. Les parallèles $\overline{\Gamma}$, $\overline{\Gamma}_1$ ont entre eux les relations suivantes. La sphère $\overline{S}$, inscrite à H suivant $\overline{\Gamma}$, coupe la droite $\Phi_1\Phi'_1$ ou a_1 aux foyers $\overline{N}_1$, $\overline{N}'_1$ de $\overline{\Gamma}_1$. De même, la sphère $\overline{S}_1$, inscrite à H_1 suivant $\overline{\Gamma}_1$, coupe $\Phi\Phi'$ aux foyers $\overline{N}$, $\overline{N}'$ de $\overline{\Gamma}$. Deux parallèles de H déterminent sur les génératrices de cette quadrique des segments égaux aux segments déterminés sur les génératrices de H_1 par les parallèles qui leur correspondent.

10. A toute quadrique U passant par les côtés du quadrilatère XYZT correspond, dans la transformation de Lie, une cyclide de Dupin Δ. Soient K, K_1 les coniques, focales l'une de l'autre, qui constituent sa développée. Une d'elles, K, est tracée sur H, l'autre, K_1, est tracée sur H_1. Les points Φ_1, Φ'_1 appartiennent à K et les points Φ, Φ', à K_1. Les points doubles de la cyclide sont les intersections de K et de Γ et les intersections de K_1 et de Γ_1 (*). Si U varie, K_1 engendrera H_1. On a donc ce nouveau mode de génération de H_1 : Par la droite a_1, on mène un plan variable qui coupe H suivant une conique K. Celle des focales de K qui passe par les foyers de H engendre H_1.

Les intersections de K et d'un parallèle quelconque $\overline{\Gamma}$ de H et les intersections de K_1 et du parallèle correspondant $\overline{\Gamma}_1$ de H_1 sont les points doubles d'une cyclide de Dupin parallèle à Δ.

(*) La considération de la cyclide Δ conduit au théorème suivant : On trace sur une quadrique de révolution une conique et un parallèle. Une génératrice variable de la quadrique coupe la conique en A et le parallèle en B. La sphère de centre A et de rayon AB enveloppe la cyclide de Dupin la plus générale.

11. Indiquons encore une relation entre les quadriques H et H_1 : Les cônes menés par un point, parallèlement aux cônes asymptotes de ces quadriques, sont orthogonaux.

12. En procédant comme au n° 8, on peut faire correspondre aux droites XZ et YT une quadrique de révolution H_2 et un de ses parallèles. Celui-ci est le cercle Γ_2 défini plus haut. H_2 contient les côtés du quadrilatère $\Phi\Phi_1\,\Phi'\Phi'_1$. De même, Φ_2, Φ'_2 désignant les foyers de H_2, les côtés des quadrilatères $\Phi_1\Phi_2\,\Phi'_1\Phi'_2$ et $\Phi_2\Phi\,\Phi'_2\Phi'$ appartiennent respectivement aux quadriques H et H_1. On déduit de là le théorème suivant : *Désignons par ijk une permutation quelconque des nombres* 0, 1, 2 *et convenons de remplacer* H_0 *par* H. *Cela posé, la polaire de l'axe de* H_i *par rapport à* H_j *et la polaire de l'axe de* H_j *par rapport à* H_i *coïncident avec l'axe de* H_k.

Troisième Partie.

Sur les systèmes K.

13. Appliquons la transformation de Lie aux théorèmes énoncés au n° 4. En faisant usage de résultats indiqués au n° 8, on obtient les théorèmes suivants :

I. Si trois points P, Q, R d'un cercle Γ qui dépend de deux paramètres décrivent des surfaces dont les normales soient des génératrices de même système d'une quadrique de révolution H admettant Γ comme parallèle, tout point M de Γ tel que (PQRM) = const. décrit une surface dont la normale est une génératrice de H appartenant au même système.

II. Supposons, en outre, que trois points P′, Q′, R′ de Γ décrivent des surfaces dont les normales soient des génératrices de H appartenant à l'autre système. Alors, d'après le théorème précédent, tout point M′ de Γ tel que (P′Q′R′M′) = const. décrira une surface dont la normale sera une génératrice de H appartenant au même système. Il est clair qu'une quelconque des surfaces (M) et une quelconque des surfaces (M') sont les deux nappes d'une enveloppe de sphères. Ces surfaces se correspondent dans une transformation de Ribaucour.

14. Nous avons appelé *systèmes* K (de seconde espèce) les congruences de cercles considérées dans le second de ces théorèmes et nous les avons étudiées dans trois notes insérées dans les *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris* (séances des 3 et 17 janvier et du 7 février 1910) (*). Nous allons indiquer de nouvelles propriétés des systèmes K. Dans l'exposé qui va suivre, nous nous appuierons sur quelques propriétés établies dans la troisième des notes citées.

15. Soient u, v les paramètres des lignes de courbure des surfaces (M) et des surfaces (M'). En appliquant la transformation de Lie à un des résultats énoncés au n° 3, on trouve que les sphères principales des surfaces (M) et des surfaces (M') relatives aux lignes $u =$ const. (ou $v =$ const.) enveloppent une cyclide de Dupin Δ (ou Δ') (**). Soient K, K_1 (ou K', K'_1) les coniques qui constituent la développée de Δ (ou Δ'). Nous supposerons que K (ou K') est celle de ces coniques qui est tracée sur H. En vertu d'une propriété des lignes de courbure, K (ou K') est une partie de la caractéristique de H lorsque u (ou v) varie seul. Les paramètres des développables engendrées par l'axe a de H sont u, v. Soient F, F' les points focaux de a, ces points étant définis de manière que les courbes (F_u) et (F'_v) soient tangentes à la droite a. La partie complémentaire de la caractéris-

---

(*) Dans une lettre qu'il nous a adressée en 1910, postérieurement à la publication de ces notes, M. Guichard nous a fait observer que les systèmes K sont ceux qu'il désigne par la notation 2O.

(**) Nous avons établi ce théorème, par la méthode indiquée dans le texte, dans le mémoire cité dans la note du n° 3.

tique de H, lorsque u (ou v) varie seul, est le parallèle C (ou C′) pour lequel la sphère inscrite à la quadrique suivant ce parallèle a pour centre F (ou F′). D'après cela, les points caractéristiques de H, situés à distance finie, sont les intersections Φ_1, Φ_1' des coniques K et K′, les intersections des courbes K et C′ et les intersections des courbes K′ et C.

16. Sur les génératrices de H, portons, à partir des points M et des points M′, du même côté du plan de Γ, des segments $M\overline{M}$ et des segments $M'\overline{M}'$ égaux à une longueur arbitraire h. Les points $\overline{M}$ et les points $\overline{M}'$ seront distribués sur un parallèle $\overline{\Gamma}$ de H. Ce cercle engendre visiblement un système K. Par suite, lorsque u (ou v) varie seul, $\overline{\Gamma}$ a une enveloppe qu'il touche en deux points $\overline{I}$, $\overline{J}$ (ou $\overline{I}'$, $\overline{J}'$). Soit $\overline{O}_1$ l'intersection des droites $\overline{I}\,\overline{J}$, $\overline{I}'\,\overline{J}'$; les tangentes aux courbes $(\overline{O}_{1u})$, $(\overline{O}_{1v})$ sont respectivement les droites $\overline{I}'\,\overline{J}'$, $\overline{I}\,\overline{J}$. Or, les points $\overline{I}$, $\overline{J}$ appartiennent à K et les points $\overline{I}'$, $\overline{J}'$, à K′; donc les points $\overline{O}_1$ sont distribués sur l'intersection a_1 des plans π_1, π_1' des coniques K, K′. Dès lors, les paramètres des développables engendrées par a_1 sont u, v et les plans focaux de cette droite sont les plans π_1, π_1'.

Soit $\overline{S}$ la sphère inscrite à H suivant $\overline{\Gamma}$. Si u (ou v) varie seul, les plans des caractéristiques des sphères $\overline{S}$ coïncident avec le plan π_1 (ou π_1'); donc 1° toutes ces sphères ont a_1 pour corde de contact; 2° sur la surface $(\overline{O})$ décrite par le centre $\overline{O}$ de $\overline{S}$, le réseau (u, v) est conjugué et les tangentes aux courbes $(\overline{O}_u)$, $(\overline{O}_v)$ sont respectivement orthogonales aux plans π_1, π_1'.

17. Soit $\overline{\Gamma}_1$ le cercle dont les foyers sont les intersections de $\overline{S}$ et de a_1. Lorsque u (ou v) varie seul, $\overline{\Gamma}_1$ a une enveloppe qu'il touche en deux points $\overline{I}_1$, $\overline{J}_1$ (ou $\overline{I}_1'$, $\overline{J}_1'$). Les droites $\overline{I}_1\overline{J}_1$, $\overline{I}_1'\overline{J}_1'$ se coupent au centre $\overline{O}$ de $\overline{S}$ et sont respectivement tangentes aux courbes $(\overline{O}_v)$, $(\overline{O}_u)$.

Lorsque h varie, $\overline{\Gamma}_1$ engendre une quadrique H_1 qui contient les coniques K_1, K'_1 (nos 9 et 10). Les points $\bar{I}'_1$, $\bar{J}'_1$ appartiennent à K_1 et les points $\bar{I}_1$, $\bar{J}_1$, à K'_1; donc, lorsque u varie seul, la caractéristique de H_1 se compose de K'_1 et d'un cercle et, lorsque v varie seul, la caractéristique de H_1 se compose de K_1 et d'un cercle. Parmi les six points caractéristiques de H_1, situés à distance finie, figurent les foyers Φ, Φ' de H.

18. Les sphères Σ, Σ' de centres Φ, Φ' qui passent par Γ sont tangentes aux sphères Σ_1, Σ'_1 de centres Φ_1, Φ'_1 qui passent par Γ_1 (n° 9) (*). D'après une propriété établie au n° 3, les quatre points de contact sont des points caractéristiques des sphères auxquelles ils appartiennent. Par suite, les côtés du quadrilatère $\Phi\Phi_1\Phi'\Phi'_1$ engendrent des congruences de normales.

19. Pour que Γ_1 engendre un système K, la quadrique H_1 étant le lieu des normales aux surfaces associées à ce système, il faut et il suffit qu'un point de Γ_1 décrive une surface admettant pour normale une génératrice de H_1. Cette condition peut être remplacée par la suivante : il faut et il suffit que les sphères focales de Γ_1 soient harmoniquement conjuguées par rapport aux sphères Σ_1, Σ'_1.

(*) Le lieu des tangentes isotropes des surfaces (M) et des surfaces (M') passant par les points M et par les points M' se compose des sphères Σ et Σ'.

PHYSICO-CHIMIE. — **Thermostat pour basses températures,**

par P. BRUYLANTS et W. MUND.

La construction de thermostats pour des températures inférieures à zéro degré se heurte dans la pratique à de sérieuses difficultés.

Dans le but de déterminer avec grande exactitude les tensions de vapeur de quelques gaz liquéfiés, nous avons recherché le dispositif le plus avantageux au point de vue de la constance thermique.

Regnault (¹), dans ses déterminations d'ailleurs remarquables, utilise comme bain thermostatique aux basses températures, des mélanges de sel et de glace dont il fait varier la température par addition de solution chaude.

La méthode employée dans plusieurs recherches récentes, considérées comme fort exactes, n'est pas différente en principe. C'est ainsi que Steele, Archibald et Mac Intosch (²) se servent d'un vase de Dewar cylindrique, rempli d'éther agité assez vivement et refroidi par de l'air liquide, tombant goutte à goutte, dans un tube fermé à sa partie inférieure plongeant dans le bain d'éther.

O. Brill (³), dans son étude des tensions de vapeur de l'ammoniaque, emploie le même dispositif.

On peut obtenir de la sorte des températures constantes

(¹) *Mém. de l'Acad.*, t. XXVI, p. 535.
(²) *Zeitsch. für Phys. Chem.*, t LV, p. 129.
(³) *Wied. Ann.* (4), t. XXI, p. 170.

à 0°2 ou au maximum à 0°1 près pendant quelques minutes. Cette constance est évidemment insuffisante, surtout pour l'étude des parties fortement ascendantes des courbes de tension de vapeur.

Une idée qui devait se présenter naturellement était d'utiliser des transformations physiques se réalisant sous une pression donnée à des températures fixes et constantes. C'est effectivement en opérant dans la vapeur d'un liquide pur, bouillant sous une pression maintenue invariable, que Ramsay et Young (¹) sont arrivés, dans le domaine des hautes températures, à des résultats d'une si haute précision.

Pour des températures inférieures à 0°, il semblait tout indiqué de remplacer le phénomène de l'ébullition par celui de la fusion.

Timmermans (²) applique cette méthode avec succès à l'étude des variations de la densité des liquides avec la température. Les points de fusion de plusieurs liquides organiques qu'il a déterminés, au cours de ce travail, pourront servir de repère thermométrique.

L'inconvénient de ce mode opératoire réside dans l'influence si considérable qu'exerce sur le point de fusion la présence d'impuretés même en proportion infime. La purification complète des liquides organiques est une opération très longue et laborieuse : elle est cependant indispensable pour obtenir des températures de fusion constantes.

Renonçant alors au mode opératoire de Mac Intosch et Steele comme à celui de Timmermans, celui-ci nous paraissant trop long et trop coûteux, celui-là trop inexact, nous nous sommes adressés à la fusion de mélanges entectiques.

On trouvera dans la liste suivante quelques mélanges faciles

(¹) *Journ. Chem. Soc.*, 1885, p. 640.

(²) *Bull. Soc. chim. de Belgique,* t. XXI, p. 395; t. XXII, p. 417; t. XXIV, p. 640; t. XXV, p. 300.

à préparer et dont les températures de fusion, extraites, pour la plupart, des tables de Landolt, s'échelonnent entre -62° et 0°.

Température de fusion.	Entectique.	Composition.
—	—	—
- 62°	$ZnCl_2$ 4aq + H_2O	104 gr. — 100 gr. H_2O
- 55	$CaCl_2$ 6aq + H_2O	42.5 gr. — 100 »
- 43	HNO_3 3aq + H_2O	46.4 gr. — 100 »
- 38	SO_3 2aq + 1 ag	316.6 gr. — 100 »
- 36°,5	K_2CO_3 naq + H_2O	65.5 gr. — 100 »
- 33,6	$MgCl_2$ 12aq + H_2O	26 gr. — 100 »
- 28	NaBr 5aq + H_2O	67.5 gr. — 100 »
- 26,6	CH_3COOH + H_2O	143.3 gr. — 100 »
- 24	$Cu(NO_3)_2$ 9aq + H_2O	56 gr. — 100 »
- 21,2	NaCl + H_2O	28.9 gr. — 100 »
- 18,5	$NaNO_3$ + H_2O	58.5 gr. — 100 »
- 15,8	NH4Cl + H_2O	22.9 gr. — 100 »
- 13	KBr + H_2O	47 gr. — 100 »
- 11,1	KCl + H_2O	24.6 gr. — 100 »
- 7,8	$BuCl_2$ 2aq + H_2O	29.0 gr. — 100 »
- 5	$MySO_4$ 7aq + H_2O	23.5 gr. — 100 »
- 2,9	KNO_3 + H_2O	12.2 gr. — 100 »

Pour nous assurer de la constance de température que l'on peut obtenir par la fusion de ces entectiques, nous avons congelé la plupart de ceux dont la température de fusion est supérieure à - 39°, autour d'un thermomètre de Beckmann, dont nous avons observé la marche pendant toute la fusion.

Dans le tableau suivant, nous indiquons les temps en minutes correspondant à une variation de température de 0°01 pour les différents entectiques.

Temps en minutes.	Variation de température.	Entectique.
—	—	—
12	0°,01	K_2CO_3 n aq + H_2O
11	»	$MgCl_2$ 12aq + H_2O
20	»	NuBr 5aq + H_2O

9	0°01	$Cu(NO_3)_2$ 9aq + H_2O
10	»	$NaCl + H_2O$
6	»	$NaNO_3 + H_2O$
15	»	$NH_4Cl + H_2O$
4	»	$KBr + H_2O$
10	»	$KCl + H_2O$
11	»	$BaCl_2$ 2aq + H_2O

Le dispositif à réaliser est très simple.

Dans un grand vase de Dewar, rempli d'alcool ou d'éther, refroidi à la température convenable par la neige carbonique, plonge une ampoule cylindrique renfermant l'eutectique. Après solidification complète, on laisse revenir le bain d'alcool ou d'éther à une température légèrement supérieure à la température de fusion. On peut arriver ainsi à une constance thermique remarquable : avec l'eutectique NaBr 5aq + H_2O, on n'a constaté qu'une variation de 0°03 pendant une heure et demie.

On obtient la constance de température la plus parfaite lorsque le mélange totalement congelé, formant un bloc compact, est soumis à une fusion lente.

Des essais analogues ont été pratiqués sur les eutectiques fondant à des températures inférieures au point de congélation du mercure, en se servant d'un thermomètre à hydrogène du type de celui décrit par Travers (¹).

Les mélanges $ZnCl_2$ 4aq + H_2O et SO_3 2aq + 1aq deviennent fort visqueux aux basses températures et présentent au plus haut point le phénomène de surfusion (²). Il est très difficile de les congeler complètement dans le mélange de neige carbonique et d'éther.

Les valeurs absolues des températures, restées constantes, s'écartent souvent très notablement de celles indiquées dans la

---

(¹) *Experimentelle Untersuchung von Gazen.* Braunschweig, 1905, p. 153.

(²) Pour SO_3 5aq, voir Knietsch, B. 34, p. 4100.

littérature; on s'en rendra compte par l'examen du tableau suivant.

Il semble d'ailleurs, d'après une observation de Pictet (1), qu'aux basses températures la partie centrale d'une masse en fusion peut se trouver en équilibre à une température différente du point de fusion normal.

Voici pour quelques entectiques les températures de fusion, déterminées au thermomètre à hydrogène, ainsi que la variation de température pendant environ quatre à cinq minutes.

Entectique.	Température de fusion.	Variation de température pendant cinq minutes.
$HNO_3 3aq + H_2O$	- 42.28	0
»	- 42 25	0
»	- 42 21	0
$K_2CO_3naq + H_2O$	- 36.18	0
»	- 36.07	0
$MgCl_2 12aq + H_2O$	- 34 75	0,04
»	- 34 46	0.02
$HC_2H_3O_2 + H_2O$	- 29.34	0,03
»	- 29.08	0,07
$NaBr 5aq + H_2O$	- 27.21	0
»	- 27.20	0
$Cu NO_3)_2 9aq + H_2O$	- 26.37	0

Les produits qui ont servi à préparer ces entectiques sont des produits commerciaux ordinaires qui n'ont été soumis à aucune purification.

Un désavantage de ce procédé, c'est que les appareils plongeant dans le bain thermostatique ainsi constitué doivent être choisis très résistants, faute de quoi ils peuvent être écrasés pendant la solidification de l'entectique; l'augmentation de volume, résultant de la solidification, semble surtout marquée pour les entectiques dont la température de fusion est supérieure à - 25°.

---

(1) *Comptes rendus*, t. CXIX, pp. 554 et 645.

C'est ainsi qu'à trois reprises différentes l'ampoule du thermomètre à hydrogène a été écrasée pendant la solidification.

Malgré cela, nous croyons que ce dispositif pourra être utile pour la détermination exacte de plusieurs propriétés physico-chimiques à des températures inférieures à zéro degré.

Nous tenons enfin à faire remarquer que dans le procédé décrit ci-dessus la constance de température se trouve atteinte pendant la fusion du mélange entectique et non pas pendant sa congélation comme dans certaines recherches antérieures.

Louvain. Laboratoire de chimie-physique de l'Université.
Juillet 1914.

CHIMIE. — **Nouveau procédé de détermination du poids atomique du tellure,**

par P. BRUYLANTS et J. MICHIELSEN.

Le procédé que nous avons l'honneur de présenter à l'Académie consiste dans l'analyse exacte de l'hydrogène telluré, H_2Te.

Ce gaz se décompose facilement; il est aisé de recueillir le tellure d'une part, l'hydrogène d'autre part, et d'établir le rapport hydrogène-tellure.

Cependant, étant donnée la différence considérable qui existe entre les poids atomiques des deux constituants, la pesée directe de l'hydrogène ne pouvait nous mener à des résultats suffisamment exacts. Dans le but d'augmenter la précision des mesures, l'hydrogène a été transformé en eau par combustion : le procédé revient ainsi à déterminer expérimentalement le rapport tellure-eau et à calculer le rapport tellure-oxygène.

La marche des opérations est la suivante : l'hydrogène telluré pur est amené dans des ampoules à décomposition appropriées tarées; il est ensuite décomposé; l'hydrogène est brûlé sur de l'oxyde cuivrique et l'eau est recueillie dans des tubes à pentoxyde de phosphore tarés.

Nous décrivons successivement la préparation et la purification de l'hydrogène telluré, le remplissage des ampoules, la décomposition et la combustion de l'hydrogène.

PRÉPARATION DE L'HYDROGÈNE TELLURÉ.

La préparation de l'hydrogène telluré est une opération très laborieuse; les manipulations de ce gaz sont très délicates, en raison de son extrême instabilité.

Pour la préparation, nous avons mis en œuvre la plupart des méthodes indiquées dans la littérature.

La méthode de Berzélius, action de l'acide chlorhydrique dilué sur le tellurure de fer, ne donne que des rendements dérisoires ; en raison de la grande masse d'hydrogène qui accompagne l'hydrogène telluré, il est impossible de le condenser dans le mélange réfrigérant de neige carbonique et d'éther.

Le procédé de Berthelot et Fabre (¹), décomposition du tellurure de magnésium, ne nous a pas donné de meilleur résultat.

La méthode de de Forcrand et Fonzes-Deacon (²), si aisée à appliquer dans le cas de la préparation de l'hydrogène sélénié, ne nous a guère fourni de bons résultats non plus. Environ 60 grammes de tellurure d'aluminium, préparés suivant les indications de ces auteurs, traités à l'abri de l'air, dans un appareil en verre complètement soudé, par une solution fraîche d'acide métaphosphorique, nous ont fourni à peine un demi-centimètre cube de gaz liquéfié.

La méthode de Ditte (³) non plus n'est pas applicable dans ce cas; la petite quantité d'hydrogène telluré qui se forme à chaud est noyée dans une trop grande masse d'hydrogène pour pouvoir être condensée.

Nous nous sommes enfin adressés à une méthode proposée par Ernyei (⁴) et qui consiste à électrolyser l'acide sulfurique avec une catode de tellure et une anode de platine, aux environs de — 15°-20°.

Comme la méthode d'Ernyei n'est pas décrite avec beaucoup de détails, nous exposerons rapidement le procédé auquel nous nous sommes arrêtés après quelques tâtonnements.

L'appareil dont nous nous sommes servis est analogue à

(¹) *Ann. Chim. et Phys.*, 1888, t. XIV, p. 104.

(²) *Comptes rendus*, 1902, t. CXXXIV, p. 1209.

(³) *Ann. scient.*, E. Norin (2), t. I, p. 302.

(⁴) *Zeitsch. Anorg. Chem.*, t. XXV, p. 313.

celui de l'auteur. Il est composé d'un tube cylindrique A (fig. 1), de 30 millimètres de diamètre et de 200 millimètres de longueur; les deux extrémités sont étirées en tubes minces que l'on peut fermer par deux bouchons en caoutchouc, dont l'un est traversé par l'anode, fil de platine (1 millimètre de diamètre) enroulé en spirale, et l'autre par la catode, fil de platine soudé à un bâtonnet de tellure de 50 millimètres de long et d'environ 10 millimètres de diamètre.

Les compartiments anodique et catodique sont séparés par un diaphragme de parchemin; celui-ci se fixe facilement dans le tube de la façon que voici : on coupe l'extrémité du col d'un ballon d'un diamètre légèrement inférieur à 30 millimètres; on l'entoure de parchemin souple et on l'introduit à frottement dur dans le tube; on étire ensuite l'extrémité du tube. Une précaution indispensable, comme l'indique Ernyei, est de pratiquer dans le diaphragme une mince fente : sinon, durant l'électrolyse, elle se déchire rapidement.

Au-dessus des compartiments anodique et catodique sont soudés deux tubes de 15 millimètres environ de diamètre; celui du compartiment catodique est soudé à un tube à pentoxyde de phosphore, puis à une ampoule à condensation que l'on peut isoler au moyen de deux bons robinets.

Le tube adducteur du compartiment anodique est surmonté d'un entonnoir à robinet et relié aussi à volonté à une source d'hydrogène pur.

L'électrolyte dont nous nous sommes servis est de l'acide sulfurique à 15 °/₀ en volume. Ernyei préconise l'emploi d'acide à 50 °/₀ : dans ces conditions, par réduction catodique, il se produit une notable quantité d'hydrogène sulfuré; on la diminue beaucoup en réduisant la teneur en acide sulfurique.

Ernyei opère de préférence sous un voltage de 110 ou 220 volts; l'opération se fait bien également avec 50 ou 60 volts : l'intensité du courant varie alors entre 5 et 7 ampères.

MARCHE DE L'EXPÉRIENCE.

On commence par rincer l'appareil séché, au préalable, par de l'hydrogène pur et sec, on introduit l'électrolyte par l'entonnoir à robinet, on ouvre le robinet *r*, permettant l'échappement des gaz anodiques, on refroidit à — 15°-20° en plongeant la cuve électrolytique dans le mélange réfrigérant de glace et de sel marin, on électrolyse et condense le gaz dans l'ampoule, au moyen de neige carbonique et d'éther.

A l'anode, il y a dégagement d'oxygène ozonisé; il faut veiller à ce que l'échappement de ces gaz se fasse normalement, afin qu'ils ne puissent pénétrer dans le compartiment catodique et de là dans le tube à condensation, ce qui compromettrait toute l'opération.

Un désagrément de cette méthode, c'est que le tellure de la catode se désagrège rapidement et vient former bouchon dans le tube d'évacuation; il faut dans ce cas recommencer l'opération.

Nous avons ainsi obtenu, après quatre opérations successives, dont chacune a duré plusieurs heures, environ 7 à 8 grammes d'hydrogène telluré.

PURIFICATION DE L'HYDROGÈNE TELLURÉ.

Le tellure qui nous a servi de catode était du tellure Kahlbaum fondu, qui avait déjà servi à d'autres opérations, mais qui avait été récupéré en traitant la solution chlorhydrique par l'anhydride sulfureux.

Le produit initial renfermait une très minime proportion d'antimoine et un peu de sélénium.

Les gaz qui peuvent prendre naissance avec l'hydrogène telluré, dans la méthode d'Ernyei, sont l'hydrogène sulfuré et l'anhydride sulfureux provenant de réduction catodique et peut-être aussi de petites quantités d'hydrogène sélénié et d'hydrogène antimonié.

L'anhydride sulfureux ne peut coexister avec l'hydrogène telluré et l'oxyde rapidement.

La purification par distillations et sublimations fractionnées doit éliminer facilement l'hydrogène sulfuré et l'hydrogène sélénié (¹) ; en rejetant en forte proportion les produits de tête, on se débarrassera également de l'hydrogène antimonié, si toutefois ce corps s'est produit dans ces conditions.

Les distillations et sublimations ont été faites dans un appareil en verre complètement soudé à trois ampoules (fig. 1). Les dimensions en sont très réduites : le développement complet de l'appareil était d'environ 30 centimètres. Les manomètres sont isolés par des robinets pour éviter le contact continu du gaz et du mercure.

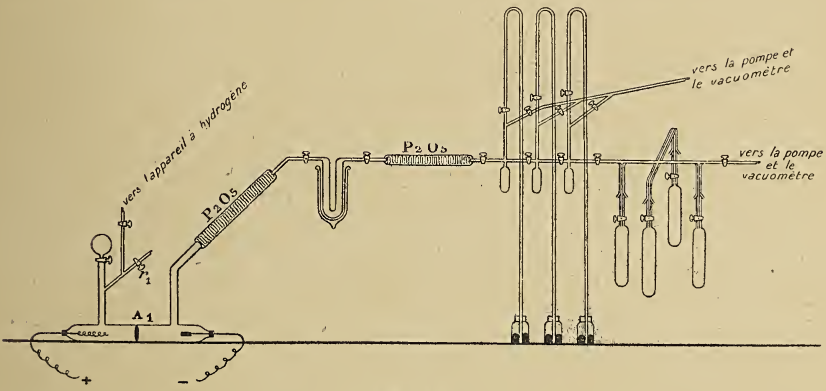

vers l'appareil à hydrogène
P2O5
r1
A1
+
–
P2O5
vers la pompe et le vacuomètre
vers la pompe et le vacuomètre

FIG. 1.

Après avoir éliminé une première fois les produits de tête par distillation, la purification se continue par sublimations.

(¹) Voici les températures d'ébullition de ces gaz :

H_2S — 60.2 H_2Se — 42. SbH_3 — 18° H_2Te — 2°.

Après une distillation et trois sublimations, on a obtenu un produit cristallisé blanc verdâtre, fondant en un liquide très légèrement coloré en jaune, et présentant un bon point triple.

Toutes ces opérations doivent se faire rapidement et à l'abri de la lumière du jour, pour éviter la décomposition du gaz.

REMPLISSAGE DES AMPOULES.

Quatre ampoules cylindriques de 30 millimètres de diamètre environ, dont le volume varie entre 250 et 300 centimètres cubes, munies de grands robinets Geissler et de bons joints rodés, sont adaptées sur la canalisation de l'appareil à purification, au voisinage immédiat de la dernière ampoule à sublimation (fig. 1).

Après les avoir plusieurs fois rincées par un courant d'hydrogène pur et sec, on y fait le vide à $0^{mm}1$ de mercure, au moyen de la pompe à mercure de Goëde; le degré de vide est mesuré au moyen du vacuomètre de Reiff.

Les ampoules sont alors exactement tarées en prenant les précautions habituelles (1).

Elles sont replacées sur la canalisation que l'on vide aussi complètement que possible après deux rinçages à l'hydrogène, puis on fait distiller une certaine quantité de gaz dans chaque ampoule, en les plongeant successivement dans un Dewar de neige carbonique et d'éther.

Ces remplissages doivent se faire rapidement; ils n'ont pas duré dix minutes; ils doivent se faire à l'obscurité, de façon à empêcher la décomposition du gaz.

Durant toutes ces manipulations, la canalisation des ampoules et la dernière partie de l'appareil à sublimer, sont restées parfaitement propres; en aucun point, on n'a pu constater la présence de tellure déposé.

---

(1) Nettoyer les joints rodés à l'éther, essuyer avec un linge humide, laisser reposer une nuit dans la cage de la balance, peser avec contrepoids de même verre et de même volume.

DÉCOMPOSITION DE L'HYDROGÈNE TELLURÉ.

Une ampoule renfermant de l'hydrogène telluré gazeux à la température ordinaire se recouvre immédiatement sur toute sa surface d'un dépôt miroitant de tellure.

D'après les travaux de Becker (¹) et ceux de Brauner (²), il semble cependant que cette décomposition ne soit pas complète à la température ordinaire.

D'après Ditte (³), une élévation de température favoriserait la décomposition, et à 600° environ l'hydrogène telluré se reformerait aux dépens de ses éléments (⁴).

Les ampoules ont été chauffées vers 200°-220° dans un four électrique pendant des temps variables avec la quantité d'hydrogène telluré, et qui se trouvent consignés dans le tableau de nos résultats.

La chauffe s'est faite progressivement, en ne portant d'abord dans le four que l'extrémité de l'ampoule; le miroir de tellure se forme rapidement, surtout sur la partie chauffée; en l'avançant petit à petit dans le four, on peut suivre les progrès de la décomposition.

Après cette opération, les ampoules ont été retarées : la différence de poids donne la quantité d'hydrogène telluré qu'elles renferment.

(¹) BECKER, *Ann.*, t. CLXXX, p. 258.

(²) BRAUNER, *Monatsh. für Chem.*, t. X, p. 416.

(³) DITTE, *Ann. scient. de l'École normale supérieure.*

(⁴) D'après DE FORCRAND et FONZES-DIACON, la décomposition serait intégrale à la température ordinaire en présence de mercure. *Comptes rendus,* t. CXXXIV, p. 1209.

COMBUSTION DE L'HYDROGÈNE.

L'appareil à combustion est représenté dans la figure 2.

L'ampoule qui renferme l'hydrogène et le tellure est fixée à la canalisation par un joint rodé ; un tube en U, à renflements, renferme à sa partie inférieure une goutte de mercure qui obstrue le passage et permet de suivre le dégagement gazeux ; on peut, à volonté, éliminer ce mercure en abaissant suffisamment le réservoir R et en ouvrant le robinet r_1.

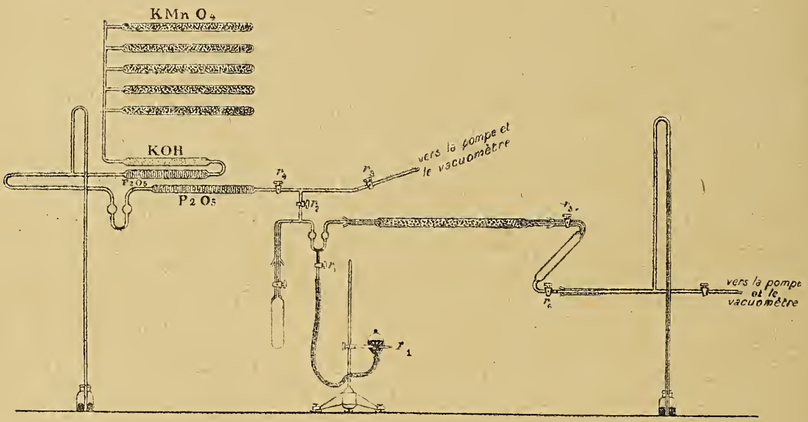

KMn O₄
KOH
P₂O₅
P₂O₅
r₄
r₃
vers la pompe et le vacuomètre
r₂
r₁
r₅
r₆
vers la pompe et le vacuomètre
r₁

FIG. 2.

Un tube à combustion en verre d'Iéna de 80 centimètres de long est relié par deux joints rodés, d'une part au tube en U, d'autre part à un tube à pentoxyde de phosphore muni de grands robinets Geissler ; celui-ci est réuni par un joint rodé à la canalisation de la pompe à mercure et du vacuomètre.

Le tube en verre d'Iéna renferme de l'oxyde cuivrique granulé pur, maintenu aux deux extrémités par un tampon de laine de verre.

L'oxyde cuivrique a été soumis au préalable à cinq oxydations et réductions successives par l'hydrogène pur et par l'oxygène provenant de l'action de la chaleur sur le permanganate potassique. Il est placé dans un four électrique permettant de le porter à des températures variant entre 400° et 550°. La dernière oxydation a été faite aux environs de cette température en faisant passer le courant d'oxygène sec pendant environ trois heures après réoxydation complète.

Un robinet r_2 permet de mettre à volonté l'appareil en communication avec une source d'oxygène ou avec la pompe à mercure et le vacuomètre.

L'appareil à oxygène est constitué d'une série de tubes à permanganate potassique que l'on peut chauffer, d'un tube à potasse caustique en poudre, d'un tube en U à mercure pour vérifier la vitesse du courant gazeux et de deux tubes à pentoxyde de phosphore de 80 centimètres de long.

Le tube à pentoxyde de phosphore faisant suite au tube à oxyde cuivrique, destiné à recueillir l'eau qui se forme dans la combustion, a environ 30 centimètres de longueur ; le pentoxyde y est étalé sur de la laine de verre; on y a fait le vide à $0^{mm}01$ de mercure, puis il a été exactement taré avec un contrepoids de même volume.

La marche de la combustion est très simple : on fait le vide aussi complet que possible dans le tube à combustion porté vers 450°, en tirant par les robinets r_2 et r_3. On ouvre avec précaution le robinet de l'ampoule, de façon que l'hydrogène se dégage très lentement, à travers la goutte de mercure, environ six à huit bulles par minute.

L'eau formée se dépose à l'extrémité froide du tube à oxyde de cuivre; lorsqu'une certaine quantité s'est accumulée, on ouvre quelques minutes le robinet du pentoxyde taré : l'eau y est rapidement absorbée.

Lorsque après quatre, cinq ou six heures, suivant la quantité d'hydrogène des ampoules, le dégagement cesse, on abaisse la goutte de mercure et on fait le vide prudemment jusqu'à $0^{mm}01$, en ouvrant les robinets r_5 et r_6 ; on peut alors fermer définitivement le robinet de l'ampoule.

On porte ensuite la température à 500°-520° et réoxyde le tube à cuivre au moyen d'un courant lent d'oxygène ; l'action de l'oxygène est continuée pendant une heure environ ; finalement on refait le vide dans le tube à oxyde de cuivre à travers le pentoxyde taré. Cette dernière série d'opérations a pour but d'éviter l'erreur provenant du fait, constaté à plusieurs reprises, que l'oxyde de cuivre retient énergiquement certains gaz et que le cuivre peut dans ces conditions former un hydrure (1).

Après l'opération, le pentoxyde et l'ampoule sont rétarés.

RÉSULTATS.

Trois expériences sur quatre ont pu être achevées complètement ; une des ampoules renfermant $1^{gr}2$ d'hydrogène telluré a été brisée dans le cours des opérations.

Le tableau suivant donne les résultats de ces expériences. Dans la première colonne, on a le poids de l'hydrogène telluré ; dans la seconde, celui du tellure ; la troisième, différence des deux premières, donne le poids d'hydrogène direct ; dans la quatrième, on a le poids d'eau recueillie dans le pentoxyde ; dans la cinquième et la sixième, les poids d'hydrogène et d'oxygène correspondant au poids d'eau ; enfin, dans la dernière, la durée de chauffe des ampoules.

Nos	H_2Te (2)	Te	H direct (H_2Te — Te)	H_2O	H de H_2O	O de H_2O	Durée de chauffe.
—	—	—	—	—	—	—	—
1	1,95150	1,91895	0,03255	0,27096	0,03031	0,24065	12 heures
2	0,79827	0,78501	0,01326	0,11078	0,01239	0,09839	6 —
3	0,49887	0,49072	0,00815	0,06945	0,00777	0,06168	3 —

---

(1) LEDUC, *Comptes rendus*, t. CXIII, p. 71. — NOYES, *Journ. Amer. Chem. Soc.*, t. XXIX, p. 17 ; t. XXX, p. 4.

(2) La correction de contraction de l'ampoule par le vide est inférieure à 10^{-5} gr. et peut donc être négligée ici.

On constate donc une différence notable entre les poids d'hydrogène obtenus comme différence des poids H_2Te et Te, et les poids d'hydrogène déduits de la quantité d'eau.

Évidemment la pesée directe de la minime quantité d'hydrogène est très délicate; cependant, les différences sont notablement supérieures aux erreurs de pesée; de plus, elles augmentent presque proportionnellement avec les quantités d'hydrogène telluré, comme le montre le tableau suivant :

Nos	H direct.	H de H_2O	Différences.
1	0,03255	0,03031	0,00224
2	0,01326	0.01239	0.00087
3	0,00815	0,00777	0,00038

Ceci trouve une interprétation très simple en admettant que l'hydrogène telluré n'a pas été décomposé intégralement; une certaine quantité de ce gaz aurait donc été enlevée des ampoules avec l'hydrogène. Ce qui nous porte à le croire, c'est que, dans les deux dernières opérations surtout, nous avons constaté que le mercure du tube en U se ternissait; à son contact, l'hydrogène telluré devait se décomposer en laissant un léger résidu de tellure.

Il faut donc corriger les résultats précédents en ajoutant au poids du tellure la différence des poids de l'hydrogène direct et de l'hydrogène de H_2O. Cette correction n'apporte pas une grande incertitude, étant donnée la différence considérable entre les poids atomiques de l'hydrogène et du tellure.

Dans le tableau suivant, nous donnons le poids du tellure corrigé et le poids d'oxygène, tous deux affectés de la correction de réduction au vide des poids marqués; la troisième colonne donne les poids atomiques du tellure calculés d'après le rapport Te — O.

Nos	Te	O	Poids atomique.
1	1,92094	0,24062	127.73
2	0,78578	0,09838	127.79
3	0,49103	0,06167	127 4

La moyenne des deux premiers résultats donne en chiffre arrondi 127.8. La dernière n'est pas assez précise pour que l'on puisse en tenir compte, le poids de l'hydrogène sous forme d'eau n'étant déterminé qu'à $^1/_{700}$. Pour les deux autres, la concordance est de $^1/_{2\,000}$ environ, ce qui est de l'ordre de l'exactitude des pesées de H_2O.

La valeur 127.8 ne concorde guère avec la plupart des déterminations gravimétriques. Il est intéressant cependant de constater qu'elle se rapproche assez bien de la valeur trouvée par Metzner (127.9) (¹), qui a purifié le tellure par la méthode de Ditte en le transformant en hydrogène telluré.

Nous croyons que la méthode de purification que nous avons employée donne toute garantie au sujet de la pureté du composé telluré qui nous a servi de point de départ.

Des déterminations titrimétriques effectuées dans ce laboratoire, par la méthode de Brauner-Markwald (²), sur de l'anhydride tellureux résultant de la décomposition de l'hydrogène telluré, conduisent également à la valeur 127.8.

Des déterminations plus exactes seront reprises bientôt par une méthode analogue à la précédente, en opérant sur de plus fortes quantités d'hydrogène telluré.

Louvain. Laboratoire de chimie-physique de l'Université.
Juillet 1914.

(¹) Metzner, *Comptes rendus*, t. CXXVI, p. 1719.

(²) Brauner, *Monatshefte für Chem.*, 1899, p. 411. — Markwald et Foïzik, *Ber.*, t. XLIII, p. 1710.

Physiologie. — **L'origine des phases ventriculaires de l'électro-cardiogramme** (reproduction de ces phases dans le muscle strié).

NOTE PRÉLIMINAIRE

par le Dr J. DE MEYER,
Assistant à l'Institut de physiologie (1),
Agrégé à la Faculté de médecine (Bruxelles).

Il nous est impossible, dans cette courte note préliminaire, de discuter, même succinctement, les opinions diverses qui ont été exprimées relativement à l'origine de certaines phases ventriculaires de l'électro-cardiogramme. C'est là un sujet qui nous entraînerait trop loin et que nous réserverons pour un travail *in extenso*. Les auteurs sont généralement d'accord quant à l'origine des phases Q, R et S, et ils ont adopté en ce qui les concerne l'interprétation qu'Einthoven a toujours défendue dans ses travaux devenus classiques. Q est une phase négative produite par la présence de l'onde pulsatile (donc de l'onde négative) au niveau de la pointe; R est l'expression de la systole de toute la base cardiaque (ventricules gauche et droit réunis); S est une petite phase (assez inconstante du reste) qui indique une persistance de contraction un peu plus longue à la région de la pointe. L'opinion de Kraus et Nikolaï et de Lewis, suivant laquelle R serait dû à la contraction du système papillaire, n'est donc pas en opposition absolue avec l'interprétation d'Einthoven.

Mais où les difficultés commencent, — à notre avis tout au moins, — c'est lorsqu'on cherche à expliquer l'origine de la phase T (suivie, comme on sait, d'une phase accessoire désignée par U) ainsi que de la phase isoélectrique qui se trouve entre S et T [phase désignée sous le nom de *t* (Kraus et Nikolaï) ou de Z (De Meyer (¹))]. Einthoven et tous ceux qui après lui se sont occupés d'électro-cardiographie, ont admis que la phase Z (²) — pendant laquelle le fil du galvanomètre revient assez précisément à l'abscisse (c'est là un point sur lequel nous insistons vivement) — se produit pendant le moment où toute la masse des fibres du myocarde (le *Treibwerk* notamment) est en contraction. Les potentiels qui se répandent à ce moment des deux faces du cœur vers les deux électrodes seraient assez strictement égaux : ce qui expliquerait cette courte phase d'isopotentiel et le retour du fil au zéro.

---

(1) Travail du Laboratoire de physiologie de l'Institut Solvay. (Rédaction terminée en juillet 1914.)

Quant à la phase T, elle serait pour Einthoven, Boruttau, Samojloff, Mines l'indice d'un état de contraction plus longue particulièrement à la base du ventricule droit; pour Kraus et Nikolaï, elle proviendrait de la contraction des fibres spirales; pour Eiger, Cybulski, Fano, elle serait l'expression électrique d'un travail nutritif de réparation qui suivrait régulièrement la contraction proprement dite; pour Hoffmann et Seemann, les phases Q, R, S proviendraient de la conduction proprement dite de l'excitation, la phase T au contraire des processus de contraction.

L'accord est bien loin d'exister, comme on voit, entre les auteurs, et les avis relatifs à l'origine de la phase T sont vraiment très opposés. Il est impossible que nous les discutions ici en détail; mais nous pensons cependant que si l'interprétation des

---

(¹) De Meyer, *Les méthodes modernes d'examen du cœur et des vaisseaux. (Méthodes. — Techniques. — Documents graphiques.)* Paris, 1914. J.-B. Baillière et fils.

(²) Nous préférons la lettre Z à *t* pour éviter des confusions possibles avec la grande phase T.

phases Q, R et S s'accorde parfaitement avec ce que l'on sait de la progression de l'influx pulsatile le long du faisceau de His et dans le ventricule, on aperçoit difficilement — en lisant les travaux classiques relatifs à l'électro-cardiographie — à quelle phase spéciale de la systole ventriculaire la phase T est liée. Car Henri Fredericq a bien montré, par l'enregistrement graphique très précis de la contraction de la base et de la pointe du cœur, qu'il n'existe entre la systole de ces deux portions du myocarde qu'un intervalle de temps de quelques centièmes de seconde : comment dès lors concilier cette observation avec le fait qu'entre Q et T s'écoule un espace de temps de plusieurs dixièmes de seconde? Cela nous paraît vraiment très difficile, si pas impossible.

Et dans l'explication de la phase d'isoélectricité Z il existe aussi — à notre sens tout au moins — un fait qui rend l'interprétation classique douteuse. Pour que celle-ci puisse en effet être acceptable, pour qu'à un moment donné les potentiels électriques mis en liberté par le cœur et cheminant vers les membres soient à ce point égaux qu'ils ne fassent pas dévier un instrument aussi sensible qu'un galvanomètre à corde, il importerait que le cœur fût placé absolument au milieu du thorax, exécutât sa systole bien dans l'axe du corps, possédât des parties droite et gauche strictement égales au point de vue de la durée, de la force du travail et de la quantité d'électricité mise en liberté. Rien de pareil n'existe, bien entendu, et nous persistons — malgré notre plus vif désir d'admettre l'interprétation classique — à croire que tout n'est pas dit encore dans l'explication précise des phases Z et T.

Nous en sommes d'autant plus persuadé que nous avons eu l'occasion d'exécuter, dans ces derniers mois, une série d'expériences démontrant que d'autres processus que ceux qui préparent la contraction proprement dite, sont capables de faire naître des forces électromotrices au sein des fibres musculaires. C'est ce qui résulte d'un travail qui sera publié — suivant toutes probabilités — dans les *Archives internationales de physiologie.*

Nous y avons montré, en effet, que dans les muscles striés du squelette, il se produit, — à côté des courants d'action bien connus liés aux phénomènes d'excitation et au travail du système fibrillaire, — cela à chaque déformation un peu appréciable, à chaque allongement ou à chaque détente, des potentiels électriques produisant des courants spéciaux que nous avons désignés pour la clarté sous le nom de courants *de déformation* (comprenant les courants *d'extension* et les courants *de détente*).

Ces courants sont essentiellement différents des courants d'action : en effet, ils n'ont pas de latence, ne possèdent pas le caractère de brièveté des seconds, débutent au moment même de la déformation musculaire et durent autant qu'elle.

Or ces courants se superposent quelquefois aux courants d'action; personne n'ignore, en effet, que les courants d'action des muscles ne sont presque jamais strictement diphasiques (¹). Même quand on a soin de placer les deux électrodes loin du point d'émergence du nerf, — cela pour éviter le résultat d'interférences d'ondes négatives de sens opposés, — on peut encore obtenir, ainsi que nous le montrerons ultérieurement, des courants d'action triphasiques dont la troisième phase est très allongée et paraît due aux phénomènes de déformation dont nous parlions plus haut. En étudiant la littérature électrophysiologique, on constate que les auteurs ont enregistré, à côté des courants d'action vrais, des courants électriques bien différents, beaucoup plus longs, sans caractère diphasique, au sujet desquels aucune interprétation n'a été proposée jusqu'ici.

Et conformément à cela, un très grand nombre d'auteurs

(¹) C'est là un point spécial qui sera examiné très en détail dans un prochain travail.

admettent aussi — à la suite des travaux de Schiff, Bottazzi, Engelmann, Richet, Ioteyko — que la contraction musculaire n'est pas seulement le fait du système fibrillaire, mais qu'il y intervient un élément sarcoplasmique qui peut devenir très important, voire exclusif et prépondérant, dans certains processus de variation de tonus, de fatigue, d'intoxication (vératrine, NH^3, etc.).

Il est évident que toutes ces importantes questions relatives au travail du muscle du squelette devaient se poser en ce qui concerne le travail cardiaque. Le cœur est rangé par les auteurs parmi les muscles rouges riches en sarcoplasme; il contient cependant aussi un riche système de fibrilles; sa contraction s'accompagne de déformations importantes (étirements, détentes, épaississements etc.). En outre, elle présente des phases diverses: *a*) une phase brusque pendant la période de *mise en tension*, constituée par une contraction isométrique qui s'opère donc sans déformation appréciable (¹); elle paraît avoir les caractéristiques d'une contraction musculaire vraie, puisqu'elle est précédée d'un courant d'action (phases Q, R et S de l'EKG) qui chemine le long du myocarde comme le ferait une onde négative le long d'un muscle; *b*) une *phase de détente* qui s'opère isotoniquement (nous ne spécifierons pas à cette place s'il s'agit d'une contraction vraie ou d'une contracture) et qui commence à l'ouverture des sigmoïdes, phase pendant laquelle le myocarde revient sur lui-même (ainsi que l'ont prouvé les recherches pléthysmographiques de de Heer) et maintient une pression d'abord constante à l'intérieur des ventricules (plateau systolique), puis décroissante (début de la phase de descente du cardiogramme); *c*) une *phase d'extension* pen-

---

(¹) Cf. au sujet de la dynamique de la contraction du cœur des mammifères, l'important travail de de Heer, *Pflüger's Archiv*, 1912, CXLVIII; et sur les variations de pression à l'intérieur des cavités cardiaques, Piper, *Archiv f. Phys.*, 1912, p. 343.

dant laquelle les cavités ventriculaires en diastole se laissent distendre par le sang chassé des oreillettes.

La contraction du cœur n'est donc pas une secousse simple; elle constitue en réalité — et c'est là une chose au sujet de laquelle les auteurs ont déjà beaucoup insisté — un processus de contraction fort complexe, qui n'est cependant pas assimilable à un processus tétanique. La question a été envisagée dans tous ses détails par l'école de Fredericq et en particulier par Henri Fredericq (1). Ce dernier a assimilé — mais ce n'est cependant qu'une simple comparaison — la systole cardiaque à la contracture complexe d'un muscle vératrinisé.

S'il en est vraiment ainsi, la réaction électrique du muscle cardiaque doit être également complexe. Si sa contraction est bien semblable à celle d'un muscle vératrinisé, si elle est produite par le travail séparé des fibrilles et du sarcoplasme, si elle est bien réellement accompagnée de déformations musculaires importantes (à ce sujet il ne peut y avoir aucune contestation), ses manifestations électriques doivent être complexes aussi, avoir leur origine dans plusieurs processus physiologiques différents et ne pas consister seulement en un simple courant d'action. Et en effet nous voyons qu'il existe dans la portion ventriculaire de l'EKG deux groupes de phases bien distincts : le premier groupe QRS, le second groupe TU.

Si l'on superpose l'EKG au cardiogramme et au pléthysmogramme du cœur, l'on constate que le groupe QRS précède le travail de mise en tension du myocarde (le sommet S tombe en effet au moment de la fermeture des valvules auriculo-ventriculaires), alors que le groupe TU correspond assez exactement à la phase de diminution de volume (de détente) des ventricules.

Il se passerait donc exactement dans le cœur — au point de vue électrophysiologique — les mêmes phénomènes que dans les muscles striés vératrinisés. **Hoffmann** (¹) a constaté, en effet, que dans de tels muscles (présentant, comme on sait, une très brève phase de contraction séparée assez nettement en général, et suivie d'une longue phase de contracture), la phase de contraction est précédée d'un courant diphasique, alors que la longue phase de contracture est accompagnée d'une déviation électrique de même longueur que la contracture. La phase de contraction (isométrique) dans le cœur donnerait naissance, d'après nous, aux sommets Q, R et S dont l'ensemble constituerait le courant d'action vrai du ventricule, alors que les phases T et U n'auraient d'autre origine que la contracture myocardique pouvant s'exercer librement dès le moment de l'ouverture des valvules sigmoïdes [ouverture qui a lieu, comme on sait, à la fin de la période de mise en tension, et débutant au moment même de la diminution de volume du cœur (de Heer)]. Le courant électrique produisant l'ensemble des phases TU serait donc essentiellement un courant de déformation, de contracture (²), venant se surajouter au vrai courant d'action ventriculaire représenté par les phases Q, R et S.

---

(1) Henri Fredericq, Sur la nature de la systole ventriculaire. (*Arch. intern. de physiol.,* 1911, XI, 253.)

Ce qui nous confirme encore dans cette hypothèse, c'est le fait que nous avons mis en relief dans notre travail sur les muscles striés, à savoir que les courants de déformation ont la même durée que la déformation mécanique qui les produit : or, — ainsi que nous l'avons dit plus haut, — en superposant les phases TU au tracé pléthysmographique du cœur, on constate qu'elles durent exactement le même temps que la phase de diminution de volume du myocarde. Et entre les groupes QRS et TU, il existe une phase désignée par nous par la lettre Z (*t* de Kraus et Nikolaï). Cette phase — souvent beaucoup plus courte qu'elle ne paraît à première vue — constitue dès lors, à notre avis, une

---

(¹) Hoffmann, *Zeitschr. f. Biol.*, 1912, LVII.

(²) Cf. à ce sujet le travail d'électrophysiologie musculaire qui paraîtra (fort probablement) dans les *Archives internationales de physiologie.*

vraie *phase de repos*, marquant le léger intervalle de temps qui s'écoule entre le travail des fibrilles et celui du sarcoplasme. On la retrouve aussi parfois dans les électromyogrammes des muscles vératrinisés (cf. Hoffmann), et on sait qu'elle se montre toujours dans les tracés mécaniques de ces muscles, cela à un certain stade de l'intoxication. Si on ne la retrouve pas dans le tracé mécanique de la systole cardiaque, c'est pour la raison bien simple que la contraction du système fibrillaire du cœur s'opère isométriquement à un moment où les deux systèmes de valvules cardiaques sont encore fermés; cette contraction s'exerce ainsi sur une petite masse de sang absolument incompressible : ce qui rend tout changement de volume impossible (cf. de Heer).

Ces considérations électrophysiologiques sur la nature et l'origine des groupes QRS et TU des phases de l'EKG confirment donc la théorie soutenue par Henri Fredericq, suivant laquelle l'ensemble du travail myocardique ressemble à celui d'un muscle du squelette vératrinisé. Pour parler plus objectivement, nous dirons que cet ensemble est en réalité constitué par deux processus différents de contraction; le premier : processus de contraction vraie, lié au travail des fibrilles; le second : processus de contracture, lié au travail sarcoplasmique.

⁂

Pour vérifier le bien fondé de ces considérations d'une façon plus directe, nous sommes parti de la donnée suivante : S'il existe réellement dans la partie ventriculaire de l'EKG deux groupes de phases, le groupe QRS (représentant un courant d'action vrai) et le groupe TU (représentant un courant de déformation), groupes séparés par un très court espace de temps pendant lequel le cœur ne manifeste pas de potentiel électrique (phase Z), on doit pouvoir reproduire un pareil ensemble de phases dans un muscle du squelette qu'on force à se contracter à peu près de la même façon que le myocarde ventriculaire.

C'est ce que nous avons cherché à réaliser expérimentalement ; et ce sont les premiers résultats de nos recherches que nous voudrions consigner dans cette note préliminaire.

Il importe que nous rappelions que lorsque le ventricule reçoit son influx pulsatile, sa contraction effective est rendue presque impossible par l'occlusion très rapide des valvules auriculo-ventriculaires qui se ferment dès que la pression intra-ventriculaire s'est suffisamment élevée.

La première phase du travail ventriculaire s'opère donc isométriquement. Puis, par suite de la moindre valeur de pression intra-aortique, les sigmoïdes s'ouvrent, le myocarde revient sur lui-même et exécute librement sa phase de retour sur lui-même, donc de diminution de volume (travail qui s'opère isotoniquement).

Pour faire exécuter un travail analogue à un muscle du squelette, nous avons opéré comme suit :

Le muscle *in situ* (¹) était disposé sur l'appareil décrit par nous dans notre travail sur les muscles striés.

Afin d'empêcher le raccourcissement du muscle lors de l'excitation, le fil accroché au tendon passait à travers un œillet (fixé à la planche d'opération) ; au delà de celui-ci, ce fil était fixé au milieu d'une petite tige en métal rigide, s'appuyant contre l'œillet. Le fil maintenait ainsi le muscle légèrement tendu.

Le gastrocnémien excité par le sciatique (détaché et mis à nu) ne pouvait donc pas se raccourcir et devait opérer une contraction isométrique. Celle-ci devait — pour que le travail du cœur pût être imité — être suivie régulièrement d'une phase de déformation. Voici comment elle fut provoquée. Le petit plateau PV (supportant un poids variable entre 50 et 100 grammes) repose sur le fléau d'une petite balance ; au second fléau (portant un poids de 150 grammes) est attaché un fil se réfléchissant sur une poulie et s'attachant à un disque mis en rotation (verticale) au moyen d'une petite manivelle.

(¹) Nous n'avons opéré que sur le gastrocnémien de la grenouille à moelle et cerveau détruits.

Le mouvement de cette manivelle a donc pour effet de soulever et d'abaisser le poids PV, donc d'étirer et de relâcher par conséquent alternativement le gastrocnémien. Or, au disque est fixé un petit plot qui provoque la rupture et la fermeture très rapides d'un courant passant dans une bobine primaire (le secondaire servant à exciter le nerf sciatique) ; ce plot est en outre fixé sur le disque à une place telle que l'excitation se produise à des moments variables, précédant d'un court espace de temps la phase d'étirement du muscle.

Si le disque tourne, le muscle — mis en relation avec deux électrodes impolarisables — présentera donc successivement : 1° une contraction isométrique sous l'influence du choc d'induction (choc qui représentera l'influx pulsatile du myocarde); 2° une courte période de repos (représentant la phase Z) ; 3° une phase de déformation mécanique (représentant l'ensemble des phases suivant l'ouverture des valvules sigmoïdes).

Les variations électriques et mécaniques pouvaient également s'enregistrer simultanément.

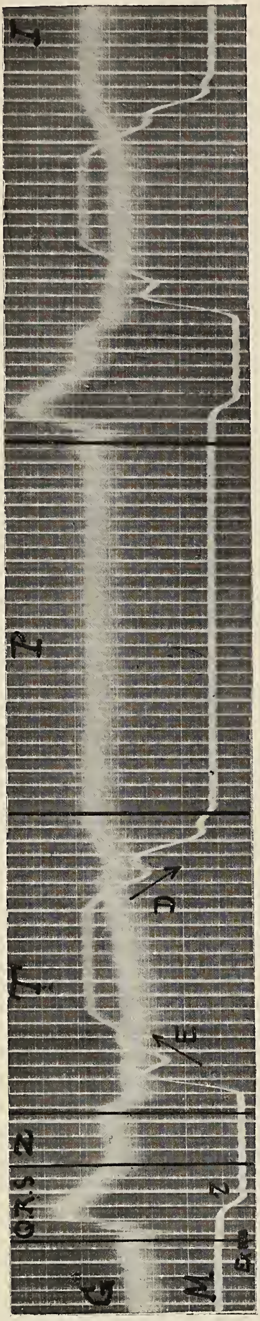
Si notre théorie de l'origine des phases ventriculaires de l'EKG est bien exacte, si QRS est bien réellement un courant d'action séparé par une courte période de repos (Z) d'un courant de déformation TU, il faut absolument que le gastrocnémien (mis dans les conditions de travail que nous avons décrites plus haut) fournisse un ensemble de phases comparables aux phases ventriculaires de l'EKG, c'est-à-dire une oscillation électrique complexe comprenant : 1° un courant d'action vrai (¹) ; 2° une courte phase de repos ; 3° un courant de déformation de même durée que la déformation mécanique du muscle.

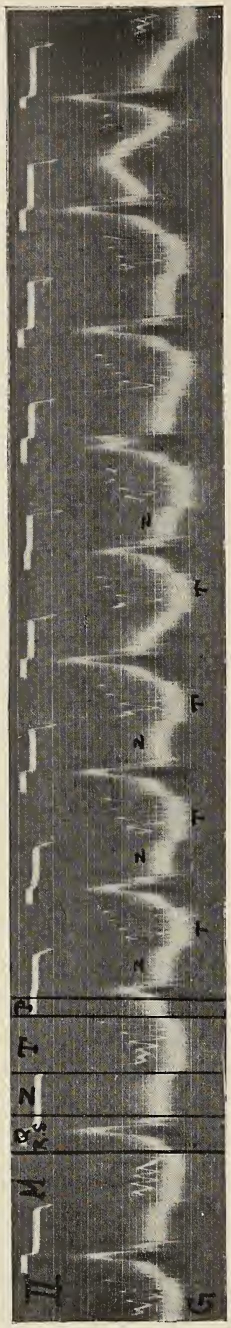
C'est ce que l'expérience a vérifié de façon très nette, ainsi que nous espérons pouvoir le démontrer par l'analyse de quelques figures jointes à ce travail (²).

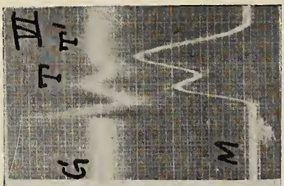
(¹) Il est bien évident que ce courant d'action ne devra pas posséder les trois phases QRS. Celles-ci n'existent en effet que parce que le myocarde ventriculaire constitue en quelque sorte un muscle replié sur lui-même.

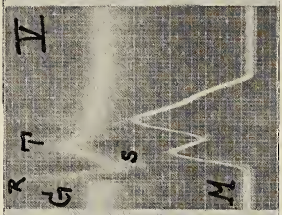
(²) Toutes les figures sont à lire de gauche à droite. Le trait G est produit par les oscillations du fil galvanométrique ; le trait M indique la déformation (étirement et détente) imprimée au muscle. La vitesse d'enregistrement était de 50 millimètres par seconde pour les figures I, III, IV, V et VI ; la figure II est prise à une vitesse de 10 millimètres par seconde.

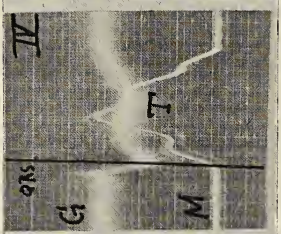
Dr J. DE MEYER, *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique.*
(Classe des sciences), 1919, n° 2.











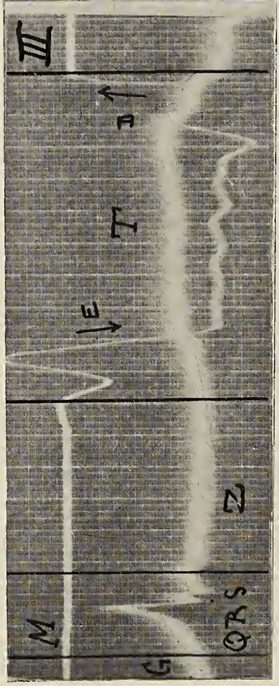


Figure I. En Ex a lieu l'excitation du sciatique. (On a vu plus haut que chaque excitation est en réalité double, en ce sens qu'elle se compose d'un choc de rupture et d'ouverture se suivant à un très court intervalle de temps.) Cette excitation a pour effet de produire : *a*) un très léger raccourcissement musculaire (marqué en Z; ce raccourcissement est dû à une légère faute de technique) ; *b*) un courant d'action complexe, ou mieux un ensemble de deux courants d'action désignés (par analogie avec la notation électro-cardiographique) par les lettres QRS. Ces courants précèdent, ainsi qu'on le voit, le moment exact du début de la contraction (indiquée par Z). Ils sont alors suivis d'une courte phase pendant laquelle le galvanomètre revient au repos (Z). A ce moment, le gastrocnémien subit — ainsi que l'indique le tracé mécanique (M) — un étirement (flèche E) et une détente (flèche D), c'est-à-dire une déformation mécanique, pendant le cours de laquelle se produit une déviation électrique T [1], aussi longue que la déformation mécanique elle-même. Cette phase T est alors suivie d'une pause P. Ce tracé électrique complexe reproduit donc bien les phases principales de la partie ventriculaire de l'EKG.

La *figure II* représente également le courant d'action recueilli dans une autre expérience. L'enregistrement eut lieu à une vitesse de rotation du cylindre de 10 millimètres par seconde. La déformation musculaire est indiquée par la descente du tracé mécanique M. Les phases QRS d'une part, Z et T d'autre part, se marquent avec une extrême netteté. L'expérience est donc absolument comparable à l'expérience I.

La *figure III* est en tout semblable également aux deux précédentes, à part qu'ici le sommet T est — comme dans l'électro-cardiogramme normal — positif. Ajoutons que la positivité ou la négativité à T tient tout simplement à une question de position des électrodes sur le muscle. (Cf. notre travail sur les courants de déformation du muscle.)

La *figure IV* représente un tracé dans lequel la phase de repos Z n'existe pas, par suite d'un avancement dans le temps de la période de déformation. Celle-ci a été déclenchée plus tôt, avant que le courant d'action complexe QRS ne fût terminé. Le groupe T se greffe alors sur le groupe QRS : ce qu'on rencontre fréquemment en électro-cardiographie humaine.

---

[1] Nous obtenons donc ici un sommet T renversé : ce qui est absolument indifférent au point de vue théorique, le renversement de T étant extrêmement fréquent en électro-cardiographie.

La *figure V* représente un courant complexe dans lequel on peut retrouver la phase RS d'une part, et une phase T très semblable à celle des électro-cardiogrammes normaux. La phase Z n'est pas marquée.

La *figure VI* a été obtenue sur le même muscle qui a fourni le tracé V. Mais la phase T s'est dédoublée ici et présente une petite phase accessoire T' : chose qu'on observe aussi quelquefois en électro-cardiographie, où la phase T peut être suivie d'une petite phase U.

Tels sont, brièvement résumés, les résultats de nos expériences. Celles-ci montrent d'abord de façon nette — et c'est là un fait sur lequel nous aurons encore l'occasion de revenir ultérieurement — qu'*un muscle qui se meut présente, outre son courant d'action, d'autres manifestations électriques liées particulièrement aux processus de déformation qu'il subit.*

Puis, elles prouvent aussi que *si l'on fait exécuter à un muscle du squelette un travail complexe (qui reproduit dans ses grandes lignes le travail du myocarde ventriculaire), il se produit aussi un courant électrique complexe dont les phases rappellent nettement celles de la partie ventriculaire de l'*EKG.

En effet, nous sommes parvenu à obtenir dans le gastrocnémien — conformément à ce qui se passe dans l'électro-cardiogramme :

1° Un ensemble de phases rapides désignées par QRS, précédant le début de la contraction. Elles sont assimilables aux vrais sommets QRS de l'EKG qui précèdent aussi le début de la systole ventriculaire ;

2° Une phase de repos Z, semblable à celle qui est en général assez nettement marquée dans l'EKG humain;

3° Une phase T se superposant exactement à la déformation du muscle, homologable à la phase T de l'EKG qui accompagne, comme on sait, la phase de diminution de volume du cœur.

La phase T — et c'est là une conclusion importante en ce qui concerne l'étude de l'électro-cardiogramme — ne fait donc pas partie du « courant d'action » proprement dit du ventricule, elle ne constitue qu'un courant de déformation. Elle paraît liée — mais c'est là une thèse que nous nous réservons d'approfondir plus en détail encore dans des expériences ultérieures — à la contracture sarcoplasmique rendue possible par l'ouverture des valvules sigmoïdes, alors que le courant d'action ventriculaire proprement dit (représenté par l'ensemble des phases QRS) paraît être l'expression du travail isométrique exécuté par le système fibrillaire ou par les processus d'excitation qui l'ont déclenché.

Ce qui nous renforce encore dans cette manière de voir, c'est que dans tous les états pathologiques qui altèrent la contractilité des fibres myocardiques ou bien l'équilibre de la pression sanguine, états qui influent par conséquent sur la façon dont s'exécute la contracture dont nous parlions un peu plus haut (intoxications, saignée, hypertension, excitation pneumogastrique), on constate des irrégularités survenant dans l'allure de la phase T (1). Ces irrégularités consistent en un abaissement, un raccourcissement, un renversement, un dédoublement ou même une disparition totale de cette phase.

Nous ne cacherons pas cependant que si le courant complexe que nous avons obtenu dans le gastrocnémien a l'allure générale de la partie ventriculaire de l'électro-cardiogramme, la ressemblance complète avec ce qui se passe dans le myocarde n'a pas encore pu être réalisée dans les recherches que nous avons faites jusqu'ici; mais des expériences en cours d'exécution nous font entrevoir que nous arriverons bientôt à une analogie plus frappante encore.

Tout d'abord, nous devrons encore modifier notre dispositif expérimental de telle manière que le muscle ne soit excité que par un seul choc d'induction. Deux chocs qui se suivent rapidement produisent deux courants d'action, et un très court état tétanique qui provoque dans les tracés certaines irrégularités.

---

(1) Cf. Kahn, *Ergebnisse der Physiologie*, 1914, XIV.

En outre, dans le cœur, la phase T dure quatre à cinq fois autant que les phases QRS. Nous devrons donc nous efforcer de donner à l'étirement du muscle une durée telle que la phase électrique qui y corresponde soit aussi quatre à cinq fois plus longue que le courant d'action qui l'a précédé.

Ce sont là des perfectionnements de la disposition expérimentale qui n'ajouteront rien à la signification réelle des expériences, mais qui rendront plus analogues et plus directement comparables les courbes recueillies sur le cœur et celles obtenues sur les muscles striés mis dans l'obligation de présenter une courte phase de contraction isométrique suivie d'une longue phase de contraction isotonique.

Chose curieuse cependant, — et à première vue paradoxale, — la phase de réplétion diastolique, de dilatation ventriculaire n'est — apparemment du moins — accompagnée d'aucune oscillation électrique, alors que dans nos expériences sur le gastrocnémien la phase T n'a pu être reproduite que par un étirement musculaire suivi d'une détente.

Ce sont là quelques petites difficultés plus apparentes que réelles, qui tiennent à la texture spéciale du muscle creux et replié sur lui-même que constitue le myocarde, texture dont la complexité introduit forcément dans les expériences — à l'inverse de ce qui se passe dans le gastrocnémien — certains éléments particuliers et en apparence aberrants. Nous nous expliquerons à leur sujet en détail dans notre travail *in extenso*.

Quoi qu'il en soit des perfectionnements que nous devons encore apporter à notre « modus operandi » pour que l'analogie soit complète entre le courant électrique produit par le gastrocnémien (mis dans les conditions spéciales que nous avons décrites) et celui du myocarde ventriculaire, nous terminerons en concluant que *les deux groupes de phases* QRS *d'une part et* TU *de l'électro-cardiogramme sont produits par des processus physiologiques essentiellement différents. Le premier est la manifestation d'un vrai courant d'action; le second est en réalité un* *courant de déformation qui paraît particulièrement lié au travail de contracture sarcoplasmique qui s'exécute dès le moment d'ouverture des valvules sigmoïdes.*

Cette théorie est très différente de la théorie classique. Il est intéressant de constater cependant qu'elle cadre entièrement avec une opinion déjà émise par Seemann (¹).

Nous établirons en détail dans notre travail *in extenso* ce que notre conception de l'origine des phases QRS et T ajoute et précise dans la théorie de Seemann, quels sont les points communs des deux théories, et quel parti l'électro-cardiopathologie serait à même de tirer de cette interprétation nouvelle des deux groupes de phases de l'EKG.

(¹) Seemann, *Zeitschr. f. Biol.*, 1912, LIX, 53.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

De Donder (*Th.*). Sur les équations différentielles du champ gravifique. Amsterdam, 1917; extr. gr. in-8° (4 p.).

— La teneur gravifique. Amsterdam, 1918; extr. gr. in-8° (9 p.).

— Théorie du champ électromagnétique de Maxwell-Lorentz et du champ gravifique d'Einstein. Haarlem, 1917; extr. in-8° (102 p.).

Sternon (*Fernand*). La moisissure grise des jeunes pousses du Lilas. Bruxelles, 1918; gr. in-8° (8 p., fig.).

— Une maladie nouvelle du Dahlia. Bruxelles, 1918; gr. in-8° (6 p., fig.).

Stroobant (*Paul*). La constitution de l'anneau des petites planètes (2e partie). Bruxelles, 1917; extr. in-4° (38 p., fig.).

— Les progrès récents de l'astronomie. Bruxelles, 1915; extr. in-16 (221 p., fig.).

Uccle. Annuaire de l'Observatoire royal de Belgique pour les années 1916 et 1919 (Paul Stroobant); in-16 (548 p., fig., et 209 p.).

CLASSE DES SCIENCES

Séance du 1^er^ mars 1919.

M. **Léon Fredericq**, doyen d'ancienneté, fait fonctions de directeur.

MM. **Louis Le Nain**, secrétaire de la Commission administrative, ff. de secrétaire perpétuel, et A. **Rutot**, ff. de secrétaire de Classe.

Sont présents : MM. Paul Pelseneer, A. Lameere, F. Swarts, Jean Massart, A. Demoulin, A. de Hemptinne, P. Stroobant, *membres ;* J. Verschaffelt, G. Lecointe, E. Marchal, M. Stuyvaert, *correspondants.*

— M. le Directeur annonce que des distinctions ont été accordées à deux membres de la Classe : M. Rutot a reçu le titre de membre honoraire de l' « Anthropological Institute of Great Britain and Ireland » ; la « R. Accademia dei Lincei » de Rome a nommé, en avril 1918, M. Léon Fredericq membre étranger de la Classe des sciences physiques, mathématiques et naturelles. (*Applaudissements.*)

— Le procès-verbal de la dernière séance est lu et approuvé.

M. Stroobant propose l'impression et la distribution aux membres du compte rendu des séances qui paraît au *Moniteur*. — Adopté.

CORRESPONDANCE

Le Secrétariat des commandements du Roi transmet le numéro du *Moniteur* contenant les remerciements de Leurs Majestés à l'occasion de l'adresse envoyée par la Classe.

— M. le Ministre des Sciences et des Arts accuse réception de la lettre par laquelle on lui a transmis en communication la protestation adressée au Gouverneur général allemand par les membres de l'Académie résidant à Bruxelles, au sujet de la déportation des civils. Il félicite les signataires de leur attitude si patriotique et si courageuse.

— Le Conseil international de recherches communique une lettre de MM. D. Peniakoff et Arthur Raffalowich et la réponse qu'il adresse à M. Vevikolaieff, secrétaire général de la Ligue des Russes fidèles à la Patrie et aux Alliances. Le Conseil éprouve une sympathie sincère à l'égard des savants russes et reconnaît les sacrifices que leur pays a fait durant la guerre. Il espère qu'un gouvernement stable s'établira en Russie, qui permettra à l'Académie des sciences de Pétrograd de reprendre son activité si fructueuse. Dès que ce moment sera arrivé, le Conseil international de recherches accueillera sans doute avec bienveillance la proposition de rendre à la Russie sa place aux côtés des autres nations en guerre avec les Empires centraux. — Pris pour notification.

— La Société de physique et d'histoire naturelle de Genève apporte à l'Académie l'expression de ses vives sympathies. « Elle s'associe à la joie de la Belgique restaurée et fait les vœux les plus sincères pour le développement de son activité scientifique sous l'impulsion des énergies accumulées pendant les journées d'épreuves que le pays a si vaillamment endurées, sans compromis ni défaillances. »

— Remerciements.

— La Société royale des sciences de Liége, la Société géologique de Belgique, la Société belge d'électriciens, l'Association des ingénieurs sortis de l'École de Liége, l'Association des diplômés de l'École industrielle de Seraing, le Cercle archéologique du Pays de Waes, la Société verviétoise d'archéologie et d'histoire, la Société belge de géologie, la Société royale de botanique, la Société royale de géographie font connaître qu'elles se rallient aux vœux émis à la Conférence des Académies des sciences interalliées et qu'elles ont rayé les membres ressortissant aux pays belligérants ennemis de la Belgique pendant la guerre actuelle.

— Hommages d'ouvrages :

Annuaire de l'Observatoire royal de Belgique, 1917 et 1918, deux volumes publiés sous la direction de Paul Stroobant ;

Les progrès récents de l'astronomie (juillet 1913), par Paul Stroobant (présentés par M. P. Stroobant, avec une note pour le *Bulletin*).

Études de biologie agricole n^os 1 à 4, publiées par le Ministère des Colonies.

— Remerciements.

RAPPORTS

M. Stroobant présente un travail de M. Th. De Donder : *La gravifique*, et demande l'ouverture d'un pli cacheté déposé par le même auteur le 16 mai 1918, et portant le titre : *La vitesse de l'énergie électromagnétique dans un champ gravifique.* — Le travail et la note seront imprimés dans le *Bulletin* de la séance.

— MM. Nolf et L. Fredericq donnent lecture de leurs rapports sur le mémoire de concours (1914, Sciences naturelles, 4^e question) : *Sur la pulsation cardiaque chez les poissons.* Les rapporteurs sont d'avis que le prix doit être attribué à l'auteur, le D^r Jacques Roskam, de Liége. Un résumé de ce travail ayant déjà paru dans le *Bulletin*, l'impression pourrait être autorisée dans une publication scientifique à choisir.

— Sur avis verbal de M. Stuyvaert, un travail de M. Joseph Binon, intitulé : *Triangométrie,* sera déposé aux archives.

— MM. Gravis et Massart donnent connaissance de leur rapport sur le mémoire soumis en réponse à la 3^e question du concours de 1914 : *Recherches sur les variations numériques des chromosomes dans la série végétale.*

Ils proposent d'accorder le prix et d'imprimer le travail dans le recueil des *Mémoires*.

L'ouverture du billet cacheté fait connaître l'auteur : M. Émile Marchal, correspondant. Les membres de la Classe félicitent leur confrère de ce succès.

CONCOURS ANNUEL DE 1914

Sciences naturelles.

TROISIÈME QUESTION.

On demande des observations originales sur les relations éventuelles existant, chez les êtres vivants, entre les groupements systématiques ou éthologiques et les caractères cytologiques (par exemple : nombre des chromosomes). — Prix : 1000 francs.

Rapport de M. Massart.

Le travail portant comme devise : *Ab infimo ad excelsa*, est envoyé en réponse à la question reproduite ci-dessus.

L'auteur a déterminé le nombre des chromosomes chez soixante-dix-sept espèces de Phanérogames. Jamais personne n'avait fourni une contribution aussi importante. Il s'est surtout appliqué à des groupes bien définis : ainsi il a étudié vingt *Campanula* et sept autres Campanulacées, douze *Crepis* et onze autres Liguliflores, et sept *Primula*.

En outre, il donne la liste systématique complète de toutes les numérations de chromosomes faites avant lui chez les Végétaux. Le tableau montre que tantôt il y a une remarquable constance dans certains groupes, tantôt au contraire les divergences sont considérables : ainsi les diverses espèces de *Campanula* ont, dans les grains de pollen, 8, 10, 13, 17, 34, 51 chromosomes.

L'auteur passe en revue les diverses théories qui ont été émises au sujet du changement du nombre des chromosomes.

Il arrive à la conclusion que l'augmentation du nombre est généralement due à ce que les chromosomes se segmentent transversalement, et que la diminution tient à ce que deux chromosomes restent confondus au lieu de se séparer.

Ce travail, aussi remarquable par la multiplicité des recherches originales que par la clarté de la critique, mérite largement le prix.

Rapport de M. A. Lameere.

Je suis heureux de pouvoir me joindre à mon confrère M. Massart pour proposer à la Classe des sciences de l'Académie de couronner le très intéressant mémoire portant comme devise : *Ab infimo ad excelsa.*

QUATRIÈME QUESTION.

Déterminer par de nouvelles recherches les voies de propagation de la systole à travers les différents étages du cœur. — Prix : 1000 francs.

Rapport de M. Nolf, premier commissaire.

L'auteur du mémoire *Vitam impendere vero* nous apporte une réponse intéressante à la question posée. Il a choisi comme matériel d'études le cœur de l'anguille, qui offre de multiples avantages : la simplicité de sa constitution anatomique, la longue survie de l'organe, la faible vitesse de propagation de l'influx moteur.

Le travail commence par une étude anatomique soignée de l'organe. Il est établi : 1° que la seule voie nerveuse qui unit l'oreillette au ventricule est un tronc porteur de deux ganglions, dont la direction et la situation sont exactement déterminées ;

2° qu'il existe une continuité musculaire large entre ces deux étages du cœur suivant tout le pourtour de la paroi du canal auriculo-ventriculaire.

Passant au fonctionnement, l'auteur fait une série de constatations intéressantes, dont voici les principales :

Le point d'origine de la contraction cardiaque n'est pas constant. Elle naît toujours dans la paroi du sinus veineux, tantôt à la confluence des deux cornes du sinus, tantôt dans la corne droite, tantôt dans la corne gauche. Chez le même animal, la systole débute dans l'une ou l'autre corne, suivant leur état de réplétion. Du sinus, l'onde de contraction s'étend à l'oreillette et ensuite au ventricule.

La destruction du tronc nerveux accolé au canal auriculo-ventriculaire n'empêche en rien cette propagation. Les sections de la paroi musculaire du canal sont aussi sans effet, tant qu'elles sont partielles. Mais la section complète ou l'écrasement sont suivis d'allorythmie.

La compression modérée du canal auriculo-ventriculaire bloque l'onde de contraction sans s'opposer à l'action inhibitrice du pneumogastrique sur le ventricule, ce qui est tout en faveur de la théorie suivant laquelle l'onde de contraction chemine le long d'une voie différente de la voie nerveuse.

L'auteur a pu déterminer la vitesse de propagation de l'onde de contraction dans l'étendue de la musculature du ventricule.

Cette vitesse est variable suivant qu'elle se fait dans le sens de la systole normale ou dans un sens opposé, au cours d'une extrasystole provoquée, d'origine ventriculaire. La vitesse de l'onde antidrome est dans le rapport de $\frac{1}{1,6}$ à la vitesse de l'onde normale.

L'onde normale se propage à raison de $0^{m}1285$ par seconde, vitesse notablement inférieure à celle de l'influx nerveux dans les nerfs moteurs des poissons : $2^{m}5$ à $4^{m}5$ par seconde.

L'ensemble de ces faits plaide nettement en faveur de la théorie myogène de la contraction cardiaque. Le mémoire est une réponse intéressante à la question posée par l'Académie. Le choix du matériel expérimental a été très heureux; l'étude anatomo-physiologique a été faite avec méthode, en parfaite connaissance du sujet et suivant de bons procédés techniques. Grâce à une simplicité des conditions anatomiques et physiologiques beaucoup plus grande que celles qui sont réalisées chez les vertébrés supérieurs, les expériences ont donné des résultats plus nets, laissant moins de place aux objections. Et après lecture du compte rendu des expériences, on est très tenté de se rallier aux conclusions générales de l'auteur, qui sont d'ailleurs l'adaptation au cas particulier du poisson de l'opinion émise par M. Léon Fredericq au sujet de la physiologie du cœur des mammifères.

En conséquence, je propose que le mémoire *Vitam impendere vero* soit imprimé, avec les graphiques et planches qui l'accompagnent, dans le recueil des *Mémoires couronnés de l'Académie* et que le prix de mille francs, institué par la Classe des sciences, soit attribué à son auteur.

M. Fredericq est, comme le premier commissaire, d'avis d'attribuer le prix à l'auteur du mémoire.

NOTE BIBLIOGRAPHIQUE

J'ai présenté à la séance du 8 février dernier les volumes de l'*Annuaire de l'Observatoire royal de Belgique* pour 1916 et 1919.

J'ai l'honneur de remettre aujourd'hui à la Classe les volumes de la même publication relatifs aux années 1917 et 1918.

Les développements qui avaient été donnés au volume de 1916 ont été partiellement supprimés dans l'*Annuaire* de 1917, car lorsque celui-ci a été imprimé, le cours des événements ne nous permettait guère d'espérer la libération du territoire et la faculté de faire paraître cet ouvrage en temps opportun et en dehors du contrôle de la censure allemande.

Le plan de l'*Annuaire* pour 1918 est le même que celui de l'année 1916. Nous avons ajouté deux planches, l'une représentant l'ensemble du système planétaire, l'autre figurant les orbites des planètes intérieures. Les divers chapitres explicatifs concernant le Soleil, la Lune, les planètes et leurs satellites, les comètes et l'Univers sidéral ont été revus et mis à jour.

PAUL STROOBANT.

COMMUNICATIONS ET LECTURES.

Les travaux suivants seront publiés dans le *Bulletin* de la séance :

1° *L'action chimique de l'effluve électrique et la loi de Faraday;* par Alex. de Hemptinne ;

2° *Sur les surfaces dont les lignes de courbure d'un système sont planes ou sphériques et sur les familles de Lamé dont les trajectoires orthogonales sont planes ou sphériques;* par A. Demoulin;

3° *Sur les systèmes* Θ *et sur les systèmes* R; par A. Demoulin.

FONDATION AGATHON DE POTTER.

La Classe discute et approuve le projet de règlement de la Fondation.

Elle prend connaissance des correspondances échangées avec le Gouvernement pour hâter la délivrance du legs à l'Académie.

Un anonyme (devise : *Labor*) soumet un *Cours de trigonométrie rectiligne* et demande s'il ne peut pas être imprimé aux frais de la Fondation.

La Commission ne se prononcera qu'après la remise du capital par le Gouvernement.

ÉCHANGE DE PUBLICATIONS AVEC LES SOCIÉTÉS SAVANTES DES PAYS ENNEMIS.

La Classe décide :

1° De rompre les relations et les échanges de publications avec les sociétés savantes d'Allemagne, d'Autriche, de Hongrie, de Bulgarie et de Turquie;

2° De n'employer que l'intermédiaire des libraires pour se procurer les publications qui seront jugées strictement nécessaires, quels que soient les frais supplémentaires qui en résulteraient;

3° De n'envoyer aucune publication aux savants des nations citées ci-dessus;

4° De refuser et de renvoyer aux sociétés ou aux auteurs les publications qui seraient transmises à l'Académie.

COMMISSION DU CENTENAIRE.

M. le Secrétaire perpétuel ff. annonce que la Commission du Centenaire s'est réunie et que la lecture du rapport sera faite à l'assemblée générale de mai.

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE.

La Classe s'occupe de la rédaction de l'ordre du jour de l'assemblée générale.

Les difficultés éprouvées par les sociétés savantes pour leurs publications par suite de la crise du papier et du renchérissement de la main-d'œuvre font l'objet d'échanges de vues qui seront repris à la prochaine réunion.

CRÉATION DU CONSEIL NATIONAL BELGE DE RECHERCHES

Conformément aux vœux émis par les Conférences des Académies des sciences interalliées, tenues à Londres et à Paris, en 1918, la Classe des sciences de l'Académie royale de Belgique décide de prendre l'initiative de provoquer la création d'un *Conseil national belge de recherches* et de saisir le Gouvernement de cette question.

M. Lecointe dépose un projet de statuts pour le nouvel organisme, précédé d'un exposé des motifs. Ce document, susceptible de servir de base aux discussions sur ce sujet, sera imprimé et envoyé d'urgence à tous les membres de la Classe.

D'autre part, M. Lecointe annonce que le *Conseil international de recherches*, à fonder en vertu de la septième des résolutions votées à Paris, sera vraisemblablement constitué en juillet 1919; il pense que cette importante assemblée constitutive pourra se tenir à Bruxelles, s'il en exprime le désir à ses collègues du Comité exécutif provisoire.

La Classe lui donne le mandat de formuler cette proposition.

COMMUNICATIONS ET LECTURES.

PHYSICO-CHIMIE. — L'action chimique de l'effluve électrique et la loi de Faraday,

par M. A. DE HEMPTINNE, membre de l'Académie.

Les phénomènes de la décomposition des électrolytes liquides régis par les lois de Faraday intéressent à la fois le chimiste et le physicien : le premier, par la relation intime qui existe entre les quantités pondérales des combinaisons et les poids des diverses substances décomposées par une même intensité de courant; le second, par la constance du poids d'une même substance libérée aux électrodes par un courant constant, agissant dans des conditions les plus diverses.

C'est le cas par exemple lorsqu'on opère l'électrolyse dans des cuves disposées en séries contenant soit le même électrolyte à des concentrations différentes, soit des électrodes de dimensions diverses disposées à des distances plus ou moins grandes. Parfois des actions secondaires masquent plus ou moins la loi de Faraday; généralement cependant, on peut les expliquer.

Le passage de l'électricité au travers des gaz se fait par l'intermédiaire de particules électrisées; que se passe-t-il aux électrodes?

Dans le cas de la décharge électrique sous forme d'arc ou d'étincelle, les actions calorifiques jouent un rôle capable de masquer les effets électriques. Pour ce motif, nous limiterons nos recherches à l'étude des effets de l'effluve électrique.

Cette forme du courant exige l'interposition d'un diélectrique solide ; leur usage nécessite l'emploi des courants alternatifs.

Les effets du courant étant symétriques, les mêmes transformations auront lieu aux électrodes ; ces effets ne seront décelables que par des transformations chimiques permanentes. Parmi celles-ci, la fixation de l'hydrogène sur les diélectriques liquides mérite toute notre attention. L'effluve électrique fixe l'hydrogène sur l'acide oléique et le transforme en acide stéarique (1) et en composés de poids moléculaires plus élevés. Les huiles végétales et animales subissent une transformation analogue en relation avec leurs teneurs en corps non saturés. Ces substances sont utilisables à cause de leurs propriétés isolantes et de leur faible volatilité. L'atmosphère gazeuse d'hydrogène dans laquelle on opère reste relativement pure, comme l'a d'ailleurs prouvé l'analyse d'échantillons de gaz prélevés des appareils.

L'oléine commerciale et les corps gras ont une composition complexe ; ce sont des mélanges d'acides gras et de glycérides.

Ce défaut d'uniformité ne présente pas d'inconvénients pour des recherches comparatives, et ces substances présentent l'avantage d'être faciles à obtenir. L'effluve électrique fixe l'hydrogène et produit une diminution de l'indice d'iode des corps non saturés.

L'expérience nous a prouvé que c'est un moyen commode d'apprécier les effets de la décharge.

La première partie de ces recherches est relative à des mesures comparatives d'appareils reliés en série. Elles s'appuient sur l'hypothèse que la même intensité de courant passe dans ces appareils, même lorsqu'ils contiennent des électrodes inégales ou placées à des distances différentes.

L'expérience nous a prouvé l'exactitude de cette hypothèse dans certaines limites. Il ne peut y avoir une trop grande disproportion entre les dimensions des appareils, et il est aussi nécessaire d'opérer avec une effluve d'intensité capable de rendre les gaz suffisamment luminescents.

---

(1) *Bull. Acad. roy. de Belgique*, 1904, p. 550.

INFLUENCE DE LA TENSION A PRESSIONS ÉGALES.

Considérons des cuves électrolytiques contenant le même liquide et des couples d'électrodes de même surface, à des distances différentes. Si ces électrodes sont reliées en série à une source d'énergie électrique, la différence de potentiel des couples variera avec leur distance, mais la même intensité de courant passera dans chaque cuve.

Les effets chimiques aux électrodes de même signe seront les mêmes.

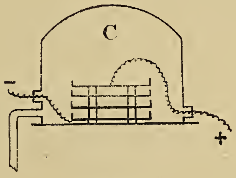


Fig. 1.

Pour les gaz, on réalise une expérience analogue en superposant à l'intérieur d'une cloche en verre C (fig. 1) une série de cuvettes en verre supportées par des isoloirs. Elles sont placées à différentes distances et contiennent une couche mince du liquide sur lequel on veut faire agir l'effluve. La face extérieure de la cuvette inférieure est couverte d'une feuille d'étain B et reliée à l'un des pôles de la source d'énergie électrique dont l'autre pôle est relié à la feuille d'étain A collée sur la surface supérieure de la plaque en verre maintenue à une certaine distance de la couche liquide contenue dans la cuvette supérieure. Nous appelons épaisseur de l'effluve l'espace gazeux compris entre la surface du liquide et le fond de la cuvette placée immédiatement au-dessus. Dans le cas actuel, ce fond et la surface du liquide jouent le rôle d'électrodes. Si toutes les épaisseurs d'effluves sont identiques, le liquide peut être considéré comme soumis à l'action de la même intensité de courant sous la même tension; les effets devront être les mêmes dans chaque cuvette. Dans toutes les recherches qui ont été faites en série, l'expérience nous a prouvé qu'il en était ainsi. Pour des épaisseurs d'effluve différentes, on peut admettre que le liquide contenu dans chaque cuvette subit l'action de la même intensité de courant, mais à des tensions différentes.

Les tableaux suivants résument les résultats des expériences faites avec des cuvettes de 10 centimètres de diamètre contenant respectivement 30 centimètres cubes d'oléine. Dans la première colonne se trouvent inscrites les épaisseurs d'effluves; dans la seconde, les tensions correspondantes à ces épaisseurs; dans la troisième, la variation de l'indice d'iode; dans la quatrième, des chiffres proportionnels à la variation de l'indice d'iode par unité d'énergie.

I. — Pression de l'hydrogène : 200 millimètres; durée de l'expérience : six heures; nature du courant : grande périodicité obtenue par le dispositif de Tesla.

Épaisseur de l'effluve.	Tension en volts.	Variation de l'indice d'iode.	Chiffre proportionnel à la variation de l'indice d'iode par unité d'énergie.
5^{mm}	2,000	12.9	64
8^{mm}	2,700	14.9	51
12^{mm}	3,800	14.2	37

II. — Pression de l'hydrogène : 200 millimètres; durée de l'expérience : quinze heures; courant de Tesla, plus faible que dans l'expérience précédente.

Épaisseur de l'effluve.	Tension en volts.	Variation de l'indice d'iode.	Chiffre proportionnel à la variation de l'indice d'iode par unité d'énergie.
10^{mm}	3,800	9.77	25
18^{mm}	5,400	10.03	20
25^{mm}	7,000	13.65	16

Les tensions inscrites dans la deuxième colonne ont été mesurées au moyen d'un électromètre électrostatique pour chaque épaisseur d'effluve et pour un courant alternatif de 150 périodes comme source d'énergie électrique.

Ces différences de potentiel ne correspondent pas exactement à la chute de potentiel de l'épaisseur de l'effluve, mais comprennent la chute dans le diélectrique et le liquide. Elles n'ont sans doute pas la même valeur pour les courants de très haute périodicité.

Les chiffres ne doivent être considérés qu'à titre d'indication. L'intensité du courant n'a pas été mesurée dans le cas actuel; on peut se passer de cette donnée, puisqu'il s'agit d'expériences comparatives.

Pour simplifier les calculs, nous supposons l'intensité égale à l'unité. Les chiffres de la troisième colonne peuvent donc être pris comme proportionnels à la quantité transformée par unité de courant.

Les résultats des expériences peuvent se résumer comme il suit :

I. — ***Pour des épaisseurs d'effluve qui ne sont pas trop différentes, les quantités transformées par unité de courant sont sensiblement les mêmes.***

II. — ***La quantité transformée tend à croître avec la tension.***

III. — ***Les quantités transformées par unité d'énergie décroissent avec l'épaisseur d'effluve, c'est-à-dire avec la tension.***

Dans certaines limites, ces résultats sont comparables à ceux de l'électrolyse de solutions contenues dans des cuves reliées en série et dont les électrodes sont inégalement distantes.

INFLUENCE DE LA DENSITÉ DU COURANT.

La cloche (fig. 2) contient deux cuvettes de surfaces différentes reliées en série.

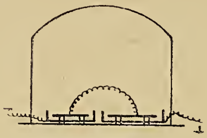


FIG. 2.

La même quantité de courant passe donc par chaque surface, mais la quantité par unité de surface ou densité du courant n'est pas la même.

I. — Action du courant de Tesla pendant sept heures sur de l'huile de baleine; pression du gaz : 210 millimètres.

Surfaces.	Variation de l'indice d'iode.
69cc	3.1
282cc	5.45

II. — Pression du gaz : 260 millimètres; courant de Tesla pendant douze heures.

Surfaces.	Variation de l'indice d'iode.
61.23cc	10.59
114.9cc	10.20

I. — *Pour des densités de courant très différentes, la quantité transformée par unité de courant croît lorsque la densité décroît.*

II. — *Pour des densités de courant qui ne sont pas trop différentes, les quantités transformées par unité de courant sont sensiblement les mêmes.*

Dans certaines limites, les résultats de ces expériences sont analogues à ceux de l'électrolyse dans des cuves reliées en série et contenant des électrodes de différentes surfaces.

INFLUENCE DE LA CONCENTRATION.

Des cuvettes identiques, placées dans des cloches contenant de l'hydrogène à diverses pressions, sont reliées en série.

I. — L'action du courant de Tesla sur de l'huile de baleine a été prolongée pendant dix-sept heures.

Pression du gaz.	Tension en volts.	Variation de l'indice d'iode.	Chiffres proportionnels à la variation de l'indice d'iode par unité d'énergie.
200	2,400	18.06	74
760	4,600	21.26	45

II. — Trois cloches disposées en série; action du courant de Tesla pendant treize heures sur de l'oléine.

Pression du gaz.	Tension en volts.	Variation de l'indice d'iode.
10	1,300	4.56
85	2,200	9.48
155	3,000	12.17

III. — Expérience de contrôle; les trois cloches contiennent du gaz à la même pression.

Pression du gaz.	Tension en volts.	Variation de l'indice d'iode.
160	3,300	8.91
160	3,300	8.29
160	3,300	9.33

IV. — Même expérience que II, mais en utilisant le courant de 150 périodes.

Pression du gaz.	Tension en volts.	Variation de l'indice d'iode.
9	1,250	0.37
84	2,200	1.42
154	3,200	1.77

V. — Expérience faite avec deux dispositifs rotatifs reliés en série.

Pression du gaz.	Tension en volts.	Variation de l'indice d'iode.	$\frac{Q}{i.\,v.}$
210	3,900	11.49	4
710	7,800	11.88	2.2

Nous en donnerons plus loin la description.

Action du courant alternatif : 150 périodes pendant vingt-cinq heures.

VI. — Expérience de contrôle.

Pression du gaz.	Variation de l'indice d'iode.
210	7.70
210	7.70

Lorsque le gaz n'est pas trop raréfié, les quantités transformées par unité de courant sont sensiblement les mêmes pour des pressions très différentes et par suite pour des tensions très différentes. Lorsqu'il y a une différence, la transformation la plus forte correspond toujours à la tension la plus élevée.

La quantité transformée par unité d'énergie décroît lorsque la pression croît.

Dans certaines limites, ces phénomènes correspondent à ceux de l'électrolyse de solutions de concentrations diverses dans des électrolyseurs de dimensions identiques reliés en série.

Dans ce qu'ils ont d'essentiel, les résultats de l'ensemble de ces expériences peuvent se résumer comme il suit :

I. — *Si les conditions où l'on opère ne sont pas trop différentes, les effets obtenus sont sensiblement les mêmes pour une même intensité de courant. En d'autres termes, dans certaines limites, les effets sont proportionnels à l'intensité du courant.*

II. — *Les quantités transformées par unité d'énergie décroissent à mesure que la transformation s'effectue à une pression plus élevée.*

L'analogie de ces lois avec celles de l'électrolyse porte à croire que les transformations chimiques obtenues par l'effluve sont également soumises à la loi de Faraday, c'est-à-dire sont en rapport avec l'équivalent électrochimique des substances fixées ou décomposées. Afin de le vérifier, il importe de mesurer l'énergie électrique dépensée correspondant aux transformations chimiques observées. A cet effet, il est préférable d'opérer sur des quantités importantes de substances, en utilisant des courants facilement mesurables. Dans ce but, nous avons cherché à opérer dans des conditions plus favorables, notamment en soumettant à l'action de l'effluve, non plus une surface liquide plus ou moins immobile, mais une surface sans cesse renouvelée.

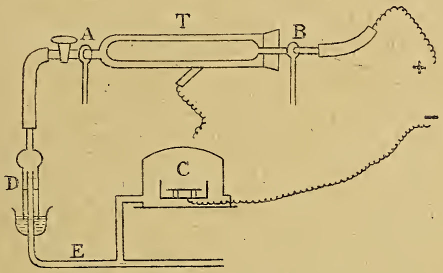


Fig. 3.

Nous croyons utile de décrire d'abord quelques expériences de laboratoire de ce genre, car elles révèlent les inconvénients qu'il importe d'éviter. L'appareil représenté par le schéma figure 3 se compose de deux tubes concentriques respectivement de 160 et 140 centimètres de longueur et de 34 et 29 millimètres de diamètre; l'espace compris entre eux a environ $2^{\text{mm}}5$ d'épaisseur.

Les électrodes sont constituées par le tube intérieur rempli d'une solution saline et par une feuille d'étain collée sur le tube extérieur; un balai la relie à l'un des pôles de la source d'électricité. Tout le système, supporté par deux pièces annulaires A, B, est animé d'un lent mouvement de rotation. Les parois sont ainsi continuellement rincées par le liquide qui le remplit partiellement et qui s'accumule continuellement à la partie inférieure par l'action de la pesanteur. Afin de pouvoir effectuer des recherches comparatives, le tube à effluve T est relié en série avec un appareil à effluve contenu dans la cloche C.

Les deux récipients sont mis en communication permanente par le tube E, qui aboutit à l'intérieur du tube A. Ce dernier a une hauteur de 90 centimètres environ; il plonge dans du mercure, est soutenu par un flotteur, et tourne aisément autour de son axe vertical; il suit le mouvement de rotation du tube en caoutchouc qui le relie au tube T.

On réalise ainsi la même pression gazeuse dans les deux appareils pendant toute la durée de l'expérience et l'on peut observer les variations de pression.

Les dimensions des deux appareils sont choisies de manière à soumettre le liquide à une effluve de même densité de courant. Contrairement à notre attente, la transformation a été plus lente dans le tube T. Les expériences suivantes mettent en lumière la cause de ce résultat.

Si l'on remplace l'huile de baleine par un liquide moins isolant, de l'oléine par exemple, et que l'on emploie le dispositif de Tesla, on ne parvient pas à obtenir de luminescence dans le tube T; une partie notable de l'énergie électrique semble passer par le liquide qui établit un contact avec les deux électrodes. Ce fait se trouve confirmé si l'on place dans une cloche deux cuvettes identiques A, B (fig. 4), de 13 centimètres de diamètre, contenant chacune la même quantité d'huile. Des cuvettes C et D, de 9.8 centimètres de diamètre, forment la seconde paire d'électrodes.

Elles sont reliées en série, comme l'indique la figure; en outre, l'électrode D est reliée à une électrode E, de 2.7 centimètres de diamètre, immédiatement en contact avec le liquide.

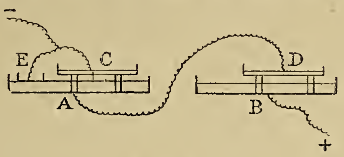


Fig. 4.

L'action du courant de Tesla pendant quatre heures donne :

Variation de l'indice d'iode de l'huile de cristallisation : *A* 6
— — — — : *B* 2.5

Dans A et B, il y a eu la même quantité d'huile soumise à la même surface d'effluve, c'est-à-dire dans les espaces compris entre le liquide et les électrodes identiques C et D. Si la transformation a été sensiblement inférieure dans B que dans A, il faut l'attribuer au contact de E avec le liquide et en conclure à la déperdition d'une partie de l'énergie électrique par ce contact.

Afin d'éviter les inconvénients du tube concentrique T, nous avons opéré avec un dispositif sensiblement différent. Il se compose d'une cuve en porcelaine C (fig. 5), rectangulaire; une partie en est évidée en forme de demi-circonférence dont les parois latérales intérieures sont distantes d'environ 2 centimètres.

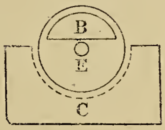


Fig. 5.

Dans cette cuvette en partie remplie de liquide, un disque en verre plonge partiellement; il est mobile autour de son axe E; un petit moteur électrique lui communique un mouvement de rotation dont la vitesse est réglée de manière à obtenir un ruissellement uniforme sur les deux faces du plateau. Le liquide est ainsi soumis à l'action de l'effluve qui passe entre les deux électrodes métalliques A, B, distantes d'environ 6 millimètres des faces du disque. Les dimensions du dispositif ont été réduites de manière à pouvoir les renfermer dans des cloches en verre de 30 centimètres de diamètre.

Nous avons donné précédemment les résultats obtenus au moyen de ces dispositifs. Malgré les avantages qu'ils présentent, nous avons abandonné leur emploi parce que l'usage d'appareils compliqués de dimensions réduites expose à de nombreux accidents. Ceci nous a fait adopter un appareil de grandes dimensions, plus robuste et mieux approprié aux mesures de l'énergie électrique.

Il se compose d'un bâti en fer, mobile autour d'un axe. Ce bâti contient un grand nombre de plaques métalliques très minces, disposées parallèlement les unes aux autres et séparées par des plaques en verre; celles-ci sont maintenues à une distance de quelques millimètres des plaques métalliques. Le dispositif est contenu dans une cuve en tôle ou en fonte fermée hermétiquement (fig. 6).

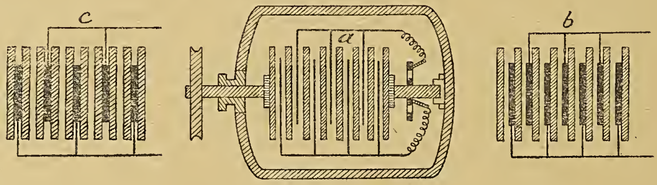


Fig. 6.

Si la cuve est partiellement remplie de liquide et que l'on imprime au bâti un mouvement de rotation, la surface des plaques se recouvre d'une couche mince et mobile de liquide, et cela principalement grâce à des baquets d'arrosage fixés au bâti. Dans ces conditions, si les plaques métalliques de numéro d'ordre impair sont reliées à l'une des bornes d'un alternateur à haute tension et celles de numéro d'ordre pair à l'autre borne, une effluve se produit dans l'espace libre entre les plaques et agit ainsi sur la couche mince et mobile de liquide. On remarquera que dans les dispositifs où l'effluve agit sur une couche de liquide horizontale, la moitié seulement des surfaces couvertes par l'effluve se trouve en contact avec le liquide, tandis que par l'emploi du système rotatif toutes les surfaces couvertes par l'effluve sont en contact avec le liquide, ce qui double le rendement, comme nous l'avons vérifié par des expériences très précises.

Le dispositif rotatif est celui qui nous a toujours donné les meilleurs résultats. L'emploi de plaques fixes arrosées par un moyen quelconque présente de grands inconvénients : on réalise difficilement dans ces conditions une couche mince et uniforme de liquide; en outre, le ruissellement étant toujours plus ou moins irrégulier, il se forme sur les plaques des dépôts solides qui accentuent cet inconvénient.

On peut combiner différents montages des électrodes et des plaques diélectriques. Ils sont représentés schématiquement par les figures *a, b, c*. En *a*, chaque électrode est séparée du diélectrique par un espace gazeux; en *b*, les électrodes sont toujours en contact avec l'une des faces du diélectrique; en *c*, les électrodes sont comprises entre deux diélectriques et en contact avec les plaques; l'espace libre est compris entre deux diélectriques.

Chaque type de montage présente des avantages et des inconvénients qu'une longue pratique peut seule établir et dont l'étude détaillée nous entraînerait trop loin.

Le volume de la cuve était d'environ 1 mètre cube; elle contenait généralement de trente à quarante plaques. Un appareil de cette dimension convient pour le travail de 50 à 100 litres de liquide. Comme source d'énergie électrique, nous avons utilisé un alternateur de 150 périodes de 1,500 volts ampère, dont le courant était transformé à haute tension par un transformateur. Les mesures ont été effectuées au moyen d'un voltmètre et d'un wattmètre placés sur la basse tension, et d'un électromètre électrostatique placé sur la haute tension.

L'utilisation de l'effluve est accompagnée de phénomènes complexes : ils nécessitent quelques mots d'explication. Aussi longtemps que le voltage n'atteint pas une certaine tension, l'ampèremètre seul indique le passage du courant ; le wattmètre n'accuse aucune absorption d'énergie. On n'aperçoit aucune lueur, l'effluve ne passe pas. L'appareil se comporte comme un condensateur. La charge qui lui est communiquée pendant la période croissante du courant alternatif est rendue à l'alternateur pendant la période décroissante.

A partir d'une certaine tension variable avec la pression du gaz, le wattmètre indique brusquement une faible déviation ; elle correspond à l'apparition des lueurs et à la rupture de la cohésion diélectrique du gaz. L'appareil cesse de fonctionner comme condensateur parfait, une partie du courant n'est plus restituée à la machine. L'effluve passe dans l'appareil ; le wattmètre indique la consommation d'énergie correspondante.

A mesure que l'on augmente la tension, l'intensité des lueurs et les indications du wattmètre croissent rapidement ; celles de l'ampèremètre et du voltmètre, relativement faiblement.

L'appareil se comporte comme un condensateur de plus en plus imparfait. Si tout le courant passait par le gaz, l'énergie consommée serait égale au produit $i\nu$ des volts par les ampères ; elle correspondrait aux indications du wattmètre.

Ce produit est toujours supérieur, parce que les indications de l'ampèremètre totalisent le courant à l'aller et au retour ; le wattmètre, au contraire, par sa construction spéciale, n'enregistre que les courants i' qui passent réellement sous forme d'effluve.

Ces phénomènes résultent de ce que l'on appelle le décalage du courant. Le rapport est généralement désigné par $\frac{W}{i\nu} = \cos \varphi$.

Voici quelques exemples de la variation du décalage avec la charge et la pression du gaz.

Pression 760^{mm}.

Charge.	cos φ.
350 watts	0.52
800 watts	0.60

Pression 460^{mm}.

Charge.	cos φ.
480 watts	0.66
630 watts	0.72

Pour des charges sensiblement égales et la pression décroissante :

Pressions.	Watts.	cos φ.
760	700	0.53
560	650	0.65
460	650	0.67
370	580	0.72

Il résulte de ce qui précède qu'au point de vue chimique l'énergie réellement consommée seule nous intéresse et qu'il n'y a lieu de tenir compte que de l'intensité du courant qui passe dans l'appareil, c'est-à-dire non pas celle indiquée par l'ampèremètre, mais celle calculée en tenant compte du voltage et des indications du wattmètre. Les résultats des recherches faites sur de l'huile de baleine sont résumés dans les tableaux suivants. La première colonne indique les pressions du gaz; la deuxième, les tensions; la troisième, l'énergie employée; la quatrième, les intensités vraies en milliampères; la cinquième, les chiffres proportionnels aux variations des indices d'iode rapportés à l'unité de poids et à l'unité de temps; la sixième, les rapports $\frac{Q}{i}$ de ces quantités à la quantité de courant, c'est-à-dire les quantités transformées par unité de courant; la septième, la densité du courant par décimètre carré, c'est-à-dire $\frac{i}{S}$, quotient de l'intensité du courant par la demi-surface totale des électrodes; la huitième, le rapport $\frac{Q}{W}$ de la quantité transformée à l'énergie dépensée, c'est-à-dire la quantité transformée par unité d'énergie; la neuvième, le nombre de litres d'hydrogène absorbés par heure; la dixième, le nombre de coulombs consommés par heure; la onzième, la fraction de litre fixée par coulomb.

L'action du courant a été généralement prolongée pendant vingt-quatre à quarante-huit heures. Il est impossible de maintenir les conditions de l'expérience strictement constantes pendant un temps aussi long; les résultats étant le fruit d'un grand nombre de recherches peuvent cependant être considérés comme suffisamment exacts pour formuler des conclusions.

P.	V.	W.	I.	Q.	$\frac{Q}{i} \times 10$	$\frac{i}{S}$	$\frac{Q}{W}$	L.	Cl	
15	2,000	600	300	25.55	851	0.300	425	»	»	»
25	2,450	420	170	13.86	815	0.156	330	5	612	0.008
31	2,800	1,000	356	27 00	759	0.361	270	»	»	»
31	»	»	»	»	»	»	400	»	460	0.008
42	3 100	500	161	14.00	869	0 170	280	5 5	576	0 009
53	3,600	550	152	14.13	929	0.158	250	3.7	540	0.007
71	4,450	440	98	12.87	1,313	0.081	290	2.8	352	0.008
76	4,700	400	85	10.00	1,176	0 088	250	»	»	»
76	5,000	800	160	14.00	875	0.177	177	»	»	»

I. — *Les quantités transformées par unité de courant sont sensiblement proportionnelles à l'intensité du courant pour des densités de courant qui ne sont pas trop différentes.*

II. — *Les quantités transformées par unité d'énergie décroissent lorsque la pression croît.*

Ces résultats confirment ceux obtenus par la méthode en série.

Un coulomb libère $0^{cc}116$ d'hydrogène électrolytique, ce qui correspond à $1.39.10^{19}$ ions; d'autre part, l'effluve agissant sur de l'hydrogène, en présence d'huile de baleine, un coulomb fixe 8 centimètres cubes d'hydrogène, soit 48.10^{19} molécules ou 48.10^{19} ions du même signe, en admettant chaque molécule décomposée en un ion et un électron.

A première vue, ce résultat semble étrange; on ne comprend pas pourquoi l'effet chimique observé est environ cinquante fois supérieur à celui que l'on calculerait en tenant compte du nombre de coulombs utilisés. Il ne faut cependant pas perdre de vue que dans le cas de l'action de l'effluve sur un liquide, l'action des ions ne se limite pas strictement à la surface, parce qu'un certain nombre de molécules pénètrent au sein de la masse gazeuse et y rencontrent des ions.

Les pages précédentes sont l'exposé très résumé de recherches effectuées avant 1914; elles ont été écrites en 1915. Les circonstances de la guerre ne m'ont pas permis de les publier plus tôt. Elles m'ont amené à étudier des réactions plus simples, à utiliser des corps où toute volatilité peut pratiquement être considérée comme exclue, tels, par exemple, certains oxydes métalliques dont la réduction dans une atmosphère d'hydrogène et par l'intervention de l'effluve électrique s'effectue régulièrement. Dans ce cas, la relation entre les effets chimiques et le nombre de coulombs utilisés est très intime. Je publierai prochainement les résultats de ces recherches, que le défaut de certains appareils et de quelques objets indispensables ne m'a pas permis d'achever complètement pendant la guerre.

Juillet 1915.

GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE. — **Sur les surfaces dont les lignes de courbure d'un système sont planes ou sphériques et sur les familles de Lamé dont les trajectoires orthogonales sont planes ou sphériques,**

par M. A. DEMOULIN, membre de l'Académie.

1. Désignons par (A) et (B) les deux nappes de l'enveloppe d'une famille de sphères à deux paramètres et par A et B les points de contact de ces surfaces avec une sphère quelconque S de la famille. Etablissons entre les surfaces (A) et (B) la correspondance ponctuelle dans laquelle A et B sont deux points correspondants et supposons que cette correspondance ait lieu avec conservation des lignes de courbure (*). Nous dirons que les deux surfaces se correspondent dans une transformation de Ribaucour.

Les tangentes à deux lignes de courbure correspondantes α et β en deux points correspondants A et B se coupent ; donc il existe un cercle, tracé sur S, qui touche les courbes α et β aux points A et B. Or, lorsqu'un cercle dépendant d'un paramètre a une enveloppe qu'il touche en deux points, les cercles osculateurs des deux branches de l'enveloppe en ces points ont deux points communs. Donc les cercles osculateurs des courbes α et β en A et B se coupent en deux points. Nous pouvons dès lors énoncer le théorème suivant :

Si deux surfaces se correspondent dans une transformation

(*) Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'une tangente principale de (A), relative au point A, et une tangente principale de (B), relative au point B, se coupent.

de Ribaucour, les cercles osculateurs de deux lignes de courbure correspondantes en deux points correspondants se coupent en deux points (*).

2. Soumettons un périsphère quelconque (A) à une transformation de Ribaucour et soit (B) la surface obtenue. Désignons par α une ligne de courbure circulaire quelconque de (A) et par β la ligne de courbure de (B) qui lui correspond. D'après le théorème précédent, les cercles osculateurs de β rencontrent α en deux points ; donc β est située sur une sphère passant par α. Ainsi, pour la surface (B), les lignes de courbure d'un système sont sphériques. Ces lignes seront planes si les lignes α sont des droites.

3. Soient (A) et (B) deux systèmes triples orthogonaux qui se correspondent dans une transformation de Ribaucour (**). Désignons par u_1, u_2, u_3 les paramètres des trois familles de surfaces qui composent chacun d'eux et par A et B deux points correspondants. Il existe trois sphères S_1, S_2, S_3 respectivement tangentes en A et en B aux surfaces $u_1 = c^{te}$, $u_2 = c^{te}$, $u_3 = c^{te}$ qui passent par ces points. Soit $i\ k\ l$ une permutation quelconque des nombres 1, 2, 3. Si u_i varie seul, les points A et B décriront des trajectoires orthogonales des surfaces $u_i =$ const. Ces courbes toucheront respectivement aux points A et B le cercle d'intersection des sphères S_k, S_l. Par suite, en vertu d'un théorème invoqué plus haut, leurs cercles osculateurs en ces points se couperont en deux points. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Si deux systèmes triples orthogonaux se correspondent dans

(*) Les lignes principales de l'enveloppe de la famille de sphères la plus générale jouissent de la même propriété. Pour l'établir, il suffit de raisonner comme dans le texte.

(**) Pour la définition de cette transformation, voir G. Darboux, *Leçons sur les systèmes orthogonaux*, 2e édit., n° 215.

une transformation de Ribaucour, les cercles osculateurs de deux trajectoires orthogonales correspondantes en deux points correspondants se coupent en deux points.

4. Soumettons un système triple orthogonal cyclique (A) à une transformation de Ribaucour et soit (B) le système triple orthogonal obtenu. Désignons par α une quelconque des trajectoires orthogonales circulaires contenues dans (A) et par β la trajectoire orthogonale contenue dans (B) qui lui correspond. En vertu du théorème précédent, les cercles osculateurs de β coupent α en deux points; donc β est située sur une sphère passant par α. Ainsi, pour le système (B), une des trois familles de trajectoires orthogonales est formée de courbes sphériques. Ces courbes seront planes si les trajectoires orthogonales α sont des droites.

5. Les considérations précédentes sont extraites du mémoire auquel l'Académie des sciences de Paris a décerné le prix Bordin en 1911. Dans ce mémoire, nous avons fait observer que, vu leur degré de généralité, il était extrêmement probable que les figures obtenues, surfaces et systèmes triples orthogonaux, étaient les plus générales de leur espèce. Nous allons démontrer, par la géométrie, qu'il en est bien ainsi.

6. Soit S une surface dont les lignes de courbure d'un système sont planes ou sphériques (et non circulaires). Désignons ces lignes par la lettre K et par L les lignes de courbure de l'autre système. La sphère (ou le plan) U qui contient une ligne K coupe la surface S sous un certain angle. Supposons qu'un cercle Γ, tracé sur U, engendre, lorsque K varie, un périsphère P coupant cette sphère sous le même angle. Soit A un point quelconque de K. Il y a deux cercles qui touchent K, en A, et Γ. Par un de ces cercles, que nous appellerons C, passe une sphère tangente à S en A et à P au point B où ce cercle touche Γ. La surface S et le périsphère P sont donc les deux nappes d'une enveloppe de sphère. Etablissons entre ces surfaces la correspondance dans laquelle A et B sont deux points correspondants. Les tangentes en A et en B aux lignes de courbure K et Γ se coupent, car ce sont des tangentes de C; par suite, en vertu du théorème énoncé dans la note du n° 1, la surface S et le périsphère P se correspondent dans une transformation de Ribaucour (*).

7. Le cercle osculateur de K au point d'intersection de cette courbe avec une quelconque des lignes L peut jouer le rôle de Γ. Donc, toute surface à lignes de courbure planes ou sphériques dans un système correspond à une infinité de périsphères dans des transformations de Ribaucour.

8. Dans le cas où les lignes de courbure K sont planes, les considérations du n° 6 subsistent lorsque Γ se réduit à une droite *d*. Or, on peut prendre pour *d* la tangente à K, au point d'intersection de cette courbe avec une quelconque des lignes L. Donc, toute surface à lignes de courbure planes dans un système correspond à une infinité de surfaces développables dans des transformations de Ribaucour (**).

9. Soit Ω un système triple orthogonal. Désignons par S_1, S_2, S_3 les surfaces des trois familles qui le composent et sup-

---

(*) Nous avons supposé que K n'est pas un cercle. Dans le cas contraire, le raisonnement subsiste, U désignant une quelconque des sphères passant par K. On est ainsi conduit au théorème suivant : *Si deux cercles tracés sur une sphère, et non tangents, engendrent des périsphères coupant la sphère sous le même angle, ces périsphères se correspondent dans une transformation de Ribaucour.*

(**) Les résultats des n^{os} 7 et 8 conduisent au théorème suivant : *Si l'on connaît les lignes K et une des lignes L, on obtiendra toutes les lignes L sans intégration, si les lignes K sont planes, et au moyen de deux quadratures, si les lignes K sont sphériques.*

posons que les intersections K des surfaces S_2 et des surfaces S_3 soient planes ou sphériques (et non circulaires). Désignons par U la sphère (ou le plan) qui contient K et admettons qu'un cercle Γ, tracé sur cette sphère, engendre, lorsque K varie, un système cyclique satisfaisant aux conditions suivantes : 1° Γ engendre un périsphère Σ_2 ou un périsphère Σ_3 lorsque K engendre une surface S_2 ou une surface S_3 ; 2° les surfaces Σ_2 et S_2 coupent U sous des angles égaux. Désignons par Φ le système orthogonal cyclique dont les lignes de courbure d'un système sont les cercles Γ. Soit A un point quelconque de K. Il y a deux cercles tangents à K, en A, et à Γ. Par un de ces cercles, que nous appellerons C, passe une sphère tangente à S_2 en A et à Σ_2 au point B où ce cercle touche Γ. D'autre part, la sphère orthogonale à C en A et en B est orthogonale à K en A et Γ en B. L'existence de ces deux sphères entraîne celle d'une troisième sphère tangente à S_3 en A et à Σ_3 en B. Concluons de là que les systèmes Ω et Φ se correspondent dans une transformation de Ribaucour, A et B étant deux points correspondants.

10. Le cercle osculateur de K, au point d'intersection de cette courbe avec une quelconque des surfaces S_1 peut jouer le rôle de Γ. Donc, tout système orthogonal à lignes de courbure planes ou sphériques dans un système correspond à une infinité de systèmes orthogonaux cycliques dans des transformations de Ribaucour.

11. Dans le cas où les lignes K sont planes, les considérations du n° 10 subsistent lorsque Γ se réduit à une droite *d*. Or, on peut prendre pour *d* la tangente à K au point d'intersection de cette courbe avec une quelconque des surfaces S_1. Donc, tout système orthogonal à lignes de courbure planes dans un système correspond, dans des transformations de Ribaucour, à une infinité de systèmes orthogonaux à lignes de courbure rectilignes dans un système (*).

12. En rapprochant les résultats établis aux n^{os} 2, 7 et 8, on est conduit aux deux théorèmes suivants :

On obtient la surface la plus générale à lignes de courbure planes (ou sphériques) dans un système en soumettant à la transformation de Ribaucour la plus générale la surface développable la plus générale (ou le périsphère le plus général).

13. En se servant de la transformation de Lie, on déduit de là le théorème suivant :

On obtient la surface la plus générale dont chacune des lignes asymptotiques d'un système appartient par ses tangentes à un complexe linéaire en soumettant la surface réglée la plus générale à la transformation de Guichard la plus générale (**).

14. Le rapprochement des résultats établis aux n^{os} 4, 10 et 11 fournit les deux théorèmes suivants :

On obtient le système orthogonal le plus général à lignes de courbure planes (ou sphériques) dans un système en soumettant à la transformation de Ribaucour la plus générale le système orthogonal le plus général à lignes de courbure rectilignes (ou circulaires) dans un système.

(*) Des résultats des n^{os} 10 et 11 on déduit le théorème suivant : *Si l'on connaît les courbes K et une des surfaces* S_1, *on obtiendra toutes les surfaces* S_1 *sans intégration; si les courbes* K *sont planes, et au moyen de deux quadratures, si ces courbes sont sphériques.*

(**) Pour la définition de la transformation de Guichard, voir notre note *Sur la transformation de Guichard et sur les systèmes* K (ce *Bulletin*, séance du 8 février 1919).

GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE. — Sur les systèmes Θ et sur les systèmes R.

par M. A. DEMOULIN, membre de l'Académie.

PRÉLIMINAIRES.

1. Si les coordonnées d'un point P dépendent de deux paramètres u, v, nous désignerons par (P) la surface décrite par ce point, par (P_{uv}) le réseau (u, v) tracé sur (P) et par (P_u), (P_v) les courbes $v =$ const., $u =$ const. qui passent par P.

Inversement, lorsque nous parlerons d'un réseau (P_{uv}), il s'agira du réseau (u, v) décrit par un point P.

2. Supposons que les coordonnées de deux points M, M′ soient exprimées en fonction de deux paramètres u, v. Nous dirons que les réseaux (M_{uv}), (M'_{uv}) se coupent directement (ou inversement) si les tangentes aux courbes (M_u), (M_v) sont respectivement coupées par les tangentes aux courbes (M'_u), (M'_v) [ou (M'_v), (M'_u)] (*).

3. Soient u, v les paramètres des développables d'une congruence engendrée par une droite d. Nous appellerons pre-

---

(*) Un réseau conjugué ou un réseau de lignes asymptotiques étant donné, on peut se proposer de déterminer les réseaux conjugués ou les réseaux de lignes asymptotiques qui le coupent directement ou inversement. Ainsi se trouvent posés huit problèmes. L'un d'eux a été résolu, il y a longtemps, par M. Darboux (*Leçons sur la théorie des surfaces*, n° 422). Nous ferons connaître prochainement les résultats que nous avons obtenus dans l'étude des autres.

mier foyer (ou second foyer) de d le point de contact de cette droite avec son enveloppe lorsque u (ou v) varie seul.

Cela posé, un réseau conjugué (P_{uv}) étant donné, nous désignerons par P_1 le second foyer de la tangente à (P_u), par P_k $(k = 2, 3, \ldots)$ le second foyer de la tangente à $(P_{k-1, u})$, par P_{-1} le premier foyer de la tangente à (P^v) et par P_{-k} $(k = 2, 3, \ldots)$ le premier foyer de la tangente à $(P_{-k+1, v})$.

4. Dans l'étude des systèmes Θ et des systèmes R, nous aurons à nous appuyer sur le théorème suivant : *Supposons qu'un réseau conjugué* (A_{uv}) *coupe directement deux réseaux conjugués* (B_{uv}), (C_{uv}). *Soient O le point caractéristique du plan A B C et P le point d'intersection des plans tangents aux surfaces* (A), (B), (C). *Les réseaux* (O_{uv}) *et* (P_{uv}) *sont conjugués* (*). *Les points* A_1, A_{-1} *appartiennent respectivement aux plans tangents aux surfaces* (O_1), (O_{-1}). *Les plans tangents aux surfaces* (A_1), (A_{-1}) *passent respectivement par les points* P_1, P_{-1} (**).

Sur les systèmes Θ.

5. Soit C une conique (courbe ou système de deux droites) dépendant de deux paramètres. Supposons qu'elle porte une série simplement infinie de points M et une série simplement infinie de points M′ donnant lieu aux propriétés suivantes : u, v désignant deux paramètres convenablement choisis, 1° les réseaux (M_{uv}) et les réseaux (M'_{uv}) sont conjugués; 2° les tan-

---

(*) Ces propriétés se déduisent facilement des théorèmes que M. Darboux a établis aux nos 922 et 924 de ses *Leçons sur la théorie des surfaces*.

(**) Dans l'énoncé de ce théorème, nous avons envisagé le cas général. D'autres circonstances peuvent se présenter : les points A, B, C peuvent être collinéaires; dans le cas contraire, les plans ABC peuvent passer par un point fixe ou envelopper une courbe ou être en nombre simplement infini; les plans tangents aux surfaces (A), (B), (C) peuvent avoir une droite commune, etc.

gentes aux courbes (M_u) et les tangentes aux courbes (M'_u) engendrent deux demi-quadriques complémentaires portées par une quadrique Q_1 ; 3° les tangentes aux courbes (M_v) et les tangentes aux courbes (M'_v) engendrent deux demi-quadriques complémentaires portées par une quadrique Q_{-1}.

Nous donnerons à la congruence, lieu de la conique C, le nom de *système* Θ. Un système Θ sera dit *spécial* si la conique C est formée de deux droites d, d'. Dans ce dernier cas, les points M seront nécessairement distribués sur une de ces droites, d, par exemple, les points M′ étant distribués sur la droite d'.

6. Soit (A_{uv}) un réseau conjugué à invariants ponctuels égaux. Imaginons une congruence quelconque conjuguée à ce réseau et désignons par m la droite de cette congruence qui passe par A. En vertu d'un théorème bien connu, dû à M. Kœnigs, le conjugué harmonique B de A par rapport aux points focaux de la droite m décrit un réseau conjugué à invariants ponctuels égaux. Nous dirons que les réseaux (A_{uv}), (B_{uv}) se correspondent dans une *transformation de Kœnigs* (en abrégé, *transformation* K) (*). Nous dirons aussi que les réseaux (u, v) tracés sur les polaires réciproques des surfaces (A) et (B) se correspondent dans une *transformation* K_1.

Les transformations K jouissent de la propriété suivante. *Si deux réseaux conjugués à invariants ponctuels égaux (B_{uv}), (C_{uv}) correspondent dans des transformations K à un réseau conjugué à invariants ponctuels égaux (A_{uv}), la droite d qui joint le point A au point caractéristique du plan ABC* (**) *con-*

(*) Soient α, β les paramètres d'un réseau divisant harmoniquement le réseau (A_{uv}). En vertu d'un théorème énoncé au n° 7 de notre note *Sur la transformation de Guichard et sur les systèmes K* (ce *Bulletin*, séance du 8 février 1919), les réseaux $(A_{\alpha\beta})$, $(B_{\alpha\beta})$ se coupent inversement.

(**) Ce point appartient à la droite BC.

tient une infinité simple de points M (parmi lesquels figure le point A) décrivant des réseaux conjugués à invariants ponctuels égaux qui correspondent dans des transformations K aux réseaux (B_{uv}), (C_{uv}), *et la droite BC ou d' contient une infinité simple de points M' (parmi lesquels figurent les points B et C) décrivant des réseaux conjugués à invariants ponctuels égaux qui correspondent dans des transformations K aux réseaux* (M_{uv}).

Le théorème suivant met en évidence le rôle que joue, dans la théorie des systèmes Θ, le théorème ci-dessus énoncé : *La conique formée des droites d, d' engendre le système Θ spécial le plus général, la surface (M) et les surfaces (M') étant les surfaces associées à ce système.*

7. Considérons un système Θ quelconque, non spécial ou spécial.

Le rapport anharmonique de quatre points M ou de quatre points M' est constant.

Soit O le point caractéristique du plan de la conique C. On a vu que, dans le cas d'un système Θ spécial, O est à l'intersection des droites *d* et *d'*. Dans tous les cas, le réseau (O_{uv}) est conjugué (n° 4).

Les points M_1 et les points M'_1 sont situés dans le plan tangent à la surface (O_1) (n° 4). Comme ils appartiennent à la quadrique Q_1, ils sont distribués sur une conique C_1. Or, les tangentes aux courbes (M_{1v}) et les tangentes aux courbes (M'_{1v}) engendrent deux demi-quadriques complémentaires, et il en est de même des tangentes aux courbes (M_{1u}) et des tangentes aux courbes (M'_{1u}), car un réseau (M_{1uv}) et un réseau (M'_{1uv}) se coupent directement. Dès lors, *la conique* C_1 *engendre un système* Θ qui est, en général, non spécial. Il en sera certainement ainsi si le système Θ d'où l'on est parti est spécial, car le plan tangent à (O_1) passant par l'intersection O des droites *d*, *d'*, qui appartiennent à Q_1, ne saurait couper cette quadrique suivant deux droites.

Le théorème que nous venons d'établir conduit au suivant, dans lequel il est compris : *Les points* M_k *et les points* M'_k ($k = \pm 1, \pm 2, \ldots$) *sont distribués sur une conique* C_k *située dans le plan tangent à la surface* (O_k). *Cette conique engendre un système* Θ.

8. Lorsque u ou v varie seul, chacune des coniques C, C_1, C_2, ..., lorsqu'elle n'est pas un système de deux droites, a une enveloppe qu'elle touche en deux points.

9. Les plans tangents aux surfaces (M) et les plans tangents aux surfaces (M') enveloppent un cône du second ordre dont nous désignerons le sommet par P (*). Ce cône peut dégénérer en un système de deux droites. Dans ce cas, et dans ce cas seulement, les réseaux (M_{uv}) et les réseaux (M'_{uv}) sont à invariants tangentiels égaux; un réseau (M_{uv}) et un réseau (M'_{uv}) se correspondent dans une transformation K_1. Si, en outre, le système Θ considéré est spécial, les réseaux (M_{uv}) et les réseaux (M'_{uv}) sont à invariants ponctuels égaux. La figure qui correspond à ce cas est celle que nous avons étudiée au n° 6 de la note citée plus haut (n° 6).

Le réseau (P_{uv}) est conjugué (n° 4). Les plans tangents aux surfaces (M_k) et les plans tangents aux surfaces (M'_k) ($k = \pm 1, \pm 2, \ldots$) enveloppent un cône du second ordre. Le sommet de ce cône est le point P_k (n° 4).

10. Indiquons quelques classes de systèmes Θ : 1° Les systèmes K étudiés dans la note citée plus haut (n° 6). 2° Les congruences, lieux des coniques K et K' définies au n° 15 de ladite note. 3° Les systèmes Θ spéciaux pour lesquels le

---

(*) Dans le cas d'un système Θ spécial, la trace de ce cône sur le plan des droites d, d' touche ces droites en leurs points focaux distincts de 0.

réseau (O_{uv}) est orthogonal. Ces systèmes ont été étudiés par M. Guichard. 4° Soit Ω une quadrique (non cône) invariablement liée à une surface S qui roule sur une surface applicable S_1. La conique C d'intersection de Ω et du plan π tangent aux surfaces S et S_1, en leur point de contact, engendre un système Θ ; les surfaces associées à ce système sont les trajectoires des intersections de π et des génératrices de Ω. Si, S étant une quadrique, Ω coïncide avec S, le système Θ est spécial. 5° Si, S étant une quadrique, Ω est homofocale à S, la congruence, lieu de C, est Θ d'une seconde manière. Ce système appartient à une classe étendue de systèmes Θ. Nous nous proposons de définir celle-ci prochainement en la rattachant à une transformation des congruences que nous avons définies dans une note insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris* (séance du 25 septembre 1911).

SUR LES SYSTÈMES R.

11. Soit C une courbe plane dépendant de deux paramètres. Nous dirons qu'elle engendre un *système* R si elle porte une infinité simple de points M donnant lieu aux propriétés suivantes : u, v désignant deux paramètres convenablement choisis, 1° les réseaux (M_{uv}) sont conjugués ; 2° les tangentes aux courbes (M_u) passent par un point A ; 3° les tangentes aux courbes (M_v) passent par un point B. Par hypothèse, les points A et B n'appartiennent pas au plan de la courbe C (*).

On reconnaît aisément que les réseaux (M_{uv}) sont harmoniques à la congruence engendrée par la droite AB. Cette remarque va nous conduire à la détermination des systèmes R.

(*) Nous avons déterminé la congruence engendrée par la courbe C lorsqu'un des points A, B appartient au plan de cette courbe.

12. Soit (d) une congruence rectiligne quelconque engendrée par une droite d. Désignons par u, v les paramètres des développables de cette congruence et par A, B les points focaux de la droite d, ces points étant tels que les courbes (A_v) et (B_u) soient tangentes à d. Faisons usage de coordonnées homogènes ou tétraédriques. Si a_1, a_2, a_3, a_4 sont les coordonnées de A et b_1, b_2, b_3, b_4 celles de B, on peut écrire :

$$\frac{\partial a_k}{\partial v} = m_1 a_k + n_1 b_k, \quad \frac{\partial b_k}{\partial u} = m a_k + n b_k, \quad (k = 1, 2, 3, 4)$$

m, n, m_1, n_1 désignant des fonctions convenablement choisies.

Soit (α, β) une solution quelconque du système

$$(1) \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial v} = -m_1\alpha + m\beta, \quad \frac{\partial \beta}{\partial u} = n_1\alpha - n\beta.$$

Des formules

$$(2) \qquad \frac{\partial \theta_k}{\partial u} = \alpha a_k, \quad \frac{\partial \theta_k}{\partial v} = \beta b_k, \quad (k = 1, 2, 3, 4)$$

on déduit, au moyen de quatre quadratures, les coordonnées θ_1, θ_2, θ_3, θ_4 du point qui décrit le réseau conjugué le plus général harmonique à la congruence (d) (*).

Soient X (x_1, x_2, x_3, x_4), Y (y_1, y_2, y_3, y_4), Z (z_1, z_2, z_3, z_4) trois points décrivant des réseaux conjugués harmoniques à la congruence (d). Nous supposerons que les coordonnées de ces

---

(*) En se servant des formules de M. Guichard, on peut définir comme il suit les coordonnées x_0, y_0, z_0 d'un point qui décrit un réseau conjugué harmonique à une congruence. Si l'on conserve toutes les notations de M. Bianchi (*Lezioni di Geometria differenziale*, § 147), on a :

$$x_0 = \frac{\rho}{\omega}\int (x - \rho X)\frac{\partial}{\partial u}\frac{\omega}{\rho}\,du + (x + \rho X)\frac{\partial}{\partial v}\frac{\omega}{\rho}\,dv$$

et des formules analogues pour y_0 et pour z_0, ω désignant une solution quelconque de l'équation à laquelle satisfait ρ.

points ont été choisies de manière à satisfaire à des égalités de la forme (2).

Les coordonnées X_1, X_2, X_3, X_4 de tout point M du plan X Y Z ont des expressions de la forme

$$X_k = \xi x_k + \eta y_k + \zeta z_k, \qquad (k = 1, 2, 3, 4). \tag{3}$$

Pour que ce point décrive un réseau conjugué harmonique à la congruence (d), il faut et il suffit que ξ, η, ζ soient proportionnelles à des constantes. Posons

$$\xi = f(w), \qquad \eta = g(w), \qquad \zeta = h(w). \tag{4}$$

Si w varie seul, le point M décrit une courbe C. Lorsque u et v varient, cette courbe engendre le système R le plus général. Il est clair que les points M qui figurent dans la définition des systèmes R sont donnés par les formules (3) et (4).

13. Il suit desdites formules que les différentes positions de C sont des transformées homographiques de la courbe Γ définie, en coordonnées homogènes ou trilinéaires ξ, η, ζ, par les équations (4). Les différentes positions d'un quelconque des points M correspondent à un point déterminé de Γ dans les transformations considérées. De ces remarques découlent plusieurs propriétés des systèmes R. Parmi ces propriétés, nous citerons celles que Ribaucour (*) a établies dans le cas des systèmes cycliques, sauf la première qui admet la généralisation suivante : *Si un système R est composé de coniques, le rapport anharmonique de quatre points M est constant.*

14. Tout système R donne naissance à un système à lignes conjuguées ; les surfaces qui composent ce système sont 1° les

---

(*) *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris,* séance du 24 février 1873.

surfaces (M), 2° les surfaces engendrées par C lorsque u varie seul, 3° les surfaces engendrées par C lorsque v varie seul. Les développables respectivement circonscrites suivant C à une surface de la deuxième et à une surface de la troisième famille sont des cônes de sommets A et B.

15. Soit O le point caractéristique du plan ω de la courbe C (*). Le réseau (O_{uv}) est conjugué (n° 4). Les points M_k $(k = \pm 1, \pm 2, \cdots)$ sont distribués sur une courbe C_k située dans le plan tangent à la surface (O_k) (n° 4). Si l'on convient de remplacer A_0 par A et B_0 par B, on peut énoncer le théorème suivant : Si k est positif, les tangentes aux courbes (M_{ku}) passent par A_k et les tangentes aux courbes (M_{kv}), par A_{k-1}. Si k est négatif, les tangentes aux courbes (M_{ku}) passent par B_{k+1} et les tangentes aux courbes (M_{kv}), par B_k. Concluons de là que *les courbes* C_k *engendrent des systèmes* R.

16. Supposons qu'un point M décrive un système à lignes conjuguées (M). Soient u_1, u_2, u_3 les paramètres des trois familles qui composent ce système. Les coordonnées rectangulaires x, y, z du point M satisfont à un système de la forme

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\theta}{\partial u_i \partial u_k} = \frac{\partial \log H_i}{\partial u_k}\frac{\partial\theta}{\partial u_i} + \frac{\partial \log H_k}{\partial u_i}\frac{\partial\theta}{\partial u_k}, \\
&\frac{\partial^2\theta}{\partial u_i^2} = A_{ii}\frac{\partial\theta}{\partial u_i} + A_{ik}\frac{\partial\theta}{\partial u_k} + A_{il}\frac{\partial\theta}{\partial u_l}.
\end{aligned}
\qquad
\begin{pmatrix} i, k, l = 1, 2, 3 \\ i \neq k \neq l \end{pmatrix}$$

Soit ikl une permutation quelconque des nombres 1, 2, 3. Si M décrit la ligne (M_{u_l}), les tangentes aux lignes (M_{u_i}), (M_{u_k})

(*) Il y a des systèmes R pour lesquels les plans ω sont en nombre simplement infini. Ceux-ci passent par une droite fixe. Il y a aussi des systèmes R pour lesquels les plans ω sont tangents à une courbe ou passent par un point fixe. Nous avons déterminé tous ces systèmes.

ont des enveloppes qu'elles touchent respectivement en des points M_{il}, M_{kl}.

Si M *décrit une surface* $u_l = const.$, *le plan osculateur de la ligne* (M_{u_l}) *contient une infinité de points qui décrivent des réseaux conjugués* (u_i, u_k) *harmoniques à la congruence engendrée par la droite* $\mathrm{M}_{il}\mathrm{M}_{kl}$. Désignons par M_l un quelconque de ces points et par x_l, y_l, z_l ses coordonnées. Si l'on pose

$$\beta_{ik} = \frac{1}{\mathrm{H}_i}\frac{\partial \mathrm{H}_k}{\partial u_i},$$

$$\mathrm{W}_l = \int \beta_{il}\beta_{li}du_i + \beta_{kl}\beta_{lk}du_k,$$

$$\Omega_l = \int \beta_{il}\frac{\partial \beta_{li}}{\partial u_l}du_i + \beta_{kl}\frac{\partial \beta_{lk}}{du_k}du_k,$$

on a, α, β, γ désignant des constantes,

$$x_l = x + \frac{\gamma \mathrm{A}_{li}\dfrac{\partial x}{\partial u_i} + \gamma \mathrm{A}_{lk}\dfrac{\partial x}{\partial u_k} - \left[\alpha + \gamma\left(\mathrm{W}_l + \dfrac{\partial \log \mathrm{H}_l}{\partial u_l} - \mathrm{A}_{ll}\right)\right]\dfrac{\partial x}{\partial u_l}}{\alpha \mathrm{W}_l + \beta - \gamma\left(\Omega_l - \frac{1}{2}\mathrm{W}_l^2\right)}$$

et les formules obtenues en remplaçant x_l et x par y_l et y, puis par z_l et z.

Si

$$\beta_{il} = \beta_{li}, \quad \beta_{kl} = \beta_{lk},$$

on a

$$\Omega_l = \frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{W}_l}{\partial u}.$$

Si l'on a

$$\frac{\partial \beta_{li}}{\partial u_l} + \frac{\partial \beta_{il}}{\partial u_i} + \beta_{kl}\beta_{ki} = 0, \quad \frac{\partial \beta_{lk}}{\partial u_l} + \frac{\partial \beta_{kl}}{\partial u_k} + \beta_{il}\beta_{ik} = 0,$$

ce qui aura lieu, en particulier, si le système (M) est orthogonal, Ω_l a pour valeur $-\frac{1}{2}\Delta \mathrm{H}_l$, $\Delta \mathrm{H}_l$ désignant le premier paramètre différentiel de H_l relatif à la surface lieu du point M.

Considérons α, β, γ comme les coordonnées homogènes ou trilinéaires d'un point. Si ce point décrit une courbe Γ, le point M_l décrira une courbe C_l. Si u_i et u_k varient, C_l engendrera un système R. Si Γ est la conique

$$\beta\gamma = \frac{\alpha^2}{2} + p\alpha\gamma + q\gamma^2,$$

p et q désignant des constantes, C_l est une conique admettant avec la courbe (M_{u_l}), au point M, un contact du second ordre. Lorsque, le système (M) étant orthogonal, p et q sont nulles, la conique C_l est un cercle.

17. Dans le cas où (M) est un système orthogonal cyclique, les lignes (M_{u_l}) étant les lignes de courbure circulaires, on peut poser

$$W_l = \sqrt{\Delta H_l}\,\mathrm{tg}\,\frac{t}{2},$$

t désignant l'angle des tangentes au cercle (M_{u_l}) en M et au point d'intersection de ce cercle avec une quelconque des surfaces $u_l =$ const. On a, d'autre part (n° 16), $\Omega_l = -\frac{1}{2}\Delta H_l$. Par suite, dans le cas présent, la courbe C_l la plus générale peut être définie par des formules débarrassées de tout signe d'intégration.

Pour chacun des systèmes R considérés, le plan de la courbe génératrice C_l est orthogonal à la droite correspondante de la congruence attachée à ce système. Ces systèmes sont les seuls qui jouissent de cette propriété.

Dans le cas où le plan π du cercle (M_{u_l}) enveloppe une surface S_1, qu'il touche en un seul point, les différentes positions d'une courbe C_l sont les intersections du plan π et d'un cône invariablement lié à une surface S applicable sur S_1 et qui roule sur celle-ci. Les points M_l sont les intersections de π et des différentes génératrices du cône.

Lorsqu'on connaît seulement le système cyclique engendré par le cercle (M_{u_l}) (supposé réel ou imaginaire) et non les trajectoires orthogonales des différentes positions de ce cercle, on peut ramener la détermination des points M_l à l'intégration d'un système complet auquel satisfait la fonction ω définie dans la note du n° 12.

18. Pour qu'il existe dans le plan tangent en un point variable O d'une surface (O) deux points non alignés avec O et décrivant des réseaux conjugués harmoniques à la congruence des normales de (O), il faut que cette surface ait sa courbure totale constante. Si cette condition est vérifiée, le plan tangent en O contient une double infinité de points jouissant de la propriété indiquée. Les considérations du n° 17 permettent de les déterminer. En voici une définition géométrique. Soit P un point fixe de la surface (O), arbitrairement choisi. Portons sur la tangente en O à la géodésique passant par les points P et O, dans un sens convenable, un segment OM égal à $R \operatorname{th} \frac{\alpha}{R}$ ou à $R \operatorname{tg} \frac{\alpha}{R}$, suivant que la courbure totale de la surface est égale à $-\frac{1}{R^2}$ ou à $\frac{1}{R^2}$, α désignant l'arc OP de la géodésique; les points M qui correspondent aux différentes positions du point P seront les points cherchés. Dans le cas des surfaces à courbure négative, il faudra toutefois joindre à ces points ceux qui décrivent les trajectoires orthogonales des cercles de rayon R tracés dans les plants tangents, des points O comme centres. Ils se déduisent d'ailleurs, par un passage à la limite, de la construction indiquée ci-dessus.

19. Par une méthode toute semblable à celle du n° 12, nous avons déterminé la surface la plus générale engendrée par une courbe plane C, la développable circonscrite à la surface suivant cette courbe étant un cône. Lorsque C est une conique, les formules obtenues sont identiques à celles de M. Blutel. Signalons, au sujet de ces dernières surfaces, le théorème suivant : Soit Q une quadrique circonscrite à la surface suivant C et définie pour chaque position de cette courbe. Imaginons les courbes tracées sur la surface, qui ont pour tangentes les génératrices des quadriques Q appartenant à un même système. Quatre quelconque de ces courbes sont coupées par C en quatre points dont le rapport anharmonique est constant.

Si la quadrique Q coïncide avec le cône circonscrit, on retrouve un théorème dû à M. Blutel. Indiquons une seconde application de notre théorème. Imaginons un périsphère, enveloppe d'une sphère S. Si l'on prend cette sphère pour quadrique Q, on obtient la propriété suivante : Quatre lignes de longueur nulle d'un périsphère, appartenant à un même système, sont coupées par une ligne de courbure circulaire variable en quatre points dont le rapport anharmonique est constant.

20. Des considérations analogues à celles du n° 12 conduisent à la détermination du complexe le plus général engendré par une courbe plane portant une infinité simple de points qui décrivent des systèmes points assemblés à un système plan.

21. Transformons par polaires réciproques la figure définie au n° 11. Aux réseaux (M_{uv}) correspondront des réseaux conjugués $(\overline{M}_{uv})$ qui seront conjugués à la congruence (m), lieu de la droite m, polaire de la droite AB, et les plans tangents aux surfaces $(\overline{M})$, aux différents points de la droite m, envelopperont un cône. La congruence, lieu de la droite AB, pouvant être arbitrairement choisie, il en sera de même de la congruence (m).

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — **La vitesse de l'énergie électromagnétique dans un champ gravifique** (¹),

par TH. DE DONDER.

Les trois composantes v_1, v_2, v_3 de cette vitesse sont données par

$$v_1 = \frac{\sum_\sigma \sum_i g^{i\sigma} \frac{\partial(A - B)}{\partial x_i} \Theta_{\sigma 1}}{\sum_\sigma \sum_i g^{i\sigma} \frac{\partial(A - B)}{\partial x_i} \Theta_{\sigma 4}}$$

et par deux autres formules analogues obtenues en remplaçant l'indice 1 successivement par 2 et par 3. A — B est donné par les équations (324) et (325) de mon mémoire *Archives Teyler*, série 2, t. III, 1917, et $\Theta_{\sigma\tau}$ est donné par (85) à (88), même mémoire.

Remarquons que, pour tout changement de variables, on aura

$$v'_a = \frac{\sum_i \frac{\partial x'_a}{\partial x_i} v_i}{\sum_i \frac{\partial x'_4}{\partial x_i} v_i} \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2, 3, 4, \\ a = 1, 2, 3, \\ v_4 \equiv 1, \end{array}$$

où x'_i ($i = 1, 2, 3, 4$) représentent les nouvelles variables.

Théorème. — Dans tout champ électromagnétique tendant suivant une loi quelconque vers le champ c dans lequel se propagent des ondes planes de lumière polarisée, la vitesse de l'énergie électromagnétique tend vers c.

(¹) Pli cacheté déposé le 16 mai 1918, présenté par M. Stroobant.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — **La gravifique** (*),

par TH. DE DONDER.

Les phénomènes dus à l'électricité et à la matière sont toujours accompagnés d'une modification plus ou moins profonde de l'espace-temps. Un point de l'espace-temps est défini par quatre coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4; les trois premières se rapportent à l'espace (géométrique), la quatrième au temps.

L'étude des relations qui s'établissent entre les champs électromagnétique et matérialitique d'une part, et l'espace-temps déformé d'autre part, constitue la *gravifique.*

Un des caractères remarquables de la gravifique consiste à transporter les phénomènes dans l'espace-temps à quatre dimensions; celles-ci sont équivalentes, autrement dit, le rôle de la coordonnée x_4 relative au temps est toujours analogue à celui des coordonnées géométriques x_1, x_2, x_3.

L'espace *non déformé* est identique à l'espace de la géométrie euclidienne ou classique; la lumière s'y propagerait avec la vitesse de 300,000 kilomètres par seconde. Mais cette lumière sera considérée comme un phénomène-épreuve; si cette lumière était réalisée dans l'espace, celui-ci serait déformé.

Nous nous proposons de donner un exposé synthétique de la gravifique. Partant du principe d'Hamilton généralisé, nous déduisons de cette hypothèse unique les lois générales de la gravifique : nous obtenons ainsi les équations différentielles qui régissent la déformation de l'espace-temps, puis les relations relatives au contenu énergétique du champ gravifique.

(*) Présenté par M. Stroobant.

Ces résultats généraux renferment comme cas très particuliers tout ce que l'on sait du *champ électromagnétique pur* et du *champ matérialitique pur*.

Depuis 1914, mes recherches (*) ont surtout porté sur le champ électromagnétique pur (ou dépourvu de matière); la plupart des notations employées ici sont expliquées dans mes travaux antérieurs; j'y renverrai le lecteur, en les désignant par leur numéro d'ordre.

M. Einstein, qui peut être considéré comme le créateur de la gravifique, s'est occupé plus spécialement du champ matérialitique pur.

M. Lorentz a étudié les rapports de la gravifique avec le principe d'Hamilton, généralisé de diverses façons.

On trouvera une bibliographie du sujet traité dans mes mémoires cités ci-dessus.

1. *Principe d'Hamilton généralisé.* L'espace-temps est défini par son δs^2 (II, p. 12) :

$$\delta s^2 \equiv \sum_\alpha \sum_\beta g_{\alpha\beta} \delta x_\alpha \delta x_\beta , \qquad \alpha, \beta = 1, 2, 3, 4. \qquad (1)$$

où $g_{\alpha\beta} \equiv g_{\beta\alpha}$ représente dix fonctions des coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4 de l'espace-temps; ce sont les *potentiels gravifiques* (d'Einstein).

On sait que la forme quadratique (1) possède plusieurs invariants par rapport à *tous* les changements des variables x_1, x_2, x_3, x_4. Celui de ces invariants qui fixera notre attention est la *courbure totale,* car c'est le seul qui subsiste quand l'espace

---

(*) Th. De Donder, I. *Comptes rendus de l'Académie des sciences.* Paris, 6 juillet 1914. — II. *Archives du Musée Teyler.* Haarlem, sér. 2, t. III (la plupart des résultats qui y sont exposés datent de septembre et octobre 1914; voir spécialement p. 82 de ce mémoire). — III. *Akademie van Wetenschappen.* Amsterdam, 27 mai 1916, 26 mai 1917 et 29 septembre 1918.

considéré ne dépend que de deux variables (cas des surfaces proprement dites). La courbure totale sera désignée par C (II, p. 97) : elle dépend des potentiels gravifiques, et de leurs dérivées premières et secondes. L'*élément de volume* de l'espace-temps (1) vaut

$$(-g)^{\frac{1}{2}}\delta x_1 \delta x_2 \delta x_3 \delta x_4, \qquad (2)$$

où g représente le déterminant symétrique des $g_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4)$. En général, $(-g)$ sera positif; sa racine carrée positive est représentée par $(-g)^{\frac{1}{2}}$.

Nous poserons (II, p. 91)

$$l = kC(-g)^{\frac{1}{2}}, \qquad (3)$$

où k représente une constante, dont la valeur ne dépend que du choix des unités.

Outre cette fonction l, le principe d'Hamilton généralisé utilise une fonction L qui dépend des potentiels gravifiques, de leurs dérivées et des variables qui définissent les champs électromagnétique et matérialitique. L représente la ***différence entre l'énergie potentielle et l'énergie cinétique des champs considérés.*** Dans la suite, cette fonction sera donnée explicitement.

Le principe d'Hamilton généralisé consiste à admettre que pour toute portion de l'espace-temps, on a

$$\delta \int (l + L)\, dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = 0. \qquad (4)$$

Le signe δ du calcul des variations signifie ici que les $g_{\alpha\beta}$ et leurs dérivées subissent *seuls* une variation à l'intérieur de la portion d'espace-temps considérée; sur les frontières de cette portion, les variations sont nulles. En langage physique, on dira que dans la portion donnée V, la différence entre l'intégrale

$$\int_V (l + L)\, dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$$

prise dans l'espace-temps *réalisé* et cette intégrale prise dans les espaces-temps légèrement différents est une quantité infinitésimale d'ordre supérieur; cette intégrale atteint donc une valeur *extrême* dans l'espace-temps *réalisé*.

2. ***Équations différentielles de la gravifique.*** Grâce au calcul des variations, le principe généralisé d'Hamilton prend la forme équivalente et plus commode (II, p. 91) :

$$\Diamond_{\mu\nu}(l + \mathrm{L}) = 0, \tag{5}$$

où

$$\Diamond^{\mu\nu} \equiv \frac{d}{dg^{\mu\nu}} - \sum_{\alpha} \frac{d}{dx_\alpha}\left(\frac{d}{dg^{\mu\nu,\alpha}}\right) + \sum_{\alpha\beta} \frac{d^2}{dx_\alpha dx_\beta}\left(\frac{d}{dg^{\mu\nu,\alpha\beta}}\right) + \cdots \tag{6}$$

Les dix équations différentielles (5) sont les ***équations différentielles de la gravifique.***

Posons

$$-(1 + \varepsilon_{\mu\nu})\,\Diamond^{\mu\nu}\mathrm{L} \equiv \mathfrak{T}_{\mu\nu} \equiv \mathfrak{T}_{\nu\mu} \tag{7}$$

$$\varepsilon_{\mu\nu} \equiv 0 \quad \text{si} \quad \mu \gtrless \nu$$

$$\varepsilon_{\mu\mu} \equiv 1.$$

L'ensemble des fonctions $\mathfrak{T}_{\mu\nu}$ (μ, $\nu = 1, 2, 3, 4$) s'appelle le ***tenseur symétrique*** des champs électromagnétique et matérialitique considérés.

Les équations différentielles de la gravifique (5) pourront donc s'écrire :

$$(1 + \varepsilon_{\mu\nu})\,\Diamond^{\mu\nu} l = \mathfrak{T}_{\mu\nu}. \tag{8}$$

La fonction l satisfait à l'***identité*** (II, p. 99)

$$(1 + \varepsilon_{\mu\nu})\,\Diamond^{\mu\nu} l \equiv k(-g)^{\frac{1}{2}} \sum_{\alpha}\sum_{\beta} g^{\alpha\beta}(\mu\alpha, \beta\nu) - l g_{\mu\nu}. \tag{9}$$

Il en résulte que (8) peut s'écrire :

$$k(-g)^{\frac{1}{2}} \sum_{\alpha}\sum_{\beta} g^{\alpha\beta}(\mu\alpha, \beta\nu) - l g_{\mu\nu} = \mathfrak{T}_{\mu\nu}. \tag{10}$$

Multiplions (10) par $g_{\mu\nu}$ et sommons par rapport à μ et à ν; d'où

$$2l - 4l = \sum_{\mu}\sum_{\nu} \mathfrak{T}_{\mu\nu} g^{\mu\nu}. \tag{11}$$

Posons

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\mu} g^{\mu\nu} \mathfrak{T}_{\mu\sigma} \equiv T^{\nu}_{\sigma} \\ \text{ou} \quad & \\ &\mathfrak{T}_{\sigma\nu} \equiv \mathfrak{T}_{\nu\sigma} \equiv \sum_{\mu} g_{\mu\nu} T^{\mu}_{\sigma} \equiv \sum_{\mu} g_{\mu\sigma} T^{\mu}_{\nu} \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

et appelons T^{ν}_{σ} le *tenseur asymétrique* des champs électromagnétique et matérialitique.

En vertu de (11) et (12), on aura

$$\sum_{\nu} T^{\nu}_{\nu} = -2l. \tag{13}$$

Des relations (10) et (13), on déduit :

$$k(-g)^{\frac{1}{2}} \sum_{\alpha}\sum_{\beta} g^{\alpha\beta}(\mu\alpha, \beta\nu) = \mathfrak{T}_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\, g_{\mu\nu} \sum_{\alpha} T^{\alpha}_{\alpha}. \tag{14}$$

Posons enfin

$$G_{\mu\nu} \equiv \sum_{\alpha}\sum_{\beta} g^{\alpha\beta}(\mu\alpha, \beta\nu), \tag{15}$$

$$\sum_{\alpha} T^{\alpha}_{\alpha} = T\,; \tag{16}$$

d'où les équations différentielles de la gravifique prennent la forme condensée :

$$k(-g)^{\frac{1}{2}} G_{\mu\nu} = \mathfrak{T}_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\, g_{\mu\nu} T. \tag{17}$$

3. *Théorème du tenseur asymétrique.* La fonction l satisfait à l'identité (III, 1918, p. 435)

$$\frac{1}{2} \sum_{\mu}\sum_{\nu} (1 + \varepsilon_{\mu\nu})\, g^{\mu\nu,\sigma} \Diamond^{\mu\nu} l = - \sum_{\mu}\sum_{\nu} \frac{d}{dx_{\nu}} \left\{ (1 + \varepsilon_{\mu\sigma})\, g^{\mu\nu} \Diamond^{\mu\sigma} l \right\} \tag{18}$$

Mais on a

$$\sum_{\alpha} g_{\alpha\mu} g^{\mu\nu} = \varepsilon_{\alpha\nu}; \tag{19}$$

d'où

$$\sum_{\mu} g_{\alpha\mu,\sigma} g^{\mu\nu} = - \sum_{\mu} g_{\alpha\mu} g^{\mu\nu,\sigma}. \tag{20}$$

En vertu de (8), (12), (19) et (20), cette identité fournit les relations

$$0 = \sum_{\nu} \frac{dT^{\nu}_{\sigma}}{dx_{\nu}} - \frac{1}{2} \sum_{\mu} \sum_{\nu} \sum_{\alpha} g_{\alpha\mu,\sigma} g^{\mu\nu} T^{\alpha}_{\nu}, \tag{21}$$

que l'on peut encore écrire, en vertu de (12) :

$$0 = \sum_{\nu} \left(\frac{dT^{\nu}_{\sigma}}{dx_{\nu}} - \sum_{\alpha} \left\{ \begin{matrix} \sigma\nu \\ \alpha \end{matrix} \right\} T^{\nu}_{\alpha} \right). \tag{22}$$

Ces quatre équations expriment le *théorème du tenseur asymétrique.*

Rappelons que dans (22), on a posé

$$\left\{ \begin{matrix} \sigma\nu \\ \alpha \end{matrix} \right\} \equiv \sum_{\beta} g^{\beta\alpha} \begin{bmatrix} \sigma\nu \\ \beta \end{bmatrix}, \tag{23}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma\nu \\ \beta \end{bmatrix} \equiv \frac{1}{2} (g_{\sigma\beta,\nu} + g_{\beta\nu,\sigma} - g_{\sigma\nu,\beta}). \tag{24}$$

4. ***Théorème du tenseur gravifique.*** Le tenseur gravifique est un ensemble de seize fonctions t^{β}_{α} ($\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$) satisfaisant aux équations (II, p. 92)

$$\sum_{\beta} \frac{dt^{\beta}_{\alpha}}{dx_{\beta}} = \frac{1}{2} \sum_{\mu} \sum_{\beta} (1 + \varepsilon_{\mu\beta}) g^{\mu\beta,\alpha} \Diamond^{\mu\beta} l \tag{25}$$

et à certaines conditions aux limites définies par le problème considéré.

J'ai indiqué un exemple d'un tel tenseur gravifique (II, p. 92); mon travail III de 1918 est consacré à l'étude des tenseurs gravifiques.

En vertu de l'identité (18), de (8) et de (12), les équations (25) prennent la forme

$$\sum_{\beta} \frac{d(t_{\alpha}^{\beta} + \mathrm{T}_{\alpha}^{\beta})}{dx_{\beta}} = 0. \tag{26}$$

Ces quatre relations entre le tenseur gravifique t_{α}^{β} et le tenseur asymétrique $\mathrm{T}_{\alpha}^{\beta}$ expriment le *théorème du tenseur gravifique* ou le *théorème de l'énergie totale.*

5. *Force totale généralisée.* Nous désignerons ainsi l'ensemble des quatre fonctions

$$\mathcal{F}_{\sigma} \equiv \sum_{\nu} \left(\frac{d\mathrm{T}_{\sigma}^{\nu}}{dx_{\nu}} - \sum_{\alpha} \left\{ \begin{matrix} \sigma\nu \\ \alpha \end{matrix} \right\} \mathrm{T}_{\sigma}^{\nu} \right). \tag{27}$$

On voit (22) qu'*en vertu des équations différentielles de la gravifique, la force totale généralisée est nulle.*

6. *Premier exemple : champ électromagnétique pur.* Nous entendons par là un espace-temps dépourvu de phénomènes matérialitiques. Ce champ est défini en chaque point par douze fonctions M_{ij} ($\equiv - \mathrm{M}_{ji}$) et M_{ij}^{*} ($\equiv - \mathrm{M}_{ji}^{*}$) de x_1, x_2, x_3, x_4.

Dans ce champ, on aura (II, p. 89)

$$\mathrm{L} = \tfrac{1}{4} \sum_{\alpha}\sum_{\beta} (-1)^{\alpha+\beta+1} \mathrm{M}_{\alpha\beta} \mathrm{M}_{*}^{\alpha\beta}. \tag{28}$$

Cas des dualistiques Nous allons étudier le cas où les fonctions M_{ij}^{*} sont respectivement les *dualistiques* des M_{ij}, c'est-à-dire le cas où (II, p. 13)

$$\mathrm{M}_{*}^{\mu\nu} \equiv (-1)^{\mu+\nu+1} (-g)^{\frac{1}{2}} \sum_{\alpha}\sum_{\beta} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \mathrm{M}_{\alpha\beta}. \tag{29}$$

On a posé $\mathrm{M}_{*}^{\mu\nu} \equiv - \mathrm{M}_{*}^{\nu\mu} \equiv \mathrm{M}_{ij}^{*}$, les indices i, j étant les deux nombres qui restent dans la permutation 1, 2, 3, 4, quand on y supprime μ et ν ($\mu < \nu$). Par exemple $M^{12}_{*} \equiv - M^{21}_{*} \equiv M^{*}_{34}$.

En vertu de (7), on aura

$$\mathfrak{T}_{\lambda\mu} \equiv \mathfrak{T}_{\mu\lambda} \equiv -(1 + \varepsilon_{\lambda\mu}) \Diamond^{\lambda\mu} L \equiv -(1 + \varepsilon_{\lambda\mu}) \frac{dL}{dg^{\lambda\mu}}. \tag{30}$$

Effectuons les dérivations par rapport aux $g^{\lambda\mu}$ (30) et substituons dans (12) ; d'où

$$T^{\beta}_{\alpha} = \tfrac{1}{2} \sum_{\mu} (-1)^{\mu+\beta} [M_{\alpha\mu} M^{\beta\mu}_{*} - M^{*}_{\alpha\mu} M^{\beta\mu}]. \tag{31}$$

Nous retrouvons ainsi les $\theta_{\alpha\beta}$ donnés dans notre mémoire II, page 35 ; il suffira de poser

$$T^{\beta}_{\alpha} \equiv (-g)^{\frac{1}{2}} \theta_{\alpha\beta}. \tag{32}$$

La force totale généralisée $\mathcal{F}_{\sigma}$, définie par (27), devient

$$\mathcal{F}_{\sigma} \equiv \sum_{i} (-1)^{i} (M^{*i} M_{i\sigma} - M^{i} M^{*}_{i\sigma}), \tag{33}$$

où

$$M^{i}_{*} \equiv \sum_{\alpha} (-1)^{\alpha} \frac{dM^{i\alpha}}{dx_{\alpha}} \tag{34}$$

$$M^{*i} \equiv \sum_{\alpha} (-1)^{\alpha} \frac{dM^{i\alpha}_{*}}{dx_{\alpha}}. \tag{35}$$

Rappelons que la force totale généralisée $\mathcal{F}_{\sigma}$ est toujours *nulle* en vertu des équations différentielles de la gravifique.

Remarquons en passant qu'on aura les identités (II, p. 20)

$$(-g)^{\frac{1}{2}} [(DI)^{*}I]^{*} \equiv \sum_{\sigma} \sum_{i} (-1)^{i+1} M^{i} M^{*}_{i\sigma} \delta x_{\sigma}, \tag{36}$$

$$(-g)^{\frac{1}{2}} [(DI^{*})^{*}I^{*}]^{*} \equiv \sum_{\sigma} \sum_{i} (-1)^{i} M^{*i} M_{i\sigma} \delta x_{\sigma} ; \tag{37}$$

d'où, en ajoutant membre à membre et en vertu de (33) :

$$(-g)^{\frac{1}{2}} [DI)^{*}I]^{*} + (-g)^{\frac{1}{2}} [(DI^{*})^{*}I^{*}]^{*} \equiv \sum_{\sigma} \mathcal{F}_{\sigma} \delta x^{\sigma}. \tag{38}$$

De (34) et (35), on déduit immédiatement que

$$\sum_i \frac{d(-1)^i \mathrm{M}^i}{dx_i} \equiv 0 \tag{39}$$

$$\sum_i \frac{d(-1)^i \mathrm{M}^{*i}}{dx_i} \equiv 0. \tag{40}$$

Le théorème du tenseur asymétrique prend une forme très simple; en effet, substituons (31) dans (21); d'où

$$\sum_\alpha \frac{d\mathrm{T}_i^\alpha}{dx_\alpha} \equiv \frac{1}{2} \sum_\alpha \sum_\mu (-1)^{\mu+\alpha} [\mathrm{M}_{i\mu,\alpha} \mathrm{M}_*^{\alpha\mu} - \mathrm{M}_{i\mu,\alpha}^* \mathrm{M}^{\alpha\mu}] + \frac{1}{2} \mathscr{F}_i.$$

Mais, en vertu des équations différentielles de la gravifique, la force totale généralisée $\mathscr{F}_i$ est nulle. On aura, par conséquent :

$$\sum_\alpha \frac{d\mathrm{T}_i^\alpha}{dx_\alpha} = \frac{1}{2} \sum_\alpha \sum_\mu (-1)^{\mu+\alpha} [\mathrm{M}_{i\mu,} \mathrm{M}_*^{\alpha\mu} - \mathrm{M}_{i\mu,\alpha}^* \mathrm{M}^{\alpha\mu}] = \sum_\alpha \sum_\mu \left\{ {i\alpha \atop \mu} \right\} \mathrm{T}_\mu^\alpha. \tag{41}$$

Nous obtenons ainsi une forme nouvelle du théorème du tenseur asymétrique.

Nous avons donné, sous pli cacheté déposé le 16 mai 1918 à l'Académie royale de Belgique, les composantes de la *vitesse généralisée de l'énergie dans un champ électromagnétique pur;* on aura

$$\frac{dx_i}{ds} = (-g)^{-\frac{1}{2}} \sum_\beta \mathrm{T}_\beta^i \sum_\alpha g^{\alpha\beta} \frac{d[(-g)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{L}]}{dx_\alpha}, \qquad i = 1, 2, 3, 4. \tag{42}$$

Ces composantes $\frac{dx_i}{ds}$ satisfont à toutes les exigences de la relativité générale (covariance par rapport à un changement quelconque de variables, équivalence des quatre dimensions de l'espace-temps). Remarquons, d'autre part, que les expressions (42) conduisent à la vitesse de la lumière dans le vide, lorsqu'on considère un champ électromagnétique pur tendant, suivant une loi quelconque, vers zéro, c'est-à-dire vers l'espace-temps non déformé.

Nous définissons l'espace-temps *non déformé* par

$$\delta s^2 = -\delta x_1^2 - \delta x_2^2 - \delta x_3^2 + c^2 \delta x_4^2, \tag{43}$$

où x_1, x_2, x_3 représentent les coordonnées rectangulaires dextrogyres de la géométrie classique, où x_4 désigne le temps, et c la vitesse de la lumière dans le vide.

Si l'on plonge dans un tel espace-temps non déformé (43) un champ électromagnétique pur, on obtient le *champ électromagnétique de Maxwell-Lorentz.* Dans notre mémoire II, nous avons étudié un tel champ sous le nom de *champ c* (voy. II, pp. 15, 16, 19, 20, 33, 34, 38, 39, 43, 48, 49, 50, 51) ; entre la force généralisée $\mathcal{F}_\sigma$ et la force F_σ, considérée dans mon mémoire II, page 33, existe la relation

$$\mathcal{F}_\sigma \equiv (-g)^{\frac{1}{2}} F_\sigma. \tag{44}$$

Quand on se reporte aux valeurs de F_σ (II, p. 33), on remarque que ces forces *ne sont pas nulles;* mais d'autre part, la force totale généralisée $\mathcal{F}_\sigma$ est *toujours nulle;* à cause de (44), il y aurait contradiction. Cela provient de ce que un *champ c* (43) entraîne après lui l'impossibilité de tout phénomène électromagnétique si l'on tient compte des équations différentielles de la gravifique (17) ; en effet, tous les $G_{\mu\nu}$ sont nuls en vertu de (43) ; d'autre part, on aura dans le cas considéré $T = 0$ (II, p. 38) ; il en résulte que tous les $\mathfrak{T}_{\mu\nu}$ sont nuls, donc aussi tous les T_α^β; or (II, p. 38)

$$T_4^4 = \frac{c}{2}(d^2 + h^2), \tag{45}$$

d'où enfin $d = 0$, $h = 0$; ce qui signifie que le champ électromagnétique pur considéré est *nul,* donc aussi les forces F_σ; et la contradiction disparaît.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Dustin (*A.-P.*) et *Zunz* (*Edgard*). A propos des corrélations fonctionnelles entre le thymus et le corps thyroïde. Paris, 1918; extr. gr. in-8° (905-911 pp., fig.).

Hegh (*E.*). Comment nos planteurs et nos colons peuvent-ils se protéger contre les moustiques qui transmettent des maladies? Londres, 1918; in-16 (200 p., fig.).

— Notice sur les glossines ou tsétsés. Londres, s/d.; in-16 (148 p., fig.).

Mayné (*R.*). Insectes et autres animaux attaquant le cacaoyer au Congo belge. Londres, 1917; in-16 (80 p., fig.).

Nuttall (*George H. F.*). Les tiques du Congo belge et les maladies qu'elles transmettent. Londres, 1916; in-16 (51 p., fig.).

Stroobant (*Paul*). Les progrès récents de l'astronomie. Bruxelles, 1915; extr. in-16 (221 p.).

Zunz (*Edgard*) et *György* (*Paul*). A propos de l'action de la morphine sur l'intestin. Liége et Paris, 1914; extr. in-8° (221-242 pp., fig.).

Zunz (*Edgard*). Contribution à l'étude des propriétés antiprotéolytiques et de la teneur en réserve alcaline des exsudats. Paris, 1918; extr. in-8° (249-264 pp., fig.).

— Sur la digestion des protéines de la viande cuite chez les chiens à carotides liées. Cambridge, 1918; extr. gr. in-8° (42-59 pp.).

— Nouvelles recherches sur la digestion des protéines de la viande cuite chez le chien (seconde communication). Cambridge, 1918; extr. gr. in-8° (17-35 pp.).

Zunz (*Edgard*) et *M^lle^ Diakonoff*. Recherches sur l'anaphylaxie par la diglycylglycine. Cambridge, 1916; extr. gr. in-8° (160-168 pp.).

Zunz (*Edgard*) et *Govaerts* (*Paul*). Contribution à l'étude des propriétés antiprotéolytiques du sérum sanguin chez les blessés. Paris, 1917; extr. in-8° (315-353 pp.).

Zunz (*Edgard*), *Govaerts* (*Paul*) et *Peremans* (*Maurice*). Un cas de pleurésie à cristaux de cholestérine. Paris, 1918; extr. in-8° (229-247 pp., fig.).

Zunz (*Edgard*) et *György* (*Paul*). A propos de l'action des acides aminés, des peptides et des protéoses sur la coagulation du sang. Bruxelles, 1914; extr. in-8° (2 p.).

— Contribution à l'étude de l'action des acides aminés, des peptides et des protéoses sur la coagulation du sang. (Première communication : Action sur le plasma oxalaté.) Liége et Paris, 1914; extr. in-8° (312-343 pp.).

— Contribution à l'étude de l'action des acides aminés, des peptides et des protéoses sur la coagulation du sang. (Seconde communication : Action sur les mélanges de sérum et de plasma dioxalaté dilué ou de solution fibrinogène.) Liége et Paris, 1914; extr. in-8° (383-427 pp.).

— Recherches sur l'action des acides aminés, des peptides et des protéoses sur l'hémolyse par le venin de cobra. Bruxelles, 1914; extr. in-8° (2 p.).

Uccle. *Observatoire royal de Belgique.* Annuaire pour l'année 1916, 1917, 1918, 1919. Bruxelles, 1918; 4 vol. in-16.

* * *

TABLE DES MATIÈRES

CLASSE DES SCIENCES. — *Séance du 6 février 1919.*

Distinctions honorifiques : félicitations à MM. Bordet, de la Vallée Poussin, Lameere, Lecointe et Delacre 93

Correspondance : Remerciements de M. Gravis, élu directeur. — Annonce par diverses sociétés savantes de l'exclusion des membres allemands. — Plis cachetés. — M. Jean Massart sollicite le don de documents de guerre pour les asiles de soldats invalides belges. — Hommages d'ouvrages 94

Élections : M. Rutot nommé membre de la Commission administrative. — MM. le Paige, Deruyts, Lagrange, Gilkinet et Fredericq, de la Commission des finances. — MM. Gilkinet et Neuberg, de la Commission de la Biographie nationale 95

Expulsion des associés ennemis 95

Rapports : 1° de M. Massart sur un mémoire soumis pour le concours de 1914; 2° de MM. Swarts et de Hemptinne sur des travaux de MM. Bruylants et Mund, Bruylants et Michielsen; 3° de M. Léon Fredericq sur un mémoire de M. De Meyer 95

Mémoire de M. Stuyvaert 96

Impression dans le Recueil in-4° d'un mémoire de M. Cesàro 97

Impression dans le *Bulletin* d'une note de M. Demoulin 97

L'examen d'un mémoire de M. Damry est remis 97

Rappel des dispositions réglementaires relatives aux lectures 97

Impression d'une *Annexe aux Bulletins* 97

Assemblée générale 98

Concours : Prorogation 98

Notices pour l'*Annuaire* : M. Lecointe écrira celle de Brialmont 98

Motions : 1° relative à l'extension des prérogatives de l'Académie; 2° vote de félicitations à la Commission administrative et à son Secrétaire et au personnel du Secrétariat 99

Bibliographie : *Annuaire* de l'Observatoire 1916-1919; note par Paul Stroobant 99

Communications et Lectures.

Géométrie infinitésimale. — *Sur la transformation de Guichard et sur les systèmes* K, par A. Demoulin 101

Physico-chimie. — *Thermostat pour basses températures,* par P. Bruylants et W. Mund 113

Chimie. — *Nouveau procédé de détermination du poids atomique du tellure,* par P. Bruylants et J. Michielsen (2 fig.) 119

Physiologie. — *L'origine des phases ventriculaires de l'électro-cardiogramme.* Note préliminaire par J. De Meyer (1 pl.) 131

Bulletin bibliographique 147

Séance du 1er mars 1919.

Distinctions honorifiques : Félicitations à MM. Rutot et Fredericq 149
Proposition de M. Stroobant relative au compte rendu des séances 149
CORRESPONDANCE : Remerciements de Leurs Majestés pour l'adresse envoyée par la Classe. — Félicitations du Ministre des Sciences et des Arts aux académiciens qui ont signé la protestation contre la déportation des civils. — Requête de la Ligue des Russes fidèles à la Patrie et aux Alliances. — Félicitations de la Société de physique et d'histoire naturelle de Genève. — Notification de la radiation des membres des pays ennemis par les Sociétés savantes belges. — Hommages d'ouvrages 150
RAPPORTS : Avis de M. Stroobant sur deux notes de M. De Donder 152
Lecture des rapports de MM. Nolf et Fredericq sur le mémoire de concours de 1914 *(Sur la pulsation cardiaque chez les Poissons)* 152
Dépôt aux archives d'un travail de M. Binon sur avis verbal de M. Stuyvaert. 152
Lecture des rapports de MM. Gravis et Massart sur le mémoire de concours de 1914 *(Sur les variations numériques des chromosomes)*. 152

CONCOURS DE 1914 :

Rapports sur le mémoire couronné de M. Marchal. 153-154
Rapports sur le mémoire couronné de M. J. Roskam 154
BIBLIOGRAPHIE : *Annuaire de l'Observatoire royal de Belgique (1917 et 1918)*; note par Paul Stroobant. 156
FONDATION AGATHON DE POTTER : Adoption du Règlement de la Fondation. . 157
Travail soumis 158
ÉCHANGE DE PUBLICATIONS avec les Sociétés savantes des pays ennemis . . 158
Commission du Centenaire. 158
Ordre du jour de l'Assemblée générale 159
Création du Conseil national belge de recherches. 159

Communications et Lectures.

PHYSICO-CHIMIE. — *L'action chimique de l'effluve électrique et la loi de Faraday,* par A. de Hemptinne (6 fig.) 161
GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE. — *Sur les surfaces dont les lignes de courbure d'un système sont planes ou sphériques et sur les familles de Lamé dont les trajectoires orthogonales sont planes ou sphériques*, par A. Demoulin 179
IDEM. — *Sur les systèmes* Θ *et sur les systèmes* R, par A. Demoulin. . . . 185
PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *La vitesse de l'énergie électro-magnétique dans un champ gravifique,* par Th. De Donder 199
IDEM. — *La gravifique,* par Th. De Donder. 201

Bulletin bibliographique 211

◆

3-4-19.

ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

BULLETIN

DE LA

CLASSE DES SCIENCES

1919 — N° 4

SMITHSONIAN INSTITUTION
OCT 12 193
E
NATIONAL MUSEUM

BRUXELLES
HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE
112, Rue de Louvain, 112

1919

CLASSE DES SCIENCES

Séance du 5 avril 1919.

M. A. **Gravis**, vice-directeur, occupe le fauteuil.

M. L. **Le Nain**, secrétaire de la Commission administrative, ff. de secrétaire perpétuel.

M. A. **Rutot** fait fonctions de secrétaire de la Classe.

Sont présents : MM. J. Deruyts, J. Neuberg, Paul Pelseneer, Auguste Lameere, Max. Lohest, Frédéric Swarts, Alphonse Demoulin, A. de Hemptinne, Victor Willem, Paul Stroobant, Charles Julin, *membres;* J. Verschaffelt, Émile Marchal, Georges Lecointe, P. Nolf, M. Stuyvaert, *correspondants.*

Absence motivée : M. Léon Fredericq.

M. Pelseneer, directeur sortant, cède le fauteuil à M. Gravis, qui assiste pour la première fois aux séances et remercie pour son élection.

Le procès-verbal de la dernière séance est lu et approuvé.

La Commission constituée par décision de la Classe en date du 8 février pour examiner l'attitude prise par M. Dollo pendant l'occupation, après avoir entendu ce dernier ainsi que

MM. Rutot, Bordet et Marchal, membres de la Classe, à l'honneur, comme conclusion de son enquête, de proposer à la Classe l'ordre du jour suivant :

« La Classe des sciences déplore que M. Dollo, en refusant de signer la protestation contre la déportation des prétendus chômeurs, n'ait pas cru de son devoir de s'associer à ses confrères de l'Académie royale de Belgique dans leur manifestation d'indéfectible et patriotique résistance à l'ennemi. »

Après lecture des procès-verbaux de la Commission, ces conclusions sont adoptées par la Classe, qui décide d'imprimer l'ordre du jour au *Bulletin* et de le communiquer aux deux autres Classes.

CORRESPONDANCE.

— M. le Ministre des Sciences et des Arts transmet une ampliation de l'arrêté royal du 30 janvier 1919 nommant M. Henri Pirenne, directeur de la Classe des lettres, président de l'Académie pour l'année 1919.

— M. le Profr Corrado Segre, de Turin, associé de l'Académie, exprime « sa vive admiration pour l'héroïsme sublime dont la Belgique a fait preuve lors de l'agression et pendant cette si terrible période ». « Puisse, écrit-il, votre nation recevoir dans l'avenir le prix auquel son héroïsme et ses souffrances lui donnent droit ! »

— L'Académie royale flamande de langue et de littérature de Gand, qui a dû suspendre tous ses travaux pendant la durée de la guerre, félicite l'Académie royale de Belgique d'avoir exclu ses associés ennemis.

— La Société royale de médecine de Gand et la Société royale malacologique de Belgique font connaître qu'elles ont procédé à la radiation des savants appartenant aux pays ennemis, décidé de ne plus envoyer de délégués aux réunions internationales où figureraient des représentants des Empires centraux, et de cesser l'échange des publications avec les mêmes pays.

— Le Comité exécutif du Conseil international de recherches scientifiques fait les communications suivantes :

1° Au cours de la session de juillet 1919, le Conseil s'occupera de la question des brevets, de l'institution de brevets d'un caractère international et de la possibilité que les bureaux des brevets soient mis en rapport avec les Conseils nationaux et le Conseil international. — Il sera demandé à M. le Ministre des Sciences et des Arts de vouloir éventuellement consulter son collègue du Département de l'Industrie et du Travail, qui a les brevets dans ses attributions ;

2° Sur l'invitation de la Classe des sciences, le Conseil international de recherches se réunira à Bruxelles les 16 juillet 1919 et jours suivants. Il demande si les mesures prises par l'Académie pour la création d'un Conseil national de recherches sont assez avancées pour en faire la communication à la prochaine séance.

Ledit Comité transmet les rapports du Comité pour la coopération internationale en chimie, l'avant-projet de convention pour l'Union géophysique internationale et pour l'Union astronomique internationale. Sont joints à ces rapports les propositions de la Royal Society de Londres relatives aux Unions astronomique et géophysique, ainsi qu'un exposé des motifs justifiant partiellement les amendements à apporter éventuellement aux projets soumis par l'Institut de France. — Tous ces documents ont été imprimés et distribués aux membres.

— M. le D^{r} Jacques Roskam remercie pour le prix décerné par la Classe à son mémoire de concours *Sur la pulsation cardiaque chez les poissons.*

— M. René Ledent adresse un pli cacheté concernant une nouvelle méthode d'analyse du lait. — Accepté.

— M. Cesàro, désigné en qualité de commissaire pour l'examen d'un mémoire de concours, se récuse. — Il sera remplacé par M. Cornet.

— M. Cesàro soumet un mémoire *Sur quelques relations numériques pouvant être utiles dans l'interprétation des analyses des beurres falsifiés.* — Impression dans le recueil in-8°.

— M. Léon Fredericq demande l'insertion dans le *Bulletin* d'une brève note rectificative de MM. Gley et Quinquaud concernant un travail imprimé dans le *Bulletin* de juillet 1914. — Adopté.

— M. A. Knapen, lauréat du Prix Lemaire, soumet une note *Sur l'extraction de l'humidité originelle ou de construction dans les bâtiments ou locaux nouvellement construits, au moyen du froid artificiel.* — Renvoi au Conseil supérieur d'hygiène.

— M. Ch. d'Aoust fait une communication relative à un procédé personnel de mnémotechnie. — Dépôt aux archives.

— M. Henri Wilmotte, de Dampremy, envoie un manuscrit *Sur la nature de l'énergie.* — Commissaire : M. de Hemptinne.

— Un mémoire de M. Pienkowski *Sur une forme nouvelle de l'étincelle* est renvoyé à l'examen de MM. de Hemptinne et Verschaffelt.

— Hommages d'ouvrages :

La préhistoire. Éléments de préhistoire générale, par A. Rutot.

La conception nouvelle de l'Univers d'après les données de la science moderne, par A. Rutot.

Contribution à l'étude de l'action des acides aminés, des peptides et des protéoses sur la coagulation du sang, par Edgard Zunz et Paul György.

— Remerciements.

ÉLECTIONS.

La Classe se constitue en comité secret pour la présentation de candidats aux places vacantes.

CONCOURS.

La date de prorogation des divers concours est définitivement établie. Le programme sera publié dans le *Bulletin.*

RAPPORTS.

MM. Nolf et L. Fredericq donnent lecture de leurs rapports sur un mémoire de M. De Meyer : *Électrophysiologie musculaire.*

Rapport de M. Nolf, premier commissaire.

En 1889, d'Arsonval prévoyait, comme conséquence de sa conception de la nature de la contraction musculaire, que pour les mêmes raisons qui font qu'à la contraction active du muscle vivant correspond un phénomène électrique que l'on nommait alors la variation négative du courant propre, il doit se produire un phénomène inverse lors de l'extension passive du muscle vivant.

Il disposa l'expérience comme suit : Deux muscles gastrocnémiens de grenouille sont attachés l'un à l'autre dans le sens longitudinal, de manière que la contraction de l'un produise l'étirement de l'autre. Il appliqua sur chacun d'eux deux électrodes impolarisables, l'une sur l'équateur du muscle, l'autre sur le tendon, et les deux électrodes de chaque paire furent réunies en un circuit contenant un galvanomètre de d'Arsonval ou un électromètre de Lippmann. Il constata à chaque contraction active d'un des muscles une variation électrique négative à laquelle correspondait une variation positive du muscle étiré.

Cette variation positive du muscle allongé n'a pas intéressé les physiologistes jusqu'ici.

M. De Meyer en reprend actuellement l'étude. Il fait observer avec raison que l'expérience de d'Arsonval a été faite, avec des moyens imparfaits, à une époque où les phénomènes électriques de la contraction musculaire étaient mal connus et mal interprétés.

Il a appliqué au problème les ressources d'une technique très perfectionnée. Il a pu ainsi établir, de façon incontestable, qu'effectivement l'allongement passif d'un muscle vivant est accompagné de phénomènes électriques dont il fait une étude soigneuse. Il en détermine les principaux caractères.

Son mémoire est une contribution intéressante au chapitre de l'électrophysiologie animale.

J'en propose l'impression dans les *Mémoires* de la Classe des sciences.

M. Fredericq se rallie à l'avis du premier commissaire. Il émet le souhait que le mémoire soit renvoyé à l'auteur, avec prière de réduire au strict nécessaire le nombre des tracés photographiques.

MM. Léon Fredericq et Nolf déposent leurs rapports sur un autre mémoire : *Électrophysiologie musculaire. Dualité et complexité de la réaction électrique du muscle strié,* par J. De Meyer.

Rapport de M. L. Fredericq, premier commissaire.

Dans un travail précédent, l'auteur a étudié les courants électriques qui se développent dans les muscles de grenouille que l'on soumet artificiellement à des déformations mécaniques.

Comme la contraction musculaire produit ordinairement des déformations de la substance musculaire, on devait s'attendre à voir ces courants électriques de déformation (C. D.) s'ajouter et se combiner aux courants d'action (C. A.) diphasiques classiques, qui caractérisent l'excitation et la contraction des muscles.

Ces prévisions ont été pleinement justifiées. L'auteur, en parcourant la littérature spéciale, a trouvé dans les tracés de courants d'action, publiés par les auteurs, de nombreux exemples de courants pluriphasiques où les phases surajoutées doivent être interprétées comme des courants de déformation.

Il a fait un certain nombre d'expériences d'enrègistrement, au moyen du galvanomètre à corde, des courants d'action de muscles de grenouille se contractant dans des conditions variées.

Ce n'est que si l'on fixe le muscle de manière à l'empêcher de se raccourcir et de se déformer au moment où on l'excite, qu'on obtient les C. A. strictement diphasiques. L'auteur en donne de nombreux exemples (fig. 3, 4, 5, 6, 23). Si l'on permet au muscle de se contracter librement en soulevant un poids et de laisser retomber et osciller le poids, on obtient un courant à multiples oscillations. L'auteur donne de ce dernier phénomène (fig. 10, 11, 17, 19, 20, 24, 29, 30, 31) un nombre surabondant d'exemples. Il serait intéressant de vérifier si ces oscillations électriques accompagnent les oscillations mécaniques du muscle étiré par le poids qui retombe. Malheureusement, l'auteur ne nous donne pas la courbe myographique : nous ignorons donc à quelles phases de la secousse musculaire correspondent ces courants de déformation, de forme oscillatoire, les plus caractéristiques parmi ceux qu'il reproduit.

En faisant varier quelques-unes des conditions de la déformation du muscle qui se contracte, l'auteur obtient des combinaisons variées de C. A. et de C. D., dont il fait une longue énumération.

Mais la reproduction de tous les tracés photographiques des planches I et II entraînerait à des dépenses qui ne semblent pas justifiées. On pourrait demander à l'auteur de fournir un calque noir sur blanc schématisant quelques-uns des graphiques les plus caractéristiques. On se bornerait à une reproduction par la zincographie, de manière à avoir quelques petits clichés à intercaler dans le texte. Les autres tracés au trait pourraient, sans inconvénient, être également réduits en nombre.

Je propose l'impression de l'intéressant travail de M. De Meyer dans les publications de la Classe.

M. Nolf, second commissaire, se rallie à l'avis du premier commissaire.

Les deux travaux seront publiés dans le recueil des *Mémoires* après réduction du nombre des tracés et figures au strict minimum.

FONDATION AGATHON DE POTTER.

La Commission prévue par l'article 5 du Règlement est composée de MM. de la Vallée Poussin (mathématiques), de Hemptinne (physique), Swarts (chimie), le Paige (astronomie), Lohest (sciences minérales), Massart (biologie végétale), A. Lameere (biologie animale).

Règlement.

Article premier. — Il est institué sept prix Agathon de Potter, respectivement destinés à récompenser les meilleurs travaux parus dans le domaine des sciences suivantes : mathématiques, astronomie, physique, chimie, biologie animale, biologie végétale, sciences minérales.

Les $^3/_{10}$ des revenus disponibles de la fondation sont consacrés à ces prix ; ils sont partagés comme suit :

$^6/_{36}$ pour les sciences mathématiques ;
$^6/_{36}$ pour la physique ;
$^6/_{36}$ pour la chimie ;
$^6/_{36}$ pour les sciences minérales ;
$^5/_{36}$ pour la biologie animale ;
$^4/_{36}$ pour la biologie végétale ;
$^3/_{36}$ pour l'astronomie.

Les prix de Potter sont triennaux et accordés à des travaux effectivement publiés dans le cours de la dernière période triennale. Ils pourront être partagés, même en fractions d'inégale importance.

Les périodes triennales seront comptées à partir du 1er janvier 1919.

Art. 2. — Les $^5/_{10}$ des revenus sont destinés à subsidier soit des recherches en cours ou projetées, soit des voyages scientifiques, soit la publication d'ouvrages, se rapportant à l'une des sciences énumérées à l'article 1er.

La Fondation de Potter subsidiera de préférence la publication d'ouvrages ayant pour objet d'exposer un ensemble de recherches et ne pouvant trouver place dans les publications de l'Académie, en raison de ce que les résultats des travaux auxquels ils se rapportent ont déjà été publiés en tout ou en partie. Toute publication faite avec le concours de la Fondation de Potter devra le mentionner en tête de son titre.

Art. 3. — Les $^2/_{10}$ des revenus sont consacrés à récompenser les découvertes capables d'améliorer les conditions de travail dans les industries dangereuses et à encourager les recherches à entreprendre dans ce but.

Art. 4. — Si la totalité des revenus n'a pas été affectée aux objets énumérés aux articles 1er, 2 et 3, le reliquat devenu disponible sera réservé.

La réserve ainsi constituée sera consacrée à récompenser ou à subsidier des travaux d'une importance considérable se rapportant à l'un quelconque des objets prévus aux articles 1er, 2 et 3.

Ces récompenses ou subsides devront être proposés par un ou plusieurs membres de la Classe.

Art. 5. — Une Commission de sept membres, représentant les différents groupes de sciences énumérées à l'article 1er, est chargée de recevoir les propositions des commissaires compétents relatives à l'attribution de prix ou récompenses, d'examiner les demandes de subsides et de faire à la Classe les propositions pour la répartition des fonds disponibles.

Les membres de cette Commission sont élus par la Classe pour un terme de quatre ans.

La Commission se réunit obligatoirement deux fois par an : en mars et en octobre. Elle pourra en cas d'urgence être réunie en séance extraordinaire, à la demande de la Classe. Dans les séances d'avril et de novembre, la Commission présentera à la Classe des propositions de répartition.

Art. 6. — Les travaux présentés en vue de l'obtention d'un prix prévu à l'article 1er seront soumis au jugement de trois commissaires; la Classe pourra choisir ceux-ci en dehors de l'Académie.

La Classe désignera dans les mêmes conditions trois commissaires pour faire rapport sur les propositions de récompenses ou subsides prévus aux articles 2, 3 et 4.

Les commissaires tiendront une séance de délibération pour formuler de commun accord leurs propositions; celles-ci seront transmises à la Commission de la Fondation.

Art. 7. — Les membres de la Commission de la Fondation recevront, pour chaque séance à laquelle ils prennent part, un jeton de présence de 10 francs et une indemnité de déplacement établie à raison de 6 francs par fraction indivisible de 25 kilomètres.

Les commissaires nommés par la Classe en application des stipulations de l'article 6 seront indemnisés de la même manière pour la séance dans laquelle ils discuteront leurs rapports; néanmoins, pour les commissaires étrangers à l'Académie, le jeton de présence sera de 20 francs.

La charge de ces indemnités incombe à la Fondation.

Art. 8. — Les demandes de subsides et les travaux destinés aux concours devront être adressés au Secrétaire perpétuel et accompagnés éventuellement de pièces justificatives.

Les bénéficiaires de subsides auront à fournir annuellement un rapport sur les résultats des travaux ou voyages subsidiés.

Art. 9. — L'Académie se réserve le droit de réclamer, après un terme de cinq ans, les objets acquis intégralement à l'aide des subsides accordés, à moins que la nature des recherches oblige à les détruire ou à les transformer.

Les objets restitués pourront être confiés à d'autres personnes désireuses de les utiliser pour leurs travaux ou donnés à un établissement public.

Art. 10. — Un même prix de Potter ne peut être accordé deux fois à la même personne avant un intervalle de neuf ans.

Art. 11. — Les bénéfices de la Fondation de Potter sont réservés aux Belges.

Les membres et les correspondants de l'Académie ne sont pas admis à concourir pour les prix mentionnés à l'article 1er.

Art. 12. — La Classe des sciences examinera s'il y a lieu de reviser le présent règlement, si la revision est proposée par dix de ses membres ou par la Commission de la Fondation.

PRÉROGATIVES ACADÉMIQUES.

Le rapport de la Commission spéciale est adopté. Il sera imprimé et distribué aux membres des autres Classes et à ceux de l'Académie de médecine. La question restera à l'ordre du jour de la prochaine séance.

CONSEIL INTERNATIONAL DE RECHERCHES

ET

CONSEIL NATIONAL BELGE DE RECHERCHES.

La Classe charge une Commission de trois membres, composée de MM. Pelseneer, Swarts et Lecointe :

1° D'élaborer un projet de statuts définitifs pour le Conseil national belge de recherches à créer;

2° De prendre toutes les mesures propres à l'organisation de l'Assemblée constitutive du Conseil international de recherches, qui se tiendra à Bruxelles, en juillet 1919.

D'autre part, elle décide :

1° Que le Comité astronomique national belge comprendra provisoirement MM. le Paige, Lagrange, Stroobant et Lecointe, qui pourront s'adjoindre, par cooptation, d'autres membres éventuellement étrangers à l'Académie;

2° Que le Comité géophysique national belge comprendra provisoirement MM. le Paige, Lagrange, Lohest, de Hemptinne, Stroobant, Verschaffelt, Lecointe et van Aubel, qui pourront s'adjoindre d'autres membres éventuellement étrangers à l'Académie;

3° Qu'un Comité, composé de MM. Jorissen, Delacre, Swarts et Crismer, étudiera les propositions formulées par le Comité « pour la coopération internationale en chimie »;

4° Que d'autres Comités, composés des membres compétents de la Classe des sciences, pourront être constitués d'urgence directement, à la demande de MM. Pelseneer, Swarts et Lecointe, pour l'étude de questions spéciales relatives aux diverses divisions projetées pour le Conseil national belge de recherches.

Ces divers Comités, qui constitueront ultérieurement les divisions correspondantes du Conseil national belge de recherches, examineront les statuts soumis à l'Académie par le Comité exécutif du Conseil international de recherches pour l'Union astronomique, pour l'Union géophysique et pour l'Union chimique internationales en voie de constitution.

MM. Pelseneer, Swarts et Lecointe entreront en relation directe immédiate avec les industriels et groupements d'ingénieurs qu'ils jugeront susceptibles d'être utilement consultés pour les parties industrielles et techniques du projet. Leurs propositions définitives devraient pouvoir être examinées à la séance du mois de mai de la Classe des sciences et être transmises aussitôt au Ministre des Sciences et des Arts, afin qu'il en saisisse, à son tour, les Départements ministériels intéressés, notamment : le Ministère de l'Industrie, du Travail et du Ravitaillement; le Ministère des Affaires Économiques; le Ministère de la Guerre; le Ministère des Chemins de fer, de la Marine, des Postes et des Télégraphes; le Ministère des Travaux publics; le Ministère des Colonies, et le Ministère des Affaires Étrangères.

COMMUNICATIONS ET LECTURES.

BOTANIQUE. — **Connexions anatomiques de la tige et de la racine,**

par A. GRAVIS, directeur de la Classe.

Note préliminaire.

La tige et la racine des Phanérogames possèdent des structures fondamentalement différentes. La première est caractérisée par l'existence de plusieurs faisceaux libéro-ligneux à bois centrifuge (fig. 1, p. 230) ; la seconde, par un cylindre central dans lequel les pôles ligneux, dont le développement est centripète, alternent avec les pôles libériens (fig. 7). Dans les plantules en germination, la tige et la racine étant dans le prolongement l'une de l'autre, on s'est demandé comment ces deux structures peuvent se raccorder l'une à l'autre.

Dès 1869, Ph. Van Tieghem a cherché à expliquer « la transformation des faisceaux simples libériens et ligneux de la racine dans les faisceaux doubles libéro-ligneux de la tige » en admettant que « les faisceaux ligneux de la racine subissent un dédoublement et une torsion de 180° ». M. R. Gérard, en 1881, défendit cette thèse dans un grand mémoire intitulé : *Recherches sur le passage de la racine à la tige*. Malgré les critiques de divers auteurs, la question fut généralement considérée comme résolue.

En 1910, dans une communication préliminaire faite au Congrès de Bruxelles, M. G. Chauveaud a combattu la théorie du dédoublement et de la torsion : « Il n'y a là, disait-il, qu'une apparence causée précisément par la disparition successive des vaisseaux anciens et par l'apparition des vaisseaux nouveaux. »

Cette affirmation est solidement établie par l'important mémoire publié, l'année suivante, dans les *Annales des sciences naturelles*.

Quelques auteurs, M. Dangeard (1889), Miss Thomas (1907) et M. Chauveaud lui-même (1910), ont mis en avant une interprétation basée sur la Phyllogénie. Portée sur ce terrain, la question a rencontré le problème de la valeur morphologique du cotylédon unique des Monocotylées et de l'origine de cette classe de végétaux. Miss Sargant, MM. Hill, Henslow et Compton ont émis, à cette occasion, des vues très intéressantes, mais divergentes. Les plantules ont, en outre, fait l'objet, dans ces dernières années, de nombreux travaux d'anatomie comparée ou de monographies aux points de vue systématique et physiologique.

J'ai eu l'occasion d'étudier l'anatomie des plantules de l'*Urtica dioïca* en 1885 et celles du *Tradescantia virginica* en 1898. Depuis lors, j'ai examiné plus de deux cents espèces appartenant à cent quatre-vingt-six genres et à soixante-cinq familles de plantes Gymnospermes et Angiospermes. En attendant le moment de faire à l'Académie l'exposé complet de ces recherches, je désire faire connaître, dès maintenant, quelques-uns des résultats généraux.

Avec M. Chauveaud, je considère que ce qui a été appelé « le passage de la racine à la tige » est une illusion. Les tissus de la racine ne passent pas dans la tige : c'est seulement l'observateur qui, examinant une série de coupes transversales successives (qu'on a l'habitude de pratiquer de bas en haut), passe d'une coupe à une autre, et ainsi d'un membre à l'autre. La racine, d'ailleurs, n'engendre nullement la tige. L'expression « passage de la racine à la tige » est donc complètement défectueuse et je propose de la remplacer par celle de « connexions anatomiques de la tige et de la racine ».

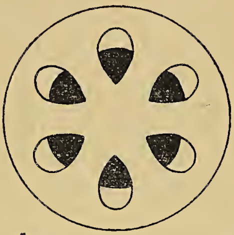
Entre ces deux membres nettement définis anatomiquement, ainsi qu'il a été dit au début, existe une région nommée hypocotyle. Sa structure est fort variable : elle dépend du mode de jonction des tissus conducteurs des cotylédons et des feuilles primordiales avec ceux de la racine. Cette jonction, que les nécessités physiologiques rendent indispensable, est réalisée dans l'hypocotyle (*Mercurialis*), ou bien elle est localisée au-dessus de lui, dans le nœud cotylédonaire et les pétioles des cotylédons (*Urtica*), ou enfin, elle est située sous l'hypocotyle, dans la région basilaire de la racine (*Cucurbita*). Dans le premier cas, une coupe transversale menée vers le milieu de l'hypocotyle montre plusieurs faisceaux libéro-ligneux à bois centrifuge et plusieurs pôles ligneux centripètes (structure caulo-radicoïde). Dans le deuxième cas, une coupe pratiquée au même niveau ne rencontre que des pôles ligneux centripètes et du liber disposés comme dans une racine (structure radicoïde). Dans le troisième cas, enfin, elle montre uniquement des faisceaux libéro-ligneux à bois centrifuge (structure cauloïde).

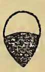
Le problème qui se pose est donc celui-ci : Comment les faisceaux cotylédonaires, foliaires et sympodiques sont-ils rattachés au cylindre central de la racine? Disons tout de suite que le raccordement des voies conductrices se fait par l'intermédiaire de groupements spéciaux que nous désignerons sous le nom de *triades*.

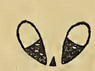
Une triade se compose essentiellement d'un groupe de trachées centripètes compris entre les deux moitiés d'un faisceau libéro-ligneux à bois centrifuge (fig. 4). A un niveau supérieur, les trachées centripètes n'existent pas et les deux moitiés du faisceau sont unies en un faisceau normal (fig. 2). A un niveau inférieur, c'est le bois centrifuge qui fait défaut, tandis que les massifs libériens alternent avec le bois centripète (fig. 6).

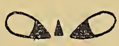
La figure 8 montre le trajet des éléments ligneux centrifuges (traits continus) et des éléments ligneux centripètes (trait interrompu).

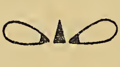
La plantule du *Fagus sylvatica* L. semble avoir conservé assez fidèlement l'organisation d'un type primitif. Son hypocotyle contient huit triades (fig. 11), sa racine huit pôles ligneux (fig. 13), le premier entre-nœud de sa tige une vingtaine de faisceaux (fig. 9). La figure 12 représente, à un fort grossissement, l'une des triades de l'hypocotyle. Dans la figure 14, on voit l'un des pôles ligneux centripètes de la racine alternant avec les pôles libériens. Dans la figure 10, enfin, on reconnaît l'un des faisceaux libéro-ligneux à bois centrifuge de la tige.

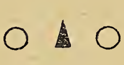

1

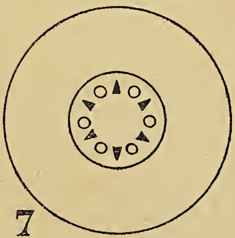

2

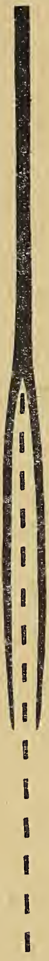

3


4


5

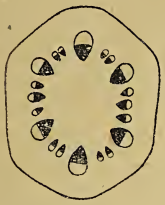

6


7

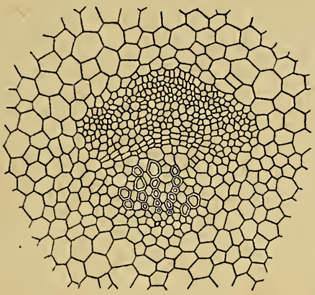

8

Il est à noter que dans l'hypocotyle les trachées centripètes, différenciées généralement très tôt, sont étirées et plus ou moins résorbées lors de l'accroissement intercalaire : elles sont alors très difficiles à retrouver. Pour bien se rendre compte de la structure des plantules, il est donc nécessaire de les étudier à un stade très jeune et de les suivre dans leur développement pour constater les modifications qui se produisent ensuite.

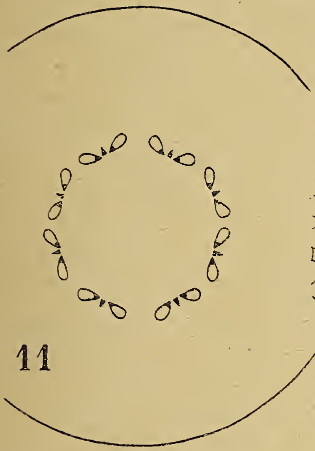
Les faisceaux qui entrent dans la constitution des triades, et que nous appellerons faisceaux triadants, sont les faisceaux cotylédonaires, parfois aussi les faisceaux foliaires des-



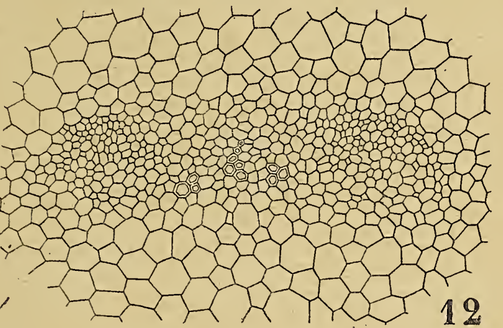
9



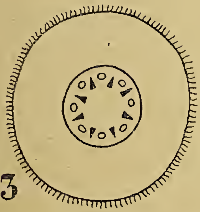
10



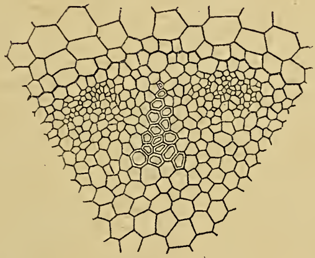
11



12



13



14

Fagus sylvatica L. : FIG. 9 : Entrenœud [1] de la tige principale. — FIG. 10 : Un de ses faisceaux libéro-ligneux. — FIG. 11 : Hypocotyle. — FIG. 12 : Une de ses triades. — FIG. 13 : Racine principale. — FIG. 14 : Un de ses pôles ligneux centripètes entre deux massifs libériens.

cendant des feuilles primordiales, plus rarement les faisceaux sympodiques (résultant de la réunion de faisceaux foliaires descendant des feuilles supérieures). Les faisceaux triadants peuvent être en nombre égal, inférieur ou supérieur à celui des pôles ligneux de la racine. Le premier cas est le plus régulier; dans le deuxième cas, il y a un ou plusieurs pôles ligneux de la racine qui se terminent en pointe libre sans entrer dans la constitution de triades; dans le troisième cas, il y a des triades normales et aussi des triades bi ou plurivalentes : ces dernières correspondent à deux ou à plusieurs nervures et non pas à une seule.

Les triades affectent, d'ailleurs, diverses manières d'être : elles peuvent être normales, étalées, étagées, fendues, implicites, plurivalentes, accouplées, accolées, fusionnées ou concentrées. Elles deviennent parfois presque méconnaissables. Ces modifications résultent du rapport très variable qui existe entre le nombre des triades et le diamètre de la plantule, et aussi du rapport entre le nombre des faisceaux libéro-ligneux et le nombre des pôles ligneux centripètes.

Dans les espèces qui ont un très gros embryon, les triades sont assez nombreuses : il y en a douze dans le *Castanea vesca ;* huit dans le *Quercus Robur ;* six dans l'*Aesculus Hippocastanum ;* quatre dans le *Juglans regia ;* trois dans le *Pisum sativum ;* enfin, le nombre est réduit à deux chez beaucoup de Dicotylées dont l'embryon est de petite taille.

Dans ce dernier cas, l'organisation est fort condensée et profondément modifiée. C'est malheureusement par ces exemples particulièrement difficiles que les anatomistes ont débuté. Aussi pouvons-nous maintenant concevoir qu'il n'était pas possible, par cette voie, de se rendre compte du type primitif et de ses variations.

L'existence des triades est un fait général qui ne cesse de se manifester que dans les cas de différenciation trop peu marquée des tissus conducteurs (plantes aquatiques ou terrestres à embryon minuscule).

⁂

Outre l'intérêt qu'elle présente au point de vue de l'anatomie comparée des plantules, la connaissance des triades fournit les éléments de la solution de diverses questions très importantes. Je ne citerai que celles qu'il m'a été possible d'aborder.

I. *Circulation de l'eau dans la plantule.* — Au début de la germination, des voies de circulation doivent être rapidement établies entre la racine et les cotylédons, puis entre la racine et les feuilles primordiales, finalement entre la racine et les feuilles suivantes par l'intermédiaire de la tige. Une première circulation s'établit par les triades, mais celles-ci étant rapidement mises hors d'usage par suite de l'accroissement intercalaire, une deuxième circulation est réalisée par les tissus secondaires qui, comme on sait, se continuent sans interruption ni déplacement à travers la tige et la racine.

C'est ainsi que les choses se passent chez les Gymnospermes et les Dicotylées, mais chez les Monocotylées, la racine principale étant généralement éphémère, comme le cotylédon lui-même, la première circulation suffit. Des racines latérales, formées successivement, se relient aux feuilles par le moyen d'un réseau radicifère.

II. *Valeur morphologique du cotylédon unique des Monocotylées et origine de ces plantes au point de vue de l'évolution.* — Étant admis que les Dicotylées sont antérieures aux Monocotylées, on doit se demander si le cotylédon unique de ces dernières provient de la soudure de deux cotylédons, ou bien s'il représente seulement l'un des deux, l'autre s'étant atrophié ou bien s'étant transformé en une feuille semblable aux feuilles primordiales. Miss Sargant a défendu la première hypothèse, sans l'étayer de faits bien démonstratifs. M. Hill a fait connaître, chez les Pipéracées, une organisation qui fournit de très sérieux arguments en faveur de la thèse opposée.

L'étude des triades m'a démontré que chez les Monocotylées, l'un des cotylédons primitifs s'est transformé partiellement, puis complètement en un suçoir, tandis que l'autre est devenu une feuille aérienne s'accroissant après le cotylédon proprement dit.

III. *Plantes dites pseudo-Monocotylées.* — Sous ce nom, on désigne parfois certaines espèces Dicotylées qui semblent ne posséder qu'un seul cotylédon : *Ficaria ranunculoïdes, Cyclamen Persicum, Corydalis cava,* etc. D'autres Dicotylées présentent accidentellement des exemples de syncotylie réalisée à des degrés divers : *Helianthus annuus syncotyleus, Malva sylvestris, Hedera helix, Celtis occidentalis, Rumex Patientia,* etc. En faisant l'anatomie comparée de tous ces cas litigieux, j'ai pu retrouver les triades et par leur moyen montrer que les pseudo-Monocotylées sont des syncotylées dont l'anomalie est héréditaire et que leur organisation n'a rien de commun avec celle des Monocotylées véritables.

IV. *Origine de la structure des tiges et des racines au point de vue de la phylogénie.* — Cette question, restée longtemps très obscure, semble aujourd'hui pouvoir s'élucider à la lumière des découvertes paléontologiques et grâce à une connaissance plus parfaite de la structure des plantules en germination.

Chez certains végétaux trouvés à l'état fossile dans les terrains primaires, les axes possédaient la structure des tiges associée à celle que nous considérons comme caractéristique des racines. Chez les Diploxylées, notamment, on a reconnu la coexistence de bois centripète et de bois centrifuge dans les axes aériens, aussi bien que dans les axes souterrains. Les axes qui primitivement n'étaient pas différenciés en tiges et en racines peuvent s'appeler des rhizocaules. Dans ces rhizocaules, des trachées centripètes en rapport avec l'absorption devaient exister en même temps que des trachées centrifuges permettant la transpiration par les feuilles. Ces deux sortes d'éléments ligneux étaient disposés en triades, disposition dont on retrouve la trace dans les Sigillaires et les Lépidodendrons. Dans d'autres plantes, apparues plus tard, la disparition du bois centripète, dans les axes aériens, a donné naissance aux tiges monoxylées à bois entièrement centrifuge, comme la disparition du bois primaire centrifuge des axes souterrains a abouti à l'organisation des racines.

V. *Signification des triades.* — Au point de vue physiologique, les triades ont une signification précise : elles assurent la circulation minérale entre la racine et les cotylédons, et bientôt après entre la racine et les premières feuilles; elles permettent, en même temps, la circulation plasmique en sens inverse. Le contact des trachées centrifuges et des trachées centripètes, d'une part, celui des éléments libériens de la tige et de la racine, d'autre part, sont réalisés de la façon la plus simple et la plus intime dans les complexes que nous avons nommés triades. La fonction de double circulation étant d'une importance capitale dès le début de la végétation, il se conçoit que les triades, qui réalisent le meilleur dispositif assurant cette fonction, se soient maintenues chez toutes les Phanérogammes.

D'autre part, au point de vue phylétique, l'association du bois centripète et du bois centrifuge dans les triades est une organisation diploxylée qui rappelle celle des Lépidodendrées et Sigillariées. Se manifestant au début de l'évolution ontologique, elle constitue un bel exemple d'application de la loi de Serres : « l'Ontogénie répète la Phylogénie ».

L'existence de trachées centripètes dans les pétioles cotylédonaires, qui semble à première vue si extraordinaire, n'est, en somme, qu'un cas semblable à celui de l'existence du bois centripète dans les pétioles des Cycadées adultes.

J'espère pouvoir, à bref délai, soumettre à la Classe des sciences le travail complet rédigé sur ces divers sujets.

Liége, le 15 mars 1919.

Liste des recueils bibliographiques des sciences mathématiques, physiques, chimiques et naturelles,

présentée par Jean MASSART, membre de l'Académie.

Dans ces vingt dernières années, les éditeurs allemands avaient réussi à monopoliser presque entièrement les publications bibliographiques. Aussi étions-nous obligés de recourir pour la plupart de nos travaux à quelque *Centralblatt, Jahresbericht, Ergebnisse, Fortschritte,* etc. Pourtant ces recueils étaient loin de nous satisfaire, car bien souvent les comptes rendus, fort prolixes pour les travaux allemands, étaient brefs et injustes pour les autres.

Les conférences interacadémiques tenues à Londres du 9 au 11 octobre 1918, et à Paris du 26 au 29 novembre 1918, ont admis en principe que les Alliés se dégageraient de cette sujétion.

Il fallait tout d'abord faire le relevé des recueils bibliographiques actuellement existants. C'est ce tableau que j'ai essayé de dresser, avec l'aide de nombreux collègues : MM. de la Vallée Poussin pour les mathématiques, Stroobant pour l'astronomie, Chavanne pour la chimie, Verschaffelt pour la physique, Lacroix pour la minéralogie, de Margerie et Hegenscheidt pour la géographie et la géologie, Lameere et Brachet pour la zoologie, De Meyer pour la physiologie, Ley pour la psychologie. La liste a été revue par M. Masure, secrétaire de l'Office international de bibliographie.

Les recueils mentionnés sont de cinq sortes :

1. Les catalogues de titres sans résumés.

Le principal de ces ouvrages est *International Catalogue of Scientific Literature,* édité par la « Royal Society of London », depuis 1902. Il y a annuellement un volume spécial pour chaque science. Nous le citons ici une fois pour toutes.

B. Les recueils de résumés, où les ouvrages sont résumés au fur et à mesure de leur publication.

C. Les annuaires, où les résumés sont classés méthodiquement.

D. Les monographies, où des questions sont mises au point par des spécialistes.

E. Les recueils de références : catalogues d'espèces animales ou végétales (avec ou sans description), tables de constantes, descriptions de corps nouveaux, etc.

Ne sont indiquées dans cette liste que les publications qui embrassent complètement un domaine plus ou moins étendu, — et non pas les innombrables périodiques qui ont une petite annexe bibliographique.

Les nombres entre crochets indiquent combien de volumes avaient paru au début de la guerre.

A gauche de chaque page sont rangées les publications alliées et neutres; à droite, les allemandes et les autrichiennes.

⁂

On verra que dans beaucoup de domaines nous possédons déjà les périodiques voulus. Nous aurions simplement à nous entendre pour les soutenir efficacement, à la fois en y collaborant et en y faisant abonner par les pouvoirs publics les laboratoires, les musées, les universités, les grandes bibliothèques, etc. Dans d'autres branches il sera nécessaire de créer de nouveaux recueils bibliographiques.

⁂

Une des pierres d'achoppement d'une publication de ce genre est la difficulté d'obtenir rapidement des comptes rendus bien faits. Il n'est pas facile, semble-t-il, de résumer convenablement un travail scientifique; toujours est-il que chacun de nous constate trop souvent, en consultant un résumé, que le point qu'il cherche n'y est précisément pas touché. Cela tient à ce que l'auteur du résumé, si consciencieux soit-il, n'insiste pas sur les points qui paraissaient les plus importants à l'auteur du mémoire, mais sur ceux qui l'intéressent lui-même.

Cet inconvénient serait supprimé, en même temps qu'on allègerait considérablement la besogne du rédacteur en chef, si chaque auteur mettait en tête de son travail un sommaire, suffisamment détaillé, avec l'indication des pages. Ce résumé servirait d'abord à guider le lecteur du mémoire; ensuite il serait reproduit intégralement dans le recueil bibliographique.

Un autre avantage est que les résumés seraient fournis en même temps que les travaux originaux, d'où rapidité de leur publication.

Ce système n'est pas simplement celui des « résumés d'auteur », tels qu'on en rencontre dans les recueils bibliographiques actuels. Nous croyons devoir insister sur l'utilité de faire rédiger le sommaire en même temps que le mémoire, de façon qu'il en soit réellement le résumé, et non pas une paraphrase rédigée après coup.

Il serait facile, pensons-nous, de s'entendre avec les secrétaires des sociétés scientifiques et avec les éditeurs de périodiques pour qu'ils demandent à tous les auteurs d'ajouter à leurs travaux un sommaire détaillé. Les auteurs eux-mêmes se rendront d'ailleurs bien vite compte des avantages considérables du système que nous préconisons.

En quelle langue seront les recueils bibliographiques? Nous serions d'avis de publier les résumés indifféremment en français, en anglais et en italien, en laissant à chaque auteur le choix de la langue; quand le travail est en une langue autre que l'une de celles-ci, on pourrait demander à l'auteur d'y mettre un résumé en français. Il semble, en effet, tout indiqué de faire du français la langue seconde pour les relations intellectuelles, de même que l'anglais serait la langue seconde pour les relations commerciales.

I. — SCIENCES MATHÉMATIQUES.

1. — **Mathématiques.**

A. — Catalogues de titres.

Répertoire bibliographique des sciences mathématiques. (Paris, Gauthier-Villars.) [Sur fiches].

B. — Résumés non classés.

Bulletin des sciences mathématiques. (Paris, Gauthier-Villars.) [48 vol.].

C. — Annuaires avec résumés classés.

Revue semestrielle des publications mathématiques. (Société mathématique d'Amsterdam.) [22 vol.].

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. (Berlin, G. Reimer.) [42 vol.].

2. — **Astronomie.**

A. — Catalogues de titres.

B. — Résumés non classés.

Revue des publications astronomiques. (Dans Bulletin astronomique, Paris.) [31].

C. — Annuaires avec résumés classés.

Notes on some Points connected with the Progress of Astronomy during the Past Year. (Dans Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. Londres.) [52 vol.].

P. Stroobant. Les progrès récents de l'astronomie. (Dans Annuaire de l'Observatoire royal de Belgique. Bruxelles.) [6 vol.].

Astronomischer Jahresbericht. (Berlin, G. Reimer.) [15 vol.].

Literarischer Beiblatt zu den Astronomischen Nachrichten. (Kiel, Kobold.) [2 vol.].

D. — Monographies de questions spéciales.

E. — Recueils de références.

Connaissance des temps. (Paris.) [Annuel.]

The Nautical Almanac and Astronomical Ephemeris. (London, Murray.) [Annuel.]

The American Ephemeris and Nautical Almanac. (Washington.) [Annuel.]

Annuaire du Bureau des Longitudes. (Paris.)

J.-C. HOUZEAU. Vade-mecum de l'astronome. (Bruxelles, 1882.)

Berliner Astronomisches Jahrbuch. (Berlin, F. Dümmler.) [Annuel.]

N. VALENTINER, Handwörterbuch der Astronomie. (Leipzig, Barth.) [5 vol.]

II. — CHIMIE ET PHYSIQUE.

A. — Catalogues de titres.

B. — Résumés non classés.

Journal of the Chemical Society of London : Abstracts of Papers. [39 vol.].

Chemical Abstracts, published by the American Chemical Society. [22 vol.].

Bulletin de la Société chimique de France (travaux étrangers). [25 vol.].

Chemisches Zentralblatt. (Berlin, Friedländer.) [99 vol.].

Biochemisches Centralblatt. (Leipzig, Borntrager.) [12 vol.].

Zentralblatt für Biochemie und Biophysik. (Leipzig, Borntrager.) [16 vol.].

C. — Annuaires avec résumés classés.

Annual Reports on the Progress of Chemistry. (London, Gurney and Jackson.) [11 vol.].

Reports of the Progress of Applied Chemistry, issued by the Society of Chemical Industry. (Depuis 1916.).

Jahresbericht über die Fortschritte der Chemie. (Braunschweig, Vieweg.) [98 vol.].

Jahresbericht über die Fortschritte der Thierchemie. (Wiesbaden, Bergmann.) [48 vol.].

Beiblätter zu den Annalen der Physik. (Leipzig, Barth.) [38 vol.].

Fortschritte der Physik. (Braunschweig, Vieweg.) [70 vol.].

J. SCHMIDT, Jahrbuch der organischen Chemie. (Stuttgart, Enke.) [7 vol.].

D. -- Monographies de questions spéciales.

Jahrbuch für Radioaktivität und Elektronik. (Leipzig, Hirzel). [11 vol.].

E. — Recueils de références.

WURTZ, Dictionnaire de chimie. (Paris, Hachette.) [14 vol.].

Tables de constantes de la Société française de physique. [1 vol.].

MARIE, Tables annuelles de constantes et données numériques de chimie, de physique et de technologie. (Paris, Gauthier-Villars.) [3 vol.].

CLARKE, A Table of specific Gravity for Solids and Liquids. (London, Macmillan.) [1 vol.].

CORNELLY, Physico-Chemical Constants. Melting and boiling point tables. (London, Harrisson.) [2 vol.].

KAYE AND LABY, Tables of Physical and Chemical Constants and some Mathematical Functions. (London, Longmans and C°.) [1 vol.].

ABRAHAM ET SACERDOTE, Recueil de constantes physiques. (Paris, Gauthier-Villars.) [1 vol.].

DUFET, Recueil de données numériques, publié par la Société française de physique. *Optique.* (Paris, Gauthier-Villars.) [1 vol.].

WATTS, Index of Spectra. (Manchester.) [1 vol.].

THORPE, Dictionary of applied Chemistry. (London, Longmans.) [2 vol.].

BEILSTEIN, Handbuch der organischen Chemie. (Hamburg, Voss.) [9 vol.].

RICHTER, Lexikon der Kohlenstoffverbindungen. (Hamburg, Voss.) [4 vol.].

STELZNER, Litteraturregister der organischen Chemie. (Braunschweig, Vieweg.) [3 vol.].

DAMMER, Handbuch der anorganischen Chemie. (Stuttgart, Enke.) [3 vol.].

LANDOLT UND BÖRNSTEIN, Physikalisch-Chemische Tabellen. (Berlin, Springer.) [1 vol.].

ABEGG UND AUERBACH, Handbuch der anorganischen Chemie. (Leipzig, Hirzel.) [6 vol.].

GMELIN-KRAUT, Handbuch der organischen Chemie. (Heidelberg, Winter, 1807-1808.)

H. KAYSER, Handbuch der Spectroscopie. (Leipzig, Hirzel.) [3 vol.].

III. — MINÉRALOGIE, GÉOLOGIE ET GÉOGRAPHIE PHYSIQUE.

A. — Catalogues de titres.

Bibliotheca geographica. (Berlin, Kühl.) [18 vol.].

B. — Résumés non classés.

The Geographical Journal : Geographical Literature of the Month and New Maps. (London.)

Zeitschrift für Krystallographie und Mineralogie. (Leipzig, Engelmann.) [54 vol.].

Neues Jahrbuch für Mineralogie, Geologie und Paleontologie. (Stuttgart, Schweizerbart.) [116 vol.].

Geologisches Centralblatt. Anzeiger für Geologie, Petrographie, Paleontologie. (Leipzig, Borntraeger.) [20 vol.].

Petermann's Geographische Mitteilungen : Litteratur-Berichte und Ergänzungshefte. (Gotha, Perthes.) [60 vol.].

C. — Annuaires avec résumés classés.

Bibliographie géographique des Annales de géographie. (Paris, Colin.) [23 vol.].

Pour la géologie, il y a dans beaucoup de pays des recueils régionaux : États-Unis, Italie, Suisse, etc.

Geographisches Jahrbuch. (Gotha, Perthes.) [37 vol.].

D. — Monographies de questions spéciales.

Fortschritte der Mineralogie, Kristallographie und Petrographie. (Jena, Fischer.) [4 vol.].

E. — Recueils de références.

Vivien de Saint-Martin, Nouveau dictionnaire de géographie universelle. (7 vol., 1879-1894, et 7 suppl., 1897-1900.)

Chisholm, The Times Gazetteer of the World. (London, 1893.)

Lippincote, New Gazetteer. (Ed. by Aug. and L. Heilprin, New-York, London, 1906.)

G. **Garollo**, Dizionario geografico universale. (4ª ed., Milano, 1898.)

Ritter, Geographisch-statistisches Lexikon. (2 vol., 9ᵉ éd., 1905-1906.)

G. **Webersik**, Geographisch-statistisches Weltlexikon. (Wien und Leipzig, A. Hartleben, 1908.)

IV. — BIOLOGIE.

1. — Biologie générale et organismes inférieurs.

A. — Catalogues de titres.

B. — Résumés non classés.

Bulletin de l'Institut Pasteur. (Paris, Masson.) [13 vol.].

Abstracts of Bacteriology. (Baltimore, Williams and Wilkins Company.) [Depuis 1917.]

Centralblatt für Bakteriologie und Parasitenkunde, 2. Abteilung. (Jena, Fischer.) [41 vol.].

C. — Annuaires avec résumés classés.

Delage, L'Année biologique. (Paris, Lomme.) [21 vol.].

Bibliographia evolutionis. (Dans Bulletin scientifique de France et de Belgique.) [4 vol.].

Archiv für Entwickelungs-Mechanik. (Wiesbaden, Bergmann.) [40].

D. — Monographies de questions spéciales.

Biologisches Centralblatt. (Leipzig, Thieme.) [43 vol.].

E. — Recueils de références.

2. — Botanique.

A. — Catalogues de titres.

B. — Résumés non classés.

Botanical Abstracts. (Baltimore, Williams and Wilkins Company.) [Depuis 1918.]

Bulletin mensuel des renseignements agricoles et des maladies des plantes. (Rome, Institut international d'agriculture.) [6 vol.].

Experiment Station Record. (U. S. Department of Agriculture, Washington.) [35 vol.].

Botanisches Centralblatt. (Jena, Fischer.) [125 vol.].

Jahresbericht über das Gebiet der Pflanzenkrankheiten. (Berlin, Parey.) [16 vol.].

Zeitschrift für Pflanzenkrankheiten. (Stuttgart, Ulmer.) [23 vol.].

C. — Annuaires avec résumés classés.

Just, Botanischer Jahresbericht. (Leipzig, Borntraeger.) [41 vol.].

D. — Monographies de questions spéciales.

Progressus Rei Botanicae. (Jena, Fischer.) [5 vol.].

E. — Recueils de références.

Index Kewensis. (Oxford, Clarendon, et Bruxelles, Castaigne.) [8 vol.].

Durand, Index Generum Phanerogamarum. (Bruxelles.) [1 vol.].

Engler, Das Pflanzenreich. (Berlin, Engelmann.) [61 vol.].

Dalla Torre et Harms, Genera Siphonogamarum. (Lipsiae, Engelmann, 1900 à 1907.) [1 vol.].

3. — Zoologie, y compris anatomie et embryologie.

A. — Catalogues de titres.

Concilium bibliographicum. (Zurich, Field.) [Sur fiches.]

Carus, Zoologischer Anzeiger. (Leipzig, Engelmann.) [44 vol.].

Bibliographia Zoologica. (Leipzig, Engelmann.) [25 vol.].

Bardeleben, Anatomischer Anzeiger. (Jena, Fischer.) [47 vol.].

B. — Résumés non classés.

Zoologisches Zentralblatt. (Leipzig, Engelmann) [18 vol.].

Zentralblatt für Zoologie, Allgemeine und Experimentelle Biologie. (Leipzig und Berlin, Teubner.) [5 vol.].

Zentralblatt für normale Anatomie. (Berlin und Wien, Urban und Schwartzenberg.) [11 vol.].

C. — Annuaires avec résumés classés.

Zoological Record. (London.)

Schwalbe, Jahresbericht über die Fortschritte der Anatomie und Entwickelungsgeschichte. (Jena, Fischer.) [19 vol.].

Zoologischer Jahresbericht, herausgegeben von der Zoologischer Station zu Neapel. (Leipzig, Engelmann.) [37 vol.].

Merckel und Bonnet, Ergebnisse der Anatomie u. Entwickelungsgeschichte. (Wiesbaden.) [21 vol.].

D. — Monographies de questions spéciales.

Spengel, Ergebnisse der Zoologie. (Jena, Fischer.) [4 vol.].

E. – Recueils de références.

AGASSIZ, Nomenclator zoologicus. (Soloduri, 1842-1846). [2 vol.].

SCUDDER, Nomenclator zoologicus. (Washington, 1882.) [1 vol.].

C. O. WATERHOUSE, Index zoologicus. (London, 1902.) [1 vol.].

Catalogues of the Animals of the British Museum. (London.)

TROUESSART, Catalogus Mammalium tam viventium quam fossilium. (Berlin, Friedländer, 1897-1904.) [6 fasc. et suppl.].

DUBOIS, Synopsis Avium. (Bruxelles, Lamertin, 1899-1902.) [1 vol.].

KIRBY, A Synonymic Catalogue of Neuroptera Odonata. (Londres et Berlin, 1890.) [1 vol.].

LETHIERRY ET SEVERIN, Catalogus Hemipterorum. (Bruxelles, Hayez.)

WYTSMAN, Genera Insectorum. (Bruxelles, Wytsman.)

MARSCHALL, Nomenclator zoologicus. (Vindobonae, 1873.) [1 vol.].

SCHULZE, F.-E., Das Tierreich. (Berlin.)

SCHENKLING, Catalogus Coleopterorum. (Berlin, Jung.)

KERTESZ, Catalogus Dipterorum. (Budapest, Wesselényi.)

HANDLIRSCH, Die Fossilen Insekten. (Leipzig, Engelmann, 1906-1908.) [1 vol.].

4. — Physiologie (voir aussi Chimie et Physique).

A. — Catalogues de titres.

Bibliographia Physiologica. (Leipzig, Deutike.) [9 vol.].

B. — Résumés non classés.

Physiological Abstracts. (Oxford.) [Depuis 1918.]

Zentralblatt für Physiologie. (Leipzig und Wien, Deutike.) [28 vol.].

Folia serologica. (Leipzig, Klinkhardt.) [7 vol.].

Folia haematologica. (Leipzig, Klinkhardt.) [5 vol.].

Folia neuro-biologica. (Leipzig, Klinkhardt.) [2 vol.].

C. — Annuaires avec résumés classés.

Jahresbericht über die Fortschritte der Physiologie. (Stuttgart, Enke.) [21 vol.].

D. — Monographies de questions spéciales.

Ergebnisse der Physiologie. (Wiesbaden, Bergmann.) [4 vol.].

5. — Psychologie.

C. — Annuaires avec résumés classés.

Binet et Piéron, Année psychologique. (Paris, Masson.) [20 vol.].

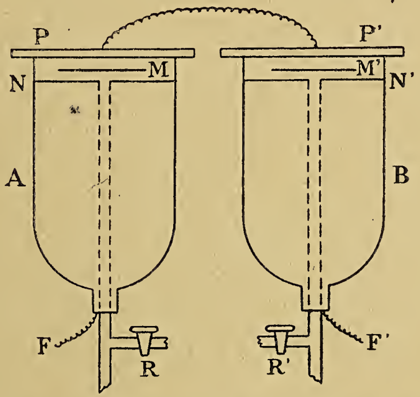
Jacobsohn, Jahresbericht für Psychiatrie und Neurologie. (Berlin, Karger.)

Peters, Zentralblatt für Psychologie und psychologische Paedagogik (mit Einschluss der Heilpaedagogik). (Würzburg, C. Kabitzsch.) [1 vol.].

Physico-chimie. — **La loi de Faraday et l'action de l'effluve électrique sur les oxydes métalliques,**

par A. de Hemptinne, membre de l'Académie.

Nous avons vu que l'action de l'effluve électrique sur certains liquides en présence d'une atmosphère d'hydrogène présente une analogie avec l'action du courant sur les électrolytes, en ce sens que dans certaines limites l'action est proportionnelle à l'intensité du courant (1). Ceci a pour conséquence l'identité des effets dans des appareils pourvus d'électrodes diverses et disposés en série. L'emploi des liquides organiques présente cependant certains inconvénients. D'abord, ils sont susceptibles d'une décomposition partielle; de plus, l'action ne se limite pas strictement aux électrodes. Les liquides, en effet, sont toujours plus ou moins volatils et projetés partiellement en fines gouttelettes au sein de la masse gazeuse. Les oxydes métalliques ne



---

(1) *Bull. de l'Acad.* (Classe des sciences, 1919.)

présentent pas ces inconvénients. L'expérience nous a prouvé que certains d'entre eux se laissent réduire régulièrement par l'effluve électrique en présence d'une atmosphère d'hydrogène. L'oxyde de plomb, dont il est aisé de recouvrir une lame de plomb par électrolyse, se prête bien à ce genre de recherches.

Après de nombreux tâtonnements, nous avons pu réaliser un dispositif avantageux pour la comparaison des phénomènes de réduction des oxydes métalliques et des sels. Il se composait de deux cloches en verre A et B, de 9 centimètres de diamètre (fig. 1), fermées par deux plaques rodées P et P^1. Elles étaient partiellement remplies de morceaux de verre et de mercure, de manière à en réduire le volume jusqu'aux niveaux N et N^1, distants de 20 millimètres environ des plaques rodées. Les tubes manométriques et les fils d'amenée du courant pénétraient par les bouchons B et B^1. Ils portent des robinets R et R^1 par lesquels on peut faire le vide et introduire le gaz.

Les fils F et F^1, reliés au pôle d'un alternateur, étaient en connexion avec les plaques en plomb M et M^1, recouvertes, par voie d'électrolyse, d'une couche de bioxyde de plomb. Elles étaient généralement maintenues à 5 ou 10 millimètres de distance des plaques en verre P et P^1. Ces dernières étaient recouvertes à l'extérieur, sur la partie en regard des plaques métalliques, d'un mélange de gélatine et de chlorure de magnésium. Ces pellicules de gélatine, reliées entre elles par un fil métallique, servent d'électrodes. Leur transparence permettait de constater si l'effluve était bien homogène. Les appareils, dont le volume avait pu être réduit à 60 centimètres cubes, contenaient en outre de petits morceaux de potasse caustique anhydre, de manière à fixer tout de suite l'eau formée par réduction.

Il est clair que si les circonstances de la guerre ne nous avaient pas réduit à utiliser les rares objets pouvant encore être obtenus dans le commerce, les appareils auraient eu une forme beaucoup plus élégante et logique. Les services qu'ils nous ont rendus n'en ont pas été moins grands.

Les tubes manométriques des deux appareils étaient disposés assez près l'un de l'autre, de manière à permettre leur observation simultanée dans la lunette d'un cathétomètre; les niveaux du mercure des manomètres étaient réglés de telle sorte qu'ils se trouvaient tous deux à ras du fil du réticule. Cette manière de procéder réduit au minimum les erreurs d'observation cathétométrique. En effet, dans le cas où la transformation est la même dans les deux appareils, les niveaux varient de la même quantité, et il suffit pour le constater d'un seul déplacement de la lunette.

La connaissance très exacte de la valeur absolue du déplacement a dans la majorité des cas une importance secondaire. Dans le cas où les phénomènes ne sont pas les mêmes dans les deux appareils, leur observation se limite à deux mesures.

L'expérience a prouvé que la relation entre le nombre de coulombs utilisés et la transformation chimique réalisée, croît en évidence à mesure que l'on opère à une pression de plus en plus réduite, jusqu'à une limite qui semble être la pression critique du passage de l'effluve électrique.

La plupart des expériences ont été faites à une pression voisine de 10 millimètres. Si l'on fait passer dans ces conditions l'effluve électrique pendant cinq heures dans les deux appareils reliés en série, et contenant deux plaques de plomb oxydées, de mêmes dimensions, on constate une ascension de 1 millimètre du niveau du mercure dans les deux tubes. La transformation a donc été la même dans les deux appareils. Si l'on répète l'expérience en substituant à l'une des plaques de plomb oxydées une plaque de même dimension mais recouverte de bioxyde de plomb finement pulvérisé, on obtient encore un résultat semblable.

Il en résulte que l'on peut substituer à une lame de plomb oxydée du bioxyde de plomb pulvérisé.

Ce résultat est important au point de vue expérimental : 1° parce qu'il est plus commode de renouveler après chaque expérience la poudre de bioxyde de plomb que de réoxyder la surface qui est plus ou moins altérée; 2° parce que l'emploi des substances pulvérulentes permet de comparer entre eux les phénomènes de réduction de différents oxydes métalliques ou d'autres substances.

En vue d'établir une analogie entre les phénomènes qui se passent dans les gaz et les dissolutions, il a été fait des expériences avec les appareils reliés en série et en modifiant la grandeur, la distance des électrodes ou la pression du gaz.

I. — *Électrodes de surfaces différentes.*

	A.	B.
Surface des électrodes	19,5 cm²	30 cm²
Épaisseur de l'effluve	5 mill.	5 mill.
Pression du gaz	10 —	10 —
Ascension des niveaux après quatre heures .	1 —	1 —

La transformation a été la même dans les deux appareils reliés en série; elle est donc proportionnelle à l'intensité du courant.

Si l'on opère avec le même dispositif, mais à la pression de 30 millimètres, on obtient respectivement les ascensions de $1^{mm}9$ et $1^{mm}6$. Ces écarts sont sans doute dus à des effets calorifiques qui s'accentuent avec la densité du courant.

Avec l'accroissement de la pression gazeuse, l'effluve électrique diminue en homogénéité; elle tend à se transformer en une pluie d'étincelles.

II. — *Épaisseurs d'effluve différentes.*

Pour cette expérience, on a utilisé deux électrodes de même surface, placées respectivement à 5 et 10 millimètres de distance; la pression du gaz était de 10 millimètres. Après cinq heures, l'ascension dans les deux appareils était de 1 millimètre. Il semble donc que pour une même intensité de courant, la transformation est indépendante de l'épaisseur de l'effluve.

Cette conclusion n'est vraie que dans certaines limites. En opérant avec des épaisseurs d'effluve de $2^{mm}5$ et 5 millimètres, on obtient respectivement des ascensions de $1^{mm}2$ et $1^{mm}6$. Dans cette expérience, l'hydrogène était à la pression de 10 millimètres. Ce résultat est sans doute dû au fait que l'effluve tend à se transformer en pluie d'étincelles avec l'accroissement de la distance des électrodes.

III. — *Influence de la pression du gaz.*

Surface des électrodes	30 cm^2.
Épaisseur de l'effluve	5 mill.
Pression de l'hydrogène.	10 mill. et 30 mill.

Après cinq heures de marche, les ascensions des niveaux sont respectivement de $1^{mm}6$ et de $2^{mm}3$.

La transformation croît avec la pression; les effets calorifiques sont sans doute plus sensibles dans ces conditions.

En résumé, si l'on excepte les expériences à des pressions différentes, le phénomène de la réduction des oxydes métalliques opéré dans des appareils reliés en série présente une grande analogie avec ceux de l'électrolyse.

Ces résultats ne sont vrais que dans certaines limites. Lorsqu'il y a une trop grande disproportion entre la distance ou la surface des électrodes, les expériences en série ne s'effectuent plus dans de bonnes conditions. Les effets calorifiques, qui ne sont sans doute jamais entièrement exclus, déterminent des différences. De plus, l'expérience a aussi prouvé que des effets de capacité influencent la décharge, ce qui laisse subsister un doute sur l'égalité de l'intensité du courant dans les deux appareils.

COMPARAISON DE L'ACTION DE L'EFFLUVE SUR DIFFÉRENTS OXYDES MÉTALLIQUES, EN PRÉSENCE D'HYDROGÈNE.

Nous avons adopté les dispositifs décrits précédemment. Les résultats les plus réguliers ont toujours été obtenus en opérant à des pressions assez réduites, avec une faible épaisseur d'effluve, 5 à 10 millimètres, et en réalisant les conditions les plus favorables pour obtenir une effluve homogène et faible, de manière à éliminer le plus possible les effets calorifiques. Dans ce but, il est avantageux de recouvrir l'électrode en plomb d'une lame de verre et de placer les substances pulvérulentes que l'on veut étudier sur ces plaques au-dessus de l'électrode métallique. Le passage de la décharge par le diélectrique qui recouvre l'électrode accroît l'homogénéité de la décharge. Dans toutes ces expériences, l'action de l'effluve sur le bioxyde de plomb a toujours été choisie comme terme de comparaison avec les différentes substances.

Comparaison de différents oxydes métalliques.

	Pression du gaz. — Millim.	Épaisseur de l'effluve. — Millim.	Durée de l'expérience. — Min.	Ascension du niveau de mercure. — Millim.
PbO_2	10	10	220	3,6
MnO_2	10	10	220	3,5
PbO_2	30	10	120	5,4
MnO_2	30	10	120	5,0
PbO_2	30	10	60	3
HgO	30	10	60	3
PbO_2	30	10	75	4,4
CuO	30	10	75	1,7
PbO_2	10	10	300	3,5
CuO	10	10	300	1,7
PbO_2	10	5,6	270	1,9
CuO	10	5,6	270	0,9

	Pression du gaz. — Millim.	Épaisseur de l'effluve. — Millim.	Durée de l'expérience. — Min.	Ascension du niveau de mercure. — Millim.
PbO_2	6	5	300	2,4
CuO	6	5	300	1,2
PbO_2	10	5,6	300	2,1
PbO	10	5,6	300	1,0
PbO_2	6	5	210	1,7
PbO	6	5	210	0,9
PbO_2	30	10	240	10
NiO	30	10	240	0
PbO_2	30	10	60	3,8
Fe_3O_4	30	10	60	2,5
PbO_2	10	10	137	2,0
Fe_3O_4	10	10	137	2,0
PbO_2	100	10	120	4,2
Fe_3O_4	100	10	120	2,4
PbO_3	30	10	60	4,4
Al_2O_3	30	10	60	0

Les oxydes métalliques semblent pouvoir se classer en trois catégories : 1° ceux qui ne se laissent pas réduire ; 2° ceux qui se laissent réduire, comme le bioxyde de plomb ; 3° ceux dont la réduction s'effectue moitié moins vite que celle du bioxyde de plomb : ce sont l'oxyde de cuivre et l'oxyde de plomb.

Nous reviendrons plus tard sur l'interprétation de ces phénomènes.

Réduction des chlorures.

	Pression du gaz. — Millim.	Épaisseur de l'effluve. — Millim.	Durée de l'expérience. — Min.	Ascension du niveau de mercure — Millim.
PbO_2	30	10	60	5,5
Hg_2Cl_2	30	10	60	5,5
PbO_2	10	10	160	3,5
Hg_2Cl_2	10	10	160	3,5

	Pression du gaz. — Millim.	Épaisseur de l'effluve. — Millim.	Durée de l'expérience. — Min.	Ascension du niveau de mercure. — Millim.
PbO_2	30	10	45	2,2
$HgCl_2$	30	10	45	2,2
PbO_2	30	10	45	2,5
AgCl	30	10	45	4,2
PbO_2	10	10	120	2,8
AgCl	10	10	120	2,8

Réduction des iodures.

PbO_2	10	10	90	1,6
$CuCl_2$	10	10	90	1,6
PbO_2	10	10	360	4,1
$PbCl_2$	10	10	360	0,2
PbO_2	6	5	450	1,2
$PbCl_2$	6	5	450	0

Réduction des bromures.

PbO_2	30	10	90	5,5
Hg_2Br_2	30	10	90	3,1
PbO_2	10	10	210	2,9
Hg_2Br_2	10	10	210	2,2
PbO_2	10	5,6	325	2,3
Hg_2Br_2	10	5,6	325	2,3
PbO_2	30	10	60	2,4
HgI_2	40	10	60	1,7
PbO_2	10	10	60	0,9
HgI_2	10	10	60	0,9
PbO_2	30	10	60	3,4
KI . . .	30	10	60	1,4
PbO_2	10	10	230	4,1
KI	10	10	230	0,8
PbO_2	6	5	360	0,4
KI	6	5	360	0

Réduction de substances diverses.

	Pression du gaz. — Millim.	Épaisseur de l'effluve. — Millim.	Durée de l'expérience. — Min.	Ascension du niveau de mercure. — Millim.
PbO_2	30	10	120	2,4
AS_2O_3	30	10	120	0,5
PbO_2	10	10	500	4,1
AS_2O_3	10	10	500	1,0
PbO_2	30	10	100	3,4
$SnCl_2$	30	10	100	1,7
PbO_2	10	10	220	1,8
$SnCl_2$	10	10	220	1,8
PbO_2	10	10	134	1,6
Sb_2S_5	10	10	134	1,6
PbO_2	100	10	120	6,6
$KClO_3$	100	10	120	3,3
PbO_2	30	10	150	2,4
$KClO_3$	30	10	150	0,9
PbO_2	10	10	60	2,4
$KClO_3$	10	10	60	0,1
PbO_2	10	10	150	1,5
$KMnO_3$	10	10	150	0
PbO_2	30	10	120	6,2
Hexachlorbenzol.	30	10	120	2,0
PbO_2	10	10	120	1,6
Hexachlorbenzol.	10	10	120	0,2
PbO_2	10	5	200	1,1
$CuSO_4$ anhydre . .	10	5	200	0

IV. — *Réduction par l'oxyde de carbone.*

Il est intéressant de rechercher si la réduction des oxydes métalliques s'effectue aussi dans une atmosphère d'oxyde de carbone et, dans l'affirmative, de comparer les effets produits dans ce gaz à ceux obtenus dans l'hydrogène. On sait depuis longtemps que l'effluve électrique condense l'oxyde de carbone en des produits plus ou moins complexes ; d'après Berthelot, il se forme un sous-oxyde brun. Il importe d'abord de tâcher d'opérer en évitant autant que possible ces effets, qui peuvent empêcher d'apprécier la grandeur réelle des effets de réduction. Les expériences suivantes ont pour but de déterminer la grandeur de la correction à faire.

Les appareils étaient reliés en série. Dans l'un, il y avait du bioxyde de plomb sur l'électrode ; dans l'autre, marqué O, il n'y en avait pas. Les appareils contenaient de la potasse caustique pour absorber l'anhydride carbonique formé.

	Pression du gaz. — Millim.	Épaisseur de l'effluve. — Millim.	Durée de l'expérience. — Min.	Ascension du niveau de mercure. — Millim.
PbO_2	10	5	300	2,6
0	10	5	300	1,5
PbO_2	4	5	300	1,5
0	4	5	300	0,3

Les résultats montrent que si l'on opère à une pression assez basse, le phénomène de condensation de l'oxyde de carbone est négligeable, comparé à celui de la réduction, puisque l'on obtient pour l'un $0^{mm}3$ et pour l'autre $1^{mm}5$.

Action sur différents oxydes métalliques.

	Pression.	Épaisseur de l'effluve.	Temps.	Ascension.	Ascension corr.
	Millim.	Millim.	Min.		
PbO_2	5	5	240	1,8	1,5
MnO_2	5	5	240	2,0	1,7
PbO_2 . . .	5	5	300	1,3	1,0
Fe_3O_4	5	5	300	1,3	1,0
PbO_2	5	5	300	2,6	2,3
CuO	5	5	300	1,5	1,2

Les chiffres de la dernière colonne sont les valeurs des ascensions corrigées, c'est-à-dire celles obtenues en retranchant du chiffre de la colonne précédente la valeur $0^{mm}3$ attribuable à la condensation de l'oxyde de carbone. Comme on peut le constater, les lois de la réduction dans l'oxyde de carbone semblent les mêmes que dans l'hydrogène.

Les chiffres ci-dessous sont relatifs à une recherche faite dans le but de comparer l'activité de l'oxyde de carbone à celle de l'hydrogène. Les appareils, reliés en série, contenaient tous deux du bioxyde de plomb, mais l'un de l'hydrogène, l'autre de l'oxyde de carbone.

Nature du gaz.	Pression.	Épaisseur de l'effluve.	Temps.	Ascension.	Ascension corr.
	Millim.	Millim.	Min.		
H_2	5	5	430	1.8	1,8
CO	5	5	430	1,8	1,5

L'activité de l'oxyde de carbone semble tout à fait comparable à celle de l'hydrogène.

L'ensemble de ces résultats peut serésumer comme suit :

I. — *Les composés sont ou ne sont pas réductibles par l'effluve électrique dans une atmosphère d'hydrogène ou d'oxyde de carbone.*

II. — *L'intensité ou la vitesse du phénomène de réduction est la même pour la plupart des substances.*

III. — *Elle est réduite de moitié pour l'oxyde de plomb et l'oxyde de cuivre.*

IV. — *L'hydrogène et l'oxyde de carbone semblent se comporter sensiblement de même.*

Ces recherches ont été effectuées à la fin de l'année 1917 et dans les premiers mois de l'année 1918. Nous nous réservons d'en donner plus tard l'interprétation théorique, lorsque nous publierons les résultats des recherches faites dans le cours de l'année 1918 et qu'il nous a été impossible d'achever complètement à ce moment, à cause du manque d'appareils indispensables. Ces recherches ont pour but de mesurer d'une façon précise le nombre de coulombs dépensés pour la réduction d'une certaine quantité de substance. Ces expériences ont été faites sur du bioxyde de plomb. On remarquera que les chiffres obtenus pour cette substance pourront servir pour toutes les autres, puisque nous avons toujours pris les effets obtenus sur le bioxyde de plomb comme terme de comparaison. Nous avons utilisé le bioxyde de plomb comme on utiliserait un voltamètre.

ANALYSE MATHÉMATIQUE ET GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE. — **Sur la transformation de Moutard et quelques-unes de ses applications géométriques,**

par M. A. DEMOULIN, membre de l'Académie.

I.

1. λ et μ désignant deux solutions d'une équation de Moutard

$$(e) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = kz,$$

posons

$$H(\lambda, \mu) = \int \left(\lambda \frac{\partial \mu}{\partial u} - \mu \frac{\partial \lambda}{\partial u}\right) du - \left(\lambda \frac{\partial \mu}{\partial v} - \mu \frac{\partial \lambda}{\partial v}\right) dv.$$

Soit ω une solution de l'équation (e). A toute solution z de cette équation, la formule

$$\bar{z} = \frac{1}{\omega} H(z, \omega)$$

fait correspondre une solution z de l'équation

$$(\bar{e}) \qquad \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial u \partial v} = \left(k - \frac{\partial^2 \log \omega}{\partial u \partial v}\right) \bar{z}.$$

Nous appellerons transformation de Moutard et nous désignerons par $M\omega$ l'opération en vertu de laquelle on passe de l'équation (e) à l'équation $(\bar{e})$. Nous dirons que ces deux équations sont contiguës. Nous dirons aussi que $\bar{z}$ correspond à z dans la transformation $M\omega$.

2. Soient $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ n solutions de l'équation (e), linéairement indépendantes. $\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n$ désignant une permutation quelconque des nombres 1, 2, ..., n, soient : (e_{α_1}) l'équation déduite de (e) au moyen de $M\omega_{\alpha_1}$ et $\omega_{\alpha_2}^{\alpha_1}, \omega_{\alpha_3}^{\alpha_1}, \ldots, \omega_{\alpha_n}^{\alpha_1}$ les solutions de (e_{α_1}) qui correspondent à $\omega_{\alpha_2}, \omega_{\alpha_3}, \ldots, \omega_{\alpha_n}$ dans cette transformation; $(e_{\alpha_1\alpha_2})$ l'équation déduite de (e_{α_1}) au moyen de $M\omega_{\alpha_2}^{\alpha_1}$ et $\omega_{\alpha_3}^{\alpha_1\alpha_2}, \ldots, \omega_{\alpha_n}^{\alpha_1\alpha_2}$ les solutions de $(e_{\alpha_1\alpha_2})$ qui correspondent à $\omega_{\alpha_3}^{\alpha_1}, \ldots, \omega_{\alpha_n}^{\alpha_1}$ dans cette transformation; $(e_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3})$ l'équation déduite de $(e_{\alpha_1\alpha_2})$ au moyen de $M\omega_{\alpha_3}^{\alpha_1\alpha_2}$ et $\omega_{\alpha_4}^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}, \ldots, \omega_{\alpha_n}^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$ les solutions de $(e_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3})$ qui correspondent à $\omega_{\alpha_4}^{\alpha_1\alpha_2}, \ldots, \omega_{\alpha_n}^{\alpha_1\alpha_2}$ dans cette transformation. En continuant ainsi, on obtiendra les équations $(e_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}), \ldots, (e_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_i}), (e_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{i+1}}), \ldots, (e_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}}), (e_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n})$. L'équation $(e_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_i})$ admettra les solutions $\omega_{\alpha_{i+1}}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_i}, \omega_{\alpha_{i+2}}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_i}, \ldots, \omega_{\alpha_n}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_i}$. On déduira de cette équation l'équation $(e_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{i+1}})$ au moyen de $M\omega_{\alpha_{i+1}}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_i}$. Aux solutions $\omega_{\alpha_{i+2}}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_i}, \ldots, \omega_{\alpha_n}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_i}$ de $(e_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_i})$ correspondront, dans cette transformation, les solutions $\omega_{\alpha_{i+2}}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{i+1}}, \ldots, \omega_{\alpha_n}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{i+1}}$ de $(e_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{i+1}})$. L'équation $(e_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}})$ admettra la solution $\omega_{\alpha_n}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}}$. En la soumettant à la transformation $M\omega_{\alpha_n}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}}$, on obtiendra l'équation $(e_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n})$, que nous écrirons

$$(e_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}) \qquad \frac{\partial^2 z_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}}{\partial u \partial v} = k_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} z_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}.$$

3. z désignant une solution quelconque de (e), soient : z_{α_1} la solution de (e_{α_1}) qui correspond à z dans $M\omega_{\alpha_1}$, $z_{\alpha_1\alpha_2}$ la solution de $(e_{\alpha_1\alpha_2})$ qui correspond à z_{α_1} dans $M\omega_{\alpha_2}^{\alpha_1}$, ..., $z_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}}$ la solution de $(e_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}})$ qui correspond à $z_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-2}}$ dans $M\omega_{\alpha_{n-1}}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-2}}$ et $z_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ la solution de $(e_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n})$ qui correspond à $z_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}}$ dans $M\omega_{\alpha_n}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}}$.

4. Le théorème suivant donne : 1° l'expression de $k_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ en fonction de k et de $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$; 2° l'expression de $z_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ en fonction de z; 3° l'expression de z en fonction de $z_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$.

Posons $\mathrm{a}_{\mathrm{ik}} = \mathrm{H}(\omega_{\mathrm{i}}, \omega_{\mathrm{k}})$ $(\mathrm{i}, \mathrm{k} = 1, 2, \ldots, \mathrm{n})$, *les constantes d'intégration étant choisies de manière à avoir* $\mathrm{a}_{\mathrm{ii}} = 0$, $\mathrm{a}_{\mathrm{ik}} + \mathrm{a}_{\mathrm{ki}} = 0$. *Posons ensuite*

$$\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}(a) = \begin{vmatrix} a_{\alpha_1\alpha_1} & a_{\alpha_1\alpha_2} & \cdots & a_{\alpha_1\alpha_n} \\ a_{\alpha_2\alpha_1} & a_{\alpha_2\alpha_2} & \cdots & a_{\alpha_2\alpha_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\alpha_n\alpha_1} & a_{\alpha_n\alpha_2} & \cdots & a_{\alpha_n\alpha_n} \end{vmatrix}, \tag{1}$$

$$\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}(a \mid \omega) = \left|\begin{array}{ccc|c} & & & \omega_{\alpha_1} \\ & \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}(a) & & \omega_{\alpha_2} \\ & & & \vdots \\ & & & \omega_{\alpha_n} \\ \hline -\omega_{\alpha_1} & -\omega_{\alpha_2} & \cdots -\omega_{\alpha_n} & 0 \end{array}\right|. \tag{2}$$

Si n *est pair, on a*

$$k_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} = k - \frac{\partial^2 \log \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}(a)}{\partial u \partial v}, \tag{3}$$

$$z_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} = z + \sum_{i=1}^{i=n} \Omega_{\alpha_i} \mathrm{H}(z, \omega_{\alpha_i}), \tag{4}$$

$$z = z_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} + \sum_{i=1}^{i=n} \omega_{\alpha_i} \mathrm{H}(z_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}, \Omega_{\alpha_i}). \tag{5}$$

Les Ω *sont les solutions du système*

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_{\alpha_i\alpha_k} \Omega_{\alpha_i} = \omega_{\alpha_k}. \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{6}$$

Ces fonctions, qui vérifient nécessairement l'équation $(e_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n})$, *sont linéairement indépendantes.*

Si n *est impair, on a*

$$k_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} = k - \frac{\partial^2 \log \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}(a \mid \omega)}{\partial u \partial v}, \tag{7}$$

$$z_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} = \sum_{i=1}^{i=n} \Omega_{\alpha_i} \mathrm{H}\left(z, \omega_{\alpha_i}\right), \tag{8}$$

$$z = \sum_{i=1}^{i=n} \omega_{\alpha_i} \mathrm{H}\left(z_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}, \Omega_{\alpha_i}\right). \tag{9}$$

Les Ω *sont les solutions du système*

$$\left\{\begin{array}{ll} \sum_{i=1}^{i=n} a_{\alpha_i\alpha_k} \Omega_{\alpha_i} = 0, & (k=1, 2, \ldots, n) \\ \sum_{i=1}^{i=n} \omega_{\alpha_i} \Omega_{\alpha_i} = 1. & \end{array}\right. \tag{10}$$

Ces fonctions, qui vérifient nécessairement l'équation $(e_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n})$, *sont linéairement indépendantes.*

5. En vertu des formules (3) et (7), les $n!$ équations $(e_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n})$ $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n = 1, 2, \ldots, n)$ sont identiques (*). Désignons par (E) l'équation avec laquelle elles coïncident. On déduit de là que, parmi les équations (e), (e_{α_1}), $(e_{\alpha_1\alpha_2})$, ..., $(e_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}})$, (E) $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1} = 1, 2, \ldots, n)$, il n'y en a que 2^n de distinctes. Le système de ces 2^n équations, que nous désignerons par $(\mathrm{M})_{2^n}$, jouit de la propriété suivante : *Une équation quelconque du système est contiguë à* n *équations de ce système.*

(*) Ce théorème a été établi par M. Bianchi (*Lezioni di Geometria differenziale*, vol. II, § 247) dans le cas où $n = 2$.

6. Les formules (4) et (8) montrent que les $n\,!$ fonctions $z_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n = 1, 2, \ldots, n)$ sont identiques. Désignons par Z la fonction avec laquelle elles coïncident. Parmi les fonctions $z, z_{\alpha_1}, z_{\alpha_1\alpha_2}, \ldots, z_{\alpha_1\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1}}, \mathrm{Z}\,(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1} = 1, 2, \ldots, n)$, il n'y en a que 2^n de distinctes. Chacune de ces fonctions satisfait à une des 2^n équations considérées au n° 5, et deux fonctions qui satisfont à deux équations contiguës se correspondent dans la transformation en vertu de laquelle ces équations se correspondent.

II.

7. Parmi les applications analytiques des formules que nous venons d'indiquer, nous signalerons la suivante. Si l'on prend pour équation (e) l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$, on aura $z = \mathrm{U} + \mathrm{V}$, $\omega_i = \mathrm{U}_i + \mathrm{V}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $\mathrm{U}, \mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2, \ldots, \mathrm{U}_n$ désignant des fonctions de u et $\mathrm{V}, \mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2, \ldots, \mathrm{V}_n$, des fonctions de v. On pourra mettre ces fonctions sous une forme telle que les équations $(e_1), (e_{12}), \ldots, (e_{12\ldots n})$ et leurs intégrales soient débarrassées de tout signe d'intégration. Ainsi que l'a démontré M. Darboux (*), on obtiendra de cette manière toutes les équations linéaires à invariants égaux dont la méthode de Laplace peut fournir l'intégrale.

III.

8. On a vu (n° 4) que les fonctions $\Omega_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ satisfont à l'équation (E). De même qu'on a déduit l'équation (E) de l'équation (e) au moyen des solutions ω_i, de même

---

(*) *Leçons sur la théorie des surfaces,* 2e partie, n° 396.

on peut déduire l'équation (e) de l'équation (E) au moyen des solutions Ω_i, à condition de choisir convenablement les intégrales $H(\Omega_i, \Omega_k)$.

Posons, si n est pair,

$$A_{\alpha_i \alpha_k} = - \frac{(\alpha_i \alpha_k)}{\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}(a)}, \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n) \tag{11}$$

$(\alpha_i \alpha_k)$ désignant le complément algébrique de $a_{\alpha_i \alpha_k}$ dans $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}(a)$, et, si n est impair,

$$A_{\alpha_i \alpha_k} = - \frac{(\alpha_i \alpha_k)}{\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}(a \mid \omega)}, \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n) \tag{12}$$

$(\alpha_i \alpha_k)$ désignant le complément algébrique de $a_{\alpha_i \alpha_k}$ dans $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}(a \mid \omega)$.

On démontre que, dans les deux cas, $A_{\alpha_i \alpha_k}$ est une des valeurs de l'intégrale $H(\Omega_{\alpha_i}, \Omega_{\alpha_k})$.

On peut passer de l'équation (E) *à l'équation* (e) *au moyen des solutions* Ω_i *à condition de prendre pour valeur de l'intégrale* $H(\Omega_{\alpha_i}, \Omega_{\alpha_k})$ *la quantité* $A_{\alpha_i \alpha_k}$ *définie par l'égalité* (11), *si* n *est pair, et par l'égalité* (12), *si* n *est impair.*

A ce résultat, ajoutons le suivant : *Soient* $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$ *une permutation quelconque des nombres* 1, 2, ..., n *et* m *un quelconque des nombres* 1, 2, ..., n. *Les intégrales* $H(\Omega_{\alpha_i}, \Omega_{\alpha_k})$ *ayant les valeurs qui viennent d'être indiquées, l'équation déduite de* (e) *au moyen des solutions* $\omega_{\alpha_1}, \omega_{\alpha_2}, \ldots \omega_{\alpha_m}$ *est identique à l'équation déduite de* (E) *au moyen des solutions* $\Omega_{\alpha_{m+1}}, \Omega_{\alpha_{m+2}}, \ldots, \Omega_{\alpha_n}$.

IV.

9. Si $n = 2$, le système $(M)_{2^n}$ (nº 5) se compose des équations (e), (e_1), (e_2) et (E). L'intégrale générale α de l'équation (E) est donnée par l'égalité

$$\alpha = z + \frac{\omega_1\omega_2}{a_{12} + l}(z_1 - z_2), \quad (*) \tag{13}$$

l désignant une constante arbitraire et a_{12} une quelconque des valeurs de a_{12}. L'équation (E) dépend de la constante l; nous mettrons celle-ci en évidence en désignant cette équation par (A_l).

L'équation (e_1) est contiguë aux équations (e) et (A_0), donc, en vertu du théorème de permutabilité de M. Bianchi, il y a une équation de Moutard, dépendant d'une constante arbitraire. qui est contiguë aux équations (e) et (A_0), L'intégrale générale β de cette équation a pour expression

$$\beta = \frac{\omega_1 z_1 + m\omega_2 z_2}{\omega_1 + m\omega_2}, \tag{14}$$

m désignant une constante arbitraire. Nous désignerons ladite équation par (B_m).

Quelles que soient les constantes l, m, *les équations* (A_l), (B_m) *se correspondent dans une transformation de Moutard et les solutions* α, β *se correspondent dans cette transformation.*

(*) Cette formule a été donnée, sous une autre forme, par M. Bianchi. (*Memorie della Società italiana delle scienze*, 3e sér., t. XIII, p. 280.)

10. Si $n = 3$, le système $(\mathrm{M})_{2^n}$ (n° 5) se compose des équations (e), (e_1), (e_2), (e_3), (e_{12}), (e_{23}), (e_{31}), (E). *On peut décomposer de trois manières différentes ce système en deux systèmes* $(\mathrm{M})_4$. Une de ces décompositions donne les systèmes $[(e), (e_1), (e_2), (e_{12})]$, $[(e_3), (e_{23}), (e_{31}), (\mathrm{E})]$. D'après ce qu'on a vu au n° 9, on peut adjoindre au premier de ces systèmes deux équations (A_l), (B_m) dépendant chacune d'une constante arbitraire et admettant pour intégrales générales les fonctions α, β définies par les égalités (13) et (14). De même, on peut adjoindre au second système deux équations (C_μ), (D_λ) admettant respectivement pour intégrales générales les fonctions γ, δ définies par les égalités

$$(15) \qquad \gamma = z + \frac{\omega_1\omega_3(z_1 - z_2) + \mu\omega_2\omega_3(z_2 - z_3)}{a_{13} + \mu a_{23}},$$

$$(16) \qquad \delta = \frac{a_{23}\omega_1 z_1 + a_{31}\omega_2 z_2 + (a_{12} + \lambda)\omega_3 z_3}{a_{23}\omega_1 + a_{31}\omega_2 + (a_{12} + \lambda) z_3},$$

λ et μ désignant des constantes arbitraires.

l *étant arbitraire, les équations* (A_l) et (D_l) *sont contiguës; de même,* m *étant arbitraire, les équations* (B_m) *et* (C_m) *sont contiguës*. D'autre part, en vertu du théorème du n° 9, les équations (A_l) et (B_m) sont contiguës ainsi que les équations (C_m) et (D_l). *Les équations* (A_l), (B_m), (C_m), (D_l) *forment un système* $(\mathrm{M})_4$. Les fonctions α, β, γ, δ définies par les égalités (13), (14), (15), (16) (on fera $\mu = m$ dans l'avant-dernière et $\lambda = l$ dans la dernière) sont des solutions correspondantes de ces quatre équations. Elles sont liées par la relation

$$(17) \qquad \gamma = \alpha + \frac{(\omega_1 + m\omega_2)\left[a_{23}\omega_1 + a_{31}\omega_2 + (a_{12} + l)\omega_3\right]}{(a_{12} + l)(a_{12} + m a_{23})}(\beta - \delta).$$

V.

11. Soient λ, μ deux solutions de l'équation (e). Soumettons cette équation à une transformation de Moutard et désignons par $\bar{\lambda}$ et par $\bar{\mu}$ les solutions de l'équation transformée qui correspondent respectivement à λ et à μ.

L'intégrale H (λ, μ) ayant toute sa généralité, on peut disposer de la constante additive qui figure dans H $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ de manière à avoir

$$\mathrm{H}(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) = \mathrm{H}(\lambda, \mu) + \lambda\bar{\mu} - \mu\bar{\lambda}.$$

12. Soient $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ n solutions de l'équation (e), linéairement indépendantes. $\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n$ désignant une permutation quelconque des nombres $1, 2, \ldots, n$, formons, au moyen des solutions $\omega_{\alpha_1}, \omega_{\alpha_2}, \ldots, \omega_{\alpha_n}$, les équations (e_{α_1}), $(e_{\alpha_1\alpha_2})$, $\ldots$, $(e_{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}})$, (E). Aux solutions λ, μ de (e) correspondront des solutions λ_{α_1}, μ_{α_1} de (e_{α_1}); des solutions $\lambda_{\alpha_1\alpha_2}$, $\mu_{\alpha_1\alpha_2}$ de $(e_{\alpha_1\alpha_2})$; $\ldots$; des solutions $\lambda_{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}}$, $\mu_{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}}$ de $(e_{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}})$; des solutions $\lambda_{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n}$, $\mu_{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n}$ de (E). Posons, pour abréger :

$$p = \mathrm{H}(\lambda, \mu), \qquad p_{\alpha_1} = \mathrm{H}\left(\lambda_{\alpha_1}, \mu_{\alpha_1}\right),$$

$$p_{\alpha_1 \ldots \alpha_i} = \mathrm{H}\left(\lambda_{\alpha_1 \ldots \alpha_i}, \mu_{\alpha_1 \ldots \alpha_i}\right), \qquad (i = 2, \ldots, n)$$

et choisissons les quantités $p_{\alpha_1}, p_{\alpha_1\alpha_2}, \ldots, p_{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n}$ de manière que l'on ait

$$(18)\left\{\begin{aligned} p_{\alpha_1} &= p + \lambda\mu_{\alpha_1} - \mu\lambda_{\alpha_1}, \\ p_{\alpha_1 \ldots \alpha_i} &= p_{\alpha_1 \ldots \alpha_{i-1}} + \lambda_{\alpha_1 \ldots \alpha_{i-1}} \mu_{\alpha_1 \ldots \alpha_i} - \mu_{\alpha_1 \ldots \alpha_{i-1}} \lambda_{\alpha_1 \ldots \alpha_i} \quad (i = 2, \ldots, n). \end{aligned}\right.$$

Nous allons faire connaître l'expression de $p_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$.

Soient (e_{α_i}) l'équation qui correspond à (e) dans $M\omega_{\alpha_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ et λ_{α_i}, μ_{α_i} les solutions de (e_{α_i}) qui correspondent respectivement à λ et à μ dans cette transformation. Cela posé, on a, si n est pair :

$$(19) \qquad p_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} = p + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} A_{\alpha_i \alpha_k} \omega_{\alpha_i} \omega_{\alpha_k} \left(\lambda_{\alpha_i} \mu_{\alpha_k} - \lambda_{\alpha_k} \mu_{\alpha_i} \right),$$

et, si n est impair :

$$(20) \qquad \begin{cases} p_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} = p + \displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} \Omega_{\alpha_i} \omega_{\alpha_i} \left(\lambda \mu_{\alpha_i} - \mu \lambda_{\alpha_i} \right) \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} A_{\alpha_i \alpha_k} \omega_{\alpha_i} \omega_{\alpha_k} \left(\lambda_{\alpha_i} \mu_{\alpha_k} - \lambda_{\alpha_k} \mu_{\alpha_i} \right), \end{cases}$$

$A_{\alpha_i \alpha_k}$ étant défini par la formule (11), dans le premier cas, et par la formule (12), dans le second. Les fonctions Ω qui figurent dans l'égalité (20) sont les solutions du système (10).

Les formules (19) et (20) montrent que les $n!$ quantités $p_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$ $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n = 1, 2, \ldots, n)$ sont égales. Soit P leur valeur commune. On déduit de là que, parmi les quantités p_{α_1}, $p_{\alpha_1 \alpha_2}$, …, $p_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}}$, P $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1} = 1, 2, \ldots, n)$, il n'y en a que 2^n de distinctes. Convenons de dire que deux de ces 2^n quantités sont *contiguës* lorsqu'elles figurent simultanément dans une des équations (18). *Une quelconque des 2^n quantités est contiguë à* n *de ces quantités.*

VI.

13. On doit à M. Bianchi (*Rendiconti de Palerme,* 1908) une remarquable propriété de la transformation G (*). Nous l'énoncerons, en abrégé, comme il suit : *Si* n *surfaces* S_1,

---

(*) Pour la définition de la transformation G, voir notre note *Sur la transformation de Guichard et sur les systèmes* K. (Ce *Bulletin,* séance du 8 février 1919.)

$S_2, \ldots, S_n$ *correspondent à une surface* S_0 *dans des transformations* G, *on peut joindre aux* $n+1$ *surfaces* $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_n$, $2^n - n - 1$ *surfaces de manière à obtenir un système de* 2^n *surfaces jouissant de la propriété suivante : une quelconque des surfaces du système correspond dans des transformations* G *à* n *surfaces de ce système.*

Les résultats du n° 12 permettent d'établir ce théorème et de donner en outre les expressions des coordonnées des 2^n surfaces.

Nous désignerons par $(G)_{2^n}$ le système de ces 2^n surfaces.

VII.

14. Soient z_1, z_2, z_3, z_4 les coordonnées homogènes ou tétraédriques d'un point M_0 qui décrit un réseau conjugué (u, v) à invariants ponctuels égaux. On peut choisir ces coordonnées de manière qu'elles satisfassent à une équation de Moutard. Soumettons cette équation à une transformation de Moutard quelconque et désignons par Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 les solutions de l'équation transformée qui correspondent respectivement à z_1, z_2, z_3, z_4 dans cette transformation. Le point M de coordonnées Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 décrit le réseau conjugué à invariants ponctuels égaux qui correspond au réseau (M_{0uv}) dans la transformation K la plus générale (*).

(*) Pour la définition de la transformation K et de la transformation K_1, dont il sera question plus bas, voir notre note *Sur les systèmes* Θ *et sur les systèmes* R. (Ce *Bulletin*, séance du 8 mars 1919.)

Signalons deux propriétés de la transformation K.

I. Si deux points décrivent des réseaux conjugués à invariants ponctuels égaux se correspondant dans une transformation K, on peut choisir leurs coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4 et y_1, y_2, y_3, y_4 de manière que les six expressions $x_i dy_k - x_k dy_i$ $(i, k = 1, 2, 3, 4;\ i \neq k)$ soient des différentielles exactes. La réciproque est vraie.

II. Si u, v sont les paramètres des développables d'une congruence engendrée par une droite d, nous appellerons premier foyer (ou second foyer) de d, le point de contact de cette droite avec son enveloppe lorsque u (ou v) varie seul.

Supposons que deux points A et B décrivent deux réseaux conjugués (u, v) à

15. Supposons que deux réseaux conjugués à invariants ponctuels égaux (M_{1uv}), (M_{2uv}) correspondent dans des transformations K à un réseau conjugué à invariants égaux (M_{0uv}). Admettons que les coordonnées z_1, z_2, z_3, z_4 du point M_0 satisfassent à une équation de Moutard et désignons par ω_1, ω_2 les solutions de cette équation au moyen desquelles on passe respectivement du réseau (M_{0uv}) aux réseaux (M_{1uv}), (M_{2uv}). Les coordonnées $z_1^{(1)}$, $z_2^{(1)}$, $z_3^{(1)}$, $z_4^{(1)}$ du point M_1 et les coordonnées $z_1^{(2)}$, $z_2^{(2)}$, $z_3^{(2)}$, $z_4^{(2)}$ du point M_2 sont données par les égalités

$$z_i^{(1)} = \frac{1}{\omega_1} \operatorname{H}(z_i, \omega_1), \quad z_i^{(2)} = \frac{1}{\omega_2} \operatorname{H}(z_i, \omega_2). \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

Le plan $M_0\,M_1\,M_2$ touche son enveloppe au point O de coordonnées $z_1^{(1)} - z_1^{(2)}$, $z_2^{(1)} - z_2^{(2)}$, $z_3^{(1)} - z_3^{(2)}$, $z_4^{(1)} - z_4^{(2)}$. Ce point appartient évidemment à la droite M_1M_2. Le réseau (O_{uv}) est conjugué. Nous appellerons réseau Ψ tout réseau tel que (O_{uv}).

16. La droite M_0O porte ∞^1 points M et la droite M_1M_2, ∞^1 points M′ donnant lieu aux propriétés suivantes : Les réseaux (u, v) décrits par un quelconque des points M et par un quelconque des points M′ sont conjugués et à invariants ponctuels égaux, et se correspondent dans une transformation K. Ce théorème, que nous avons déjà énoncé dans le travail cité dans la note du n° 14, est une conséquence des résultats du n° 9.

---

invariants ponctuels égaux qui se correspondent dans une transformation K. Soient respectivement F et F_1 le premier et le second foyer de la droite AB. Désignons par H le premier foyer de la tangente à (F_v); par H_1 le second foyer de la tangente à (F_{1u}); par P, Q les intersections respectives de FH et des tangentes aux courbes (A_v), (B_v); par P_1, Q_1 les intersections respectives de F_1H_1 et des tangentes aux courbes (A_u), (B_u). Cela posé, on a

$$(F_1H_1P_1Q_1) = (FHPQ).$$

Cette propriété entraîne la suivante : parmi les quadriques passant par les côtés du quadrilatère FHH_1F_1, il y en a une qui touche les plans tangents aux surfaces (A) et (B).

17. *Si* n *réseaux conjugués à invariants ponctuels égaux* (M_{1uv}), $(M_{2uv}), \ldots,$ (M_{nuv}) *correspondent, dans des transformations* K, *à un réseau conjugué à invariants ponctuels égaux* (M_{0uv}), *on peut joindre aux* $n+1$ *réseaux* (M_{0uv}), (M_{1uv}), $(M_{2uv}), \ldots,$ (M_{nuv}), $2^n - n - 1$ *réseaux conjugués* (u, v) *à invariants ponctuels égaux, de manière à obtenir un système de* 2^n *réseaux jouissant de la propriété suivante : un quelconque des réseaux du système correspond, dans des transformations* K, *à* n *réseaux de ce système.*

Ce théorème se déduit de celui du n° 6.

Nous désignerons par $(K)_{2^n}$ le système des 2^n réseaux considérés.

18. Si l'on soumet un système $(K)_{2^n}$ à une transformation par polaires réciproques, on obtient un système de 2^n réseaux conjugués à invariants tangentiels égaux jouissant de la propriété suivante : *chacun des réseaux du système correspond, dans des transformations* K_1, *à* n *réseaux de ce système.*

Nous désignerons par $(K_1)_{2^n}$ le système de ces 2^n réseaux.

19. Dans le cas où $n = 3$, le théorème du n° 17 peut être énoncé comme il suit. Supposons que trois réseaux conjugués à invariants ponctuels égaux (M_{1uv}), (M_{2uv}), (M_{3uv}) correspondent dans des transformations K à un réseau conjugué à invariants ponctuels égaux (M_{0uv}). Soient (M_{4uv}), (M_{5uv}), (M_{6uv}) des réseaux conjugués à invariants ponctuels égaux correspondant respectivement, dans des transformations K, aux réseaux (M_{2uv}) et (M_{3uv}), (M_{3uv}) et (M_{1uv}), (M_{1uv}) et (M_{2uv}). En vertu du théorème du n° 16, de tels réseaux existent et chacun d'eux dépend d'une constante arbitraire. Cela posé, il y a un réseau conjugué à invariants ponctuels égaux (M_{7uv}) qui correspond dans des transformations K aux réseaux (M_{4uv}), (M_{5uv}), (M_{6uv}).

La figure relative à ce théorème jouit des propriétés suivantes : 1° Les tétraèdres $M_0M_1M_2M_3$, $M_7M_4M_5M_6$ sont des tétraèdres de Mœbius, (M_0, M_7), (M_1, M_4), (M_2, M_5), (M_3, M_6) étant les couples de sommets correspondants. 2° Les huit points M_0, M_1, $M_2, \ldots,$ M_7 sont les sommets d'un hexaèdre dont les faces touchent leurs enveloppes en des points situés sur une droite m. Les développables engendrées par cette droite ont pour paramètres u, v.

20. En vertu du théorème du n° 16, les droites M_0M_6 et M_1M_2 portent respectivement ∞^1 points A et ∞^1 points B tels que les réseaux (A_{uv}) et les réseaux (B_{uv}) soient conjugués et à invariants ponctuels égaux. En outre, un réseau (A_{uv}) et un réseau (B_{uv}) se correspondent dans une transformation K. En vertu du même théorème, les droites M_4M_5 et M_3M_7 portent respectivement ∞^1 points C et ∞^1 points D qui décrivent des réseaux (C_{uv}) et des réseaux (D_{uv}) jouissant des mêmes propriétés que les réseaux (A_{uv}) et les réseaux (B_{uv}). Choisissons arbitrairement un réseau (A_{uv}). Parmi les réseaux (D_{uv}) il y en a un qui lui correspond dans une transformation K. De même, un réseau étant choisi arbitrairement parmi les réseaux (B_{uv}), il y a un réseau (C_{uv}) qui lui correspond dans une transformation K. *On obtient ainsi* ∞^2 *systèmes* $(K)_4$. *Le plan qui contient les points générateurs des réseaux d'un quelconque de ces systèmes touche son enveloppe en un point de la droite* m.

Ce théorème est une conséquence du théorème du n° 10.

Désignons par P l'intersection des droites M_0M_6, M_1M_2 et par Q l'intersection des droites M_4M_5, M_3M_7. Les réseaux (P_{uv}), (Q_{uv}) se coupent directement. D'après une définition donnée au n° 15, ce sont des réseaux Ψ. Le réseau (P_{uv}) étant donné [c'est-à-dire les réseaux (M_{0uv}), (M_{1uv}), (M_{2uv})], le réseau (Q_{uv}) dépend du choix du réseau (M_{3uv}). Cette remarque conduit à une *transformation* des réseaux Ψ, celle qui permet de passer du réseau (P_{uv}) au réseau (Q_{uv}) ; nous la désignerons par la lettre T. Si deux surfaces de Guichard se correspondent dans une transformation de Eisenhart (*Annali di Matematica*, 1914), les réseaux des lignes de courbure de ces surfaces se correspondent dans une transformation T et les systèmes $(K)_4$ considérés plus haut sont composés de réseaux isothermiques qui se correspondent *circulairement* dans des transformations de Darboux (*).

VIII.

21. Soient $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ quatre solutions de l'équation (e), linéairement indépendantes. Au moyen de ces solutions on peut, en procédant comme au n° 2, déduire de l'équation (e) une équation (E) admettant quatre solutions $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$ définies par le système

$$\sum_{i=1}^{i=4} a_{ik}\Omega_k = \omega_k, \qquad (k = 1, 2, 3, 4)$$

qu'on obtient par application des équations (6).

Si x_1, x_2, x_3, x_4 et y_1, y_2, y_3, y_4 sont les coordonnées, homogènes ou tétraédriques, de deux points d'une droite, nous définirons les coordonnées p_{ik} de cette droite par les égalités

$$p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i. \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4; \quad i \neq k).$$

Cela posé, l'équation

$$a_{12}p_{34} + a_{13}p_{42} + a_{14}p_{23} + a_{23}p_{14} + a_{42}p_{13} + a_{34}p_{12} = 0$$

(*) Supposons que les deux nappes S_1, S_2 de l'enveloppe d'une sphère Σ se correspondent dans une transformation de Ribaucour. Soit $d\varphi$ l'angle de deux positions de Σ infiniment voisines. Si la courbure K de la forme quadratique $d\varphi^2$ est égale à 1, les surfaces S_1, S_2 sont isothermiques et se correspondent dans une transformation de Darboux; ce sont des surfaces de Guichard qui se correspondent dans une transformation de Eisenhart, si K est égale à une constante différente de 1.

Les surfaces de Guichard spéciales que M. Eisenhart a étudiées (*loc. cit.*), mais dont il n'a pas démontré l'existence, sont précisément les surfaces de Guichard que M. Guichard a introduites dans la théorie de la déformation des quadriques.

représente le complexe linéaire osculateur d'une congruence W. Soient F, F' les foyers d'une droite a de cette congruence. L'un d'eux, F, par exemple, a pour coordonnées $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$; donc le réseau (F_{uv}) est conjugué et à invariants ponctuels égaux. Les coordonnées du plan tangent à la surface (F') sont $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$; par suite, le réseau (F'_{uv}) est conjugué et à invariants tangentiels égaux.

ω désignant une solution quelconque de l'équation (e), soumettons cette équation à la transformation $M\omega$ et désignons par $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ les fonctions qui correspondent respectivement à $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ dans cette transformation. Posons

$$b_{ik} = H(\varphi_i, \varphi_k), \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

les constantes d'intégration étant choisies de manière à avoir

$$b_{ik} = a_{ik} + \omega_i\varphi_k - \omega_k\varphi_i.$$

L'équation

$$b_{12}p_{34} + b_{13}p_{42} + b_{14}p_{23} + b_{23}p_{14} + b_{42}p_{13} + b_{34}p_{12} = 0$$

représente le complexe linéaire osculateur d'une congruence W. Soient Φ, Φ' les foyers d'une droite b de cette congruence. Les coordonnées de l'un d'eux, Φ, par exemple, sont $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$. Le réseau (Φ_{uv}) correspond donc au réseau (F_{uv}) dans une transformation K (nº 14).

A la solution ω de (e) correspond une solution Ω de (E), définie par l'égalité

$$\Omega = \omega\left(1 - \sum_{i=1}^{i=4} \Omega_i\varphi_i\right),$$

que fournit l'équation (4).

Les coordonnées du plan tangent à (Φ') correspondent aux fonctions Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4 dans la transformation MΩ appliquée à l'équation (E); par suite, le réseau (Φ'_{uv}) correspond au réseau (F'_{uv}) dans une transformation K_1.

Exprimons la relation qui existe entre les congruences engendrées par les droites a et b, en disant qu'elles se correspondent dans une transformation Λ. En se servant des résultats du n° 12, on peut établir le théorème suivant : *Si* n *congruences* W Γ_1, Γ_2, ..., Γ_n *correspondent dans des transformations* Λ *à une congruence* W Γ_0, *on peut joindre aux* $n+1$ *congruences* Γ_0, Γ_1, Γ_2, ..., Γ_n, $2^n - n - 1$ *congruences* W *de manière à obtenir un système de* 2^n *congruences* W *jouissant de la propriété suivante : une quelconque des congruences du système correspond dans des transformations* Λ *à* n *congruences de ce système.*

D'après ce qui a été indiqué plus haut, on peut tracer sur l'une des nappes de la surface focale de chacune des 2^n congruences un réseau conjugué (u, v) à invariants ponctuels égaux et sur l'autre nappe, un réseau conjugué (u, v) à invariants tangentiels égaux; les réseaux à invariants ponctuels égaux forment un système $(K)_{2^n}$ et les réseaux à invariants tangentiels égaux, un système $(K_1)_{2^n}$.

IX.

22. ξ, η, ζ, θ désignant quatre solutions d'une équation de Moutard

$$(e) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = kz,$$

posons

$$(21) \qquad x = H(\xi, \theta), \qquad y = H(\eta, \theta), \qquad z = H(\zeta, \theta).$$

Le réseau (u, v), décrit par le point M de coordonnées x, y, z, est le réseau conjugué à invariants ponctuels égaux le plus général.

Soit ω une solution quelconque de l'équation (e). Désignons par (e_1) l'équation qui correspond à (e) dans la transformation Mω et par $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \theta_1$ les solutions de (e_1) qui correspondent respectivement à ξ, η, ζ, θ dans cette transformation. Posons

$$(22) \qquad x_1 = \mathrm{H}(\xi_1, \theta_1), \qquad y_1 = \mathrm{H}(\eta_1, \theta_1), \qquad z_1 = \mathrm{H}(\zeta_1, \theta_1),$$

les constantes d'intégration étant choisies de manière à avoir

$$(23) \qquad \begin{cases} x_1 - x = \xi\theta_1 - \theta\xi_1, \\ y_1 - y = \eta\theta_1 - \theta\eta_1, \\ z_1 - z = \zeta\theta_1 - \theta\zeta_1. \end{cases}$$

Le réseau (u, v), décrit par le point M_1 de coordonnées x_1, y_1, z_1, est le réseau conjugué à invariants ponctuels égaux qui correspond au réseau (M_{uv}) dans la transformation K la plus générale. Si $\omega = \theta$, les réseaux (M_{1uv}), (M_{uv}) sont parallèles.

Posons, α, β, γ désignant des constantes arbitraires :

$$\bar\xi = \xi + \alpha\theta, \qquad \bar\eta = \eta + \beta\theta, \qquad \bar\zeta = \zeta + \gamma\theta,$$
$$\bar\xi_1 = \xi_1 + \alpha\theta_1, \qquad \bar\eta_1 = \eta + \beta\theta_1, \qquad \bar\zeta_1 = \zeta_1 + \gamma\theta_1.$$

$\bar\xi, \bar\eta, \bar\zeta$ sont des solutions de l'équation (e) et $\bar\xi_1, \bar\eta_1, \bar\zeta_1$, des solutions de l'équation (e_1); $\bar\xi_1, \bar\eta_1, \bar\zeta_1$ correspondent respectivement à $\bar\xi, \bar\eta, \bar\zeta$ dans la transformation Mω. On n'altère pas les seconds membres des équations (21), (22) et (23) lorsqu'on y remplace respectivement ξ, η, ζ par $\bar\xi, \bar\eta, \bar\zeta$ et ξ_1, η_1, ζ_1 par $\bar\xi_1, \bar\eta_1, \bar\zeta_1$.

23. Posons

$$\bar a = \frac{\bar\xi}{\theta}, \qquad \bar b = \frac{\bar\eta}{\theta}, \qquad \bar c = \frac{\bar\zeta}{\theta};$$
$$\bar a_1 = \frac{\bar\xi_1}{\theta_1}, \qquad \bar b_1 = \frac{\bar\eta_1}{\theta_1}, \qquad \bar c_1 = \frac{\bar\zeta_1}{\theta_1}.$$

Soient $\bar{P}$ le point de coordonnées $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ et $\bar{P}_1$ le point de coordonnées $\bar{a}_1, \bar{b}_1, \bar{c}_1$. Les réseaux $(\bar{P}_{uv})$, $(\bar{P}_{1uv})$ sont des réseaux conjugués à invariants ponctuels égaux qui se correspondent dans une transformation K. Ils sont respectivement parallèles aux réseaux (M_{uv}), (M_{1uv}) et leur correspondent dans des transformations K. Les droites MM_1, $\bar{P}\bar{P}_1$ sont parallèles et le plan $M\bar{P}\bar{P}_1M_1$ touche son enveloppe à l'intersection des droites $M\bar{P}_1, M_1\bar{P}$. Les réseaux (u, v), décrits par les points $M, M_1, \bar{P}, \bar{P}_1$, forment un système $(K)_4$.

24. Posons

$$\bar{X} = H(\bar{\eta}, \bar{\zeta}), \qquad \bar{Y} = H(\bar{\zeta}, \bar{\xi}), \qquad \bar{Z} = H(\bar{\xi}, \bar{\eta});$$
$$X_1 = H(\bar{\eta}_1, \bar{\zeta}_1), \quad Y_1 = H(\bar{\zeta}_1, \bar{\xi}_1), \quad Z_1 = H(\bar{\xi}_1, \bar{\eta}_1),$$

et disposons des constantes d'intégration qui figurent dans les expressions de $\bar{X}_1$, de $\bar{Y}_1$ et de $\bar{Z}_1$ de manière à avoir

$$\bar{X}_1 - \bar{X} = \bar{\eta}\bar{\zeta}_1 - \bar{\zeta}\bar{\eta}_1,$$
$$\bar{Y}_1 - \bar{Y} = \bar{\zeta}\bar{\xi}_1 - \bar{\xi}\bar{\zeta}_1,$$
$$\bar{Z}_1 - Z = \bar{\xi}\bar{\eta}_1 - \bar{\eta}\bar{\xi}_1.$$

Soient $\bar{F}$ le point de coordonnées $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ et $\bar{F}_1$ le point de coordonnées $\bar{X}_1, \bar{Y}_1, \bar{Z}_1$. La droite $\bar{F}\bar{F}_1$ engendre la congruence W la plus générale et admet $\bar{F}, \bar{F}_1$ comme points focaux. Les paramètres des lignes asymptotiques des surfaces $(\bar{F})$, $(\bar{F}_1)$ sont u, v. Les surfaces (M) et $(\bar{F})$ se correspondent avec orthogonalité des éléments et il en est de même des surfaces (M_1) et $(\bar{F}_1)$. Les droites $\bar{F}\bar{F}_1$, MM_1 sont orthogonales. O désignant l'origine des coordonnées, les normales aux surfaces $(\bar{F})$, $(\bar{F}_1)$ sont respectivement parallèles aux droites $O\bar{P}, O\bar{P}_1$.

25. Si les réseaux (M_{uv}), (M_{1uv}) sont orthogonaux, ce sont des réseaux isothermiques qui se correspondent dans une transformation de Darboux. Alors, les réseaux $(\overline{P}_{uv})$, $(\overline{P}_{1uv})$ sont aussi des réseaux isothermiques qui se correspondent dans une transformation de Darboux et qui correspondent respectivement aux réseaux (M_{uv}), (M_{1uv}) dans des transformations de Christoffel.

26. Dans le cas particulier où les surfaces (M), (M_1) sont minima, les réseaux $(\overline{P}_{uv})$, $(\overline{P}_{1uv})$ appartiennent à une même sphère. Si l'on dispose des constantes α, β, γ de manière que le centre de cette sphère coïncide avec le point O, la droite $O\overline{P}$, qui est parallèle à la normale à la surface $(\overline{F})$, est aussi parallèle à la normale à la surface (M); donc la surface $(\overline{F})$ correspond à la surface (M) avec parallélisme des plans tangents; or, elle lui correspond avec orthogonalité des éléments; donc la surface $(\overline{F})$ est la surface minima adjointe de la surface (M). De même, la surface $(\overline{F}_1)$ est la surface minima adjointe de la surface (M_1). La figure considérée ici a été signalée par M. Bianchi (*). Nous la compléterons au n° 33.

27. Les formules (21), (22) et (23), jointes aux résultats du n° 12, conduisent à une deuxième démonstration du théorème du n° 17 et à de nouvelles expressions des coordonnées des 2^n réseaux dont il est question dans l'énoncé de ce théorème.

28. Les résultats établis au n° 23 admettent une généralisation que nous allons indiquer.

Envisageons un système $(K)_{2^n}$, les coordonnées des 2^n réseaux (u, v) qui le composent étant définies par les formules qui résultent des considérations du n° 27. Un raisonnement tout semblable à celui du n° 23 permet de faire correspondre à ce système un autre système $(K)_{2^n}$, formé aussi de réseaux

---

(*) *Lezioni di Geometria differenziale*, vol. 2, § 351.

(u, v), les deux systèmes ayant entre eux les relations suivantes : 1° Tout réseau du premier système est parallèle à l'un des réseaux du second système et lui correspond dans une transformation K; 2° Si deux réseaux du premier système se correspondent dans une transformation K, les réseaux du second système qui leur correspondent se correspondent aussi dans une transformation K et la droite qui joint les points générateurs des deux premiers réseaux est parallèle à la droite joignant les points générateurs des deux derniers.

L'ensemble des deux systèmes est un système $(K)_{2^{n+1}}$. En vertu du théorème établi dans ce numéro, on peut adjoindre à ce système un système $(K)_{2^{n+1}}$ formé de réseaux parallèles à ceux du premier et qui leur correspondent dans des transformations K. Ce système se déduit du premier par translation.

29. Désignons par S le système $(K)_{2^n}$ défini au début du n° 28. Des considérations semblables à celles du n° 24 conduisent à un système $(G)_{2^n}$ que nous désignerons par Σ et qui donne lieu aux propriétés suivantes : 1° Chacune des surfaces de ce système admet u, v comme paramètres de ses lignes asymptotiques et correspond avec orthogonalité des éléments à la surface qui porte l'un des réseaux (u, v) du système $(K)_{2^n}$; 2° Si deux surfaces du système $(G)_{2^n}$ se correspondent dans une transformation G, les réseaux du système $(K)_{2^n}$ qui leur correspondent se correspondent dans une transformation K et la droite qui joint les points générateurs des deux surfaces est orthogonale à la droite joignant les points générateurs des deux réseaux.

30. Conformément au théorème du n° 28, on peut adjoindre au système S un système $(K)_{2^n}$ formé de réseaux parallèles à ceux du premier et leur correspondant dans des transformations K. Ce nouveau système n'est défini qu'à une translation près. On peut le choisir de manière que la droite joignant le point O au point générateur d'un quelconque des réseaux qui le composent soit parallèle à la normale à l'une des surfaces du système Σ. Nous le désignerons alors par la lettre S'.

31. Les systèmes S, S' forment un système $(K)_{2n+1}$ que nous désignerons par S''. Par application du théorème du n° 29, nous pouvons faire correspondre à ce système un système $(G)_{2n+1}$ que nous désignerons par Σ''. Celui-ci se compose du système Σ et d'un autre système $(G)_{2n}$ que nous désignerons par Σ'. Σ' correspond à S' de la même manière que Σ correspond à S. En vertu du théorème du n° 30, on peut adjoindre au système S'' un système $(K)_{2n+1}$ formé de réseaux (u, v) parallèles à ceux du premier et qui leur correspondent dans des transformations K, ce nouveau système, que nous désignerons par $\overline{S''}$, étant tel que les droites joignant le point O aux points générateurs des réseaux qui le composent soient parallèles aux normales des surfaces correspondantes du système Σ''. D'après une remarque faite à la fin du n° 28, $\overline{S''}$ doit pouvoir être déduit de S'' par translation. Or, les droites joignant le point O aux points générateurs des réseaux du système S' sont respectivement parallèles aux normales aux surfaces correspondantes du système Σ. Donc, les systèmes S'' et $\overline{S''}$ coïncident et les droites joignant le point O aux points générateurs des réseaux du système S sont respectivement parallèles aux normales des surfaces correspondantes du système Σ'.

32. Les considérations du n° 31 supposent $n > 1$; elles sont valables si $n = 1$, à condition de désigner par $(G)_2$ le système de deux surfaces qui se correspondent dans une transformation G et par $(K)_2$ le système de deux réseaux conjugués à invariants ponctuels égaux qui se correspondent dans une transformation K.

Reportons-nous à la figure des n^{os} 23 et 24. Au système $(K)_4$

formé des réseaux (u, v) décrits par les points M, M_1, $\overline{P}$, $\overline{P}_1$ correspond un système $(G)_4$ formé des surfaces $(\overline{F})$, $(\overline{F}_1)$ et de deux surfaces que nous désignerons par $(\overline{\Phi})$, $(\overline{\Phi}_1)$. Nous supposerons que les points focaux des droites $\overline{F}\,\overline{\Phi}$ et $\overline{F}_1\overline{\Phi}_1$ sont respectivement $\overline{F}$, $\overline{\Phi}$ et $\overline{F}_1$, $\overline{\Phi}_1$. Cela posé, les droites OM, OM_1 sont respectivement parallèles aux normales aux surfaces $(\overline{\Phi})$, $(\overline{\Phi}_1)$.

33. Dans le cas particulier considéré au n° 26, les surfaces (M), (M_1) sont des surfaces minima qui se correspondent dans une transformation de Darboux ; les surfaces $(\overline{F})$, $(\overline{F}_1)$ sont respectivement les surfaces minima adjointes des surfaces (M), (M_1) et les réseaux $(\overline{P}_{uv})$, $(\overline{P}_{1uv})$ appartiennent à une sphère Ω de centre O. En vertu du théorème du n° 29, la surface (Φ) correspond à la sphère Ω avec orthogonalité des éléments, $\overline{\Phi}$ et $\overline{P}$ étant des points correspondants ; donc la droite d menée par $\overline{\Phi}$, parallèlement à $O\overline{P}$, engendre une congruence isotrope dont (Φ) est la surface moyenne. Comme d est parallèle à la normale à la surface $(\overline{F})$, celle-ci est l'enveloppée moyenne de la congruence. De même, la parallèle à $O\overline{P}_1$, menée par $\overline{\Phi}_1$, engendre une congruence isotrope dont $(\overline{\Phi}_1)$ est la surface moyenne et $(\overline{F}_1)$ l'enveloppée moyenne.

Les surfaces $(\overline{\Phi})$ et $(\overline{\Phi}_1)$ étant les focales d'une congruence W, on voit qu'il y a des congruences W dont les surfaces focales sont des surfaces moyennes de congruences isotropes. Il est extrêmement probable que la congruence, lieu de la droite $\overline{\Phi}\,\overline{\Phi}_1$, est la congruence W la plus générale jouissant de cette propriété. C'est là un point que nous nous proposons d'examiner.

X.

34. Soit ω une fonction de u. z désignant une fonction quelconque de u, posons

$$\bar{z} = \frac{1}{\omega} \int \left(z \frac{d\omega}{du} - \omega \frac{dz}{du} \right) du.$$

Nous appellerons transformation M et nous désignerons par $M\omega$ l'opération en vertu de laquelle on déduit $\bar{z}$ de z. Les transformations M jouissent de propriétés toutes semblables à celles des transformations de Moutard. Nous leur consacrerons prochainement un écrit spécial.

OPTIQUE. — **L'existence d'une déviation constante dans la réfraction par un prisme biréfringent,**

par J.-E. VERSCHAFFELT, correspondant de l'Académie.

J'ai constaté, il y a plusieurs années déjà (*), qu'un prisme biréfringent taillé symétriquement, lorsqu'il est placé dans un milieu d'indice convenable, fait dévier les ondes extraordinaires d'un angle qui est indépendant de l'incidence. J'ai donné de ce fait une démonstration analytique (**), mais cette démonstration était assez compliquée et était d'ailleurs criticable. C'est pourquoi je désire y revenir.

Je rappellerai que, si 2ω est l'angle du prisme, ε l'angle déterminant la direction de propagation des ondes extraordinaires dans le prisme, que δ_1 et δ_2 déterminent les directions des ondes incidente et émergente, et qu'enfin v et r soient les vitesses de propagation des ondes dans le milieu ambiant et dans le prisme, on a

$$\left.\begin{aligned}\sin(\delta_1 - \omega) &= \frac{v}{r}\sin(\varepsilon - \omega)\\ \sin(\delta_2 + \omega) &= \frac{v}{r}\sin(\varepsilon + \omega).\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

La déviation est d'ailleurs

$$\delta = \delta_2 - \delta_1.$$

(*) *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des sciences), 1910, p. 176.
(**) *Ibid.*, p. 380.

Par addition et soustraction les équations (1) donnent :

$$\left.\begin{aligned}\cos\frac{1}{2}(2\omega+\delta)\sin\frac{1}{2}(\delta_2+\delta_1) &= \frac{v}{r}\sin r\cos\omega \\ \sin\frac{1}{2}(2\omega+\delta)\cos\frac{1}{2}(\delta_2+\delta_1) &= \frac{v}{r}\cos\varepsilon\sin\omega\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

et l'on déduit de là, en éliminant $\delta_2 + \delta_1$ et posant

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(2\omega+\delta)=\mu,$$

$$\mu^4 v^2\cos^2\omega\sin^2\varepsilon+\mu^2\left[v^2(\cos^2\omega\sin^2\varepsilon+\sin^2\omega\cos^2\varepsilon)-r^2\right]+ \\ +v^2\sin^2\omega\cos^2\varepsilon=0. \tag{3}$$

Telle est l'équation qui fait connaître μ, donc aussi la déviation δ, en fonction de l'angle ε.

A cette équation on peut ajouter cette autre :

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\delta_2+\delta_1)=\mu\operatorname{tg}\varepsilon\operatorname{cotg}\omega. \tag{4}$$

Si nous remplaçons r par sa valeur :

$$r=\sqrt{a^2\sin^2\varepsilon+b^2\cos^2\varepsilon} \tag{5}$$

et que nous donnions à v la valeur particulière

$$v=\frac{ab}{\sqrt{a^2\sin^2\omega+b^2\cos^2\omega}}, \tag{6}$$

l'équation (3) prend la forme

$$(\mu^2 b^2\cos^2\omega-a^2\sin^2\omega)(\mu^2 a^2\sin^2\varepsilon-b^2\cos^2\varepsilon)=0. \tag{7}$$

On déduit de là

$$\mu = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(2\omega + \delta) = \frac{a}{b} \operatorname{tg} \omega \; (^*) \tag{8}$$

de sorte qu'il est prouvé par là que, si v a la valeur indiquée par (6), la déviation reste constante.

La vérification expérimentale de l'existence d'une déviation constante prouve d'ailleurs que r est nécessairement lié à ε par la relation (5), c'est-à-dire que la section principale extraordinaire de la surface d'onde est conforme à la théorie. En effet, si nous écrivons l'équation (3) sous la forme

$$r^2 = v^2 \left[(1 + \mu^2) \cos^2 \omega \sin^2 \varepsilon + \left(1 + \frac{1}{\mu^2}\right) \sin^2 \omega \cos^2 \varepsilon \right],$$

nous voyons que si μ reste constant, on a

$$r^2 = a^2 \sin^2 \varepsilon + b^2 \cos^2 \varepsilon,$$

a^2 et b^2 ayant les valeurs suivantes :

$$a^2 = v^2 (1 + \mu^2) \cos^2 \omega \qquad b^2 = v^2 \left(1 + \frac{1}{\mu^2}\right) \sin^2 \omega;$$

de là on tire de nouveau les relations (6) et (8).

(*) On reconnaît aisément que $2\omega + \delta < \pi$, de sorte que $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(2\omega + \delta)$ est positif; et, comme il en est de même de $\operatorname{tg} \omega$, c'est bien avec le signe $+$ que le second membre doit être pris.

La solution

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(2\omega + \delta) = \pm \frac{b}{a} \operatorname{cotg} \varepsilon \qquad \text{d'où} \qquad \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\delta_2 + \delta_1) = \pm \frac{b}{a} \operatorname{cotg} \omega$$

satisfait bien à (1), mais ne correspond pas au problème physique, car il faut que $\delta_2 + \delta_1$ s'annule pour $\varepsilon = 0$.

ALGÈBRE. — **Systèmes triplement infinis de coniques dans un plan,**

par M. STUYVAERT, Correspondant de l'Académie.

L'objet de ce travail est une question d'invariantologie de quatre coniques d'un même plan; et, malgré l'apparence géométrique, le problème traité est de l'algèbre pure.

Le nombre considérable et discordant de formes invariantes trouvé pour trois coniques n'est pas bien engageant pour passer à quatre courbes. D'ailleurs la connaissance d'invariants pour un système de formes n'a pas, en soi, tant d'intérêt; il en est autrement quand on interprète analytiquement ou géométriquement l'annulation d'un invariant, c'est-à-dire quand on examine quelle exception au système le plus général constitue l'évanouissement d'une forme invariante I, ou encore quelle limitation la relation $I = 0$ apporte à la variabilité des quatre séries de six coefficients homogènes des coniques.

Au lieu de s'occuper des invariants I, on peut se proposer, comme recherche parallèle ou préalable, l'étude des systèmes exceptionnels, soit que l'on trouve ultérieurement, ou non, les invariants correspondants.

Une situation exceptionnelle est celle où les quatre coniques passent par un même point, mais elle implique deux conditions, et l'on doit s'attendre à en trouver de plus simples.

Voici une façon de découvrir des exceptions au système de quatre coniques : on résout un certain problème pour le système le plus général, et l'on examine dans quelles circonstances la solution tombe en défaut. Les polynômes considérés pourraient être à plus de deux variables indépendantes et d'un degré quelconque ; si d'abord nous nous renfermons dans un champ restreint, c'est que la question présente, à notre avis, assez de nouveauté et de difficulté pour justifier un examen.

Voici cette question : Si l'on a un système linéaire de ∞^3 courbes planes, et qu'on prenne un point arbitraire du plan, il passe, par ce point, un réseau de ces courbes ; il y a exception seulement quand le point choisi appartient à toutes les courbes du système. Mais en prenant deux points, on détermine un faisceau, et les auteurs ne font pas assez observer que le fait peut présenter des exceptions ; notre problème est donc celui-ci : *Dans un système linéaire triplement infini de courbes planes, quand deux points cessent-ils de définir un faisceau pour définir un réseau?*

On verra, par l'exemple des coniques, que ces couples de *points neutres* sont en nombre simplement infini ; leur ensemble est une courbe ou un système de lignes ; et c'est donc le lieu des couples de points de base des réseaux du système. Ce lieu est connu (cf. E. Pascal, *Repertorium*, 2e édit., pp. 338 et 341), mais derechef ce sont les exceptions qu'il faut examiner.

En étudiant ce lieu, nous donnerons une représentation canonique nouvelle des systèmes de ∞^3 coniques, et une classification des dégénérescences, avec les formes invariantes correspondantes ; nous préciserons aussi la question de la réalité des éléments et les liens de cette théorie avec les transformations Cremona biquadratiques et avec la surface de Steiner. Nous aurons besoin des coniques dégénérées du système ; leur étude a été faite déjà, mais encore une fois dans le cas général ; par contre, les auteurs qui ont exposé le problème correspondant pour la surface de Steiner ont vu les exceptions ; toutefois il y a lieu de préciser un de leurs résultats. Nous réservons pour plus tard quelques développements relatifs à des réseaux de coniques, des systèmes de courbes algébriques, de quadriques et d'autres sufaces.

Cherchons d'abord les CONIQUES DÉGÉNÉRÉES du système ∞^3 : toute droite u fait partie d'une telle courbe dégénérée, car trois points de u déterminent une conique du système; la droite v qui complète la courbe dégénérée répond à u dans une transformation évidemment unidéterminative et réversible.

Le fait que cette transformation est généralement biquadratique est connu. L'étude des systèmes de coniques se fait d'habitude au moyen des coniques conjuguées (v. *Encyc. des sc. math.*, III, 18, n^{os} 37 et suiv.); or un système ∞^3 est conjugué à un faisceau tangentiel; les couples de droites du premier sont les couples de droites conjuguées par rapport à toutes les coniques du faisceau tangentiel; et l'on applique le corrélatif du théorème connu : les couples de points conjugués pour un faisceau ponctuel se correspondent dans une transformation Cremona. Or C. Servais (*Mathesis*, 1887, pp. 129 et 187) ayant discuté tous les cas particuliers de ce théorème, on a une voie ouverte pour traiter le problème complètement.

Pourtant nous ne passerons pas par le faisceau tangentiel : nous résoudrons le problème au moyen des équations les plus générales, quitte à particulariser ensuite pour avoir les exceptions. Il s'agit, en somme, de considérer l'identité, en coordonnées homogènes x_1, x_2, x_3 :

$$(1)\quad \alpha a_x^2 + \beta b_x^2 + \gamma c_x^2 + \delta d_x^2 \equiv (u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3)(v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3),$$

et il est superflu de mettre un coefficient de proportionnalité au second membre : on le suppose incorporé aux coefficients u. De là, si l'on désigne par $a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots$ la forme développée du symbole a_x^2, etc., les six relations

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{rrrrrrrl}
\alpha a_{11} + & \beta b_{11} + & \gamma c_{11} + & \delta d_{11} & - v_1u_1 & & & = 0,\\
2\alpha a_{12} + & 2\beta b_{12} + & 2\gamma c_{12} + & 2\delta d_{12} & - v_1u_2 & - v_2u_1 & & = 0,\\
\alpha a_{22} + & \beta b_{22} + & \gamma c_{22} + & \delta d_{22} & & - v_2u_2 & & = 0,\\
2\alpha a_{13} + & 2\beta b_{13} + & 2\gamma c_{13} + & 2\delta d_{13} & - v_1u_3 & & - v_3u_1 & = 0,\\
2\alpha a_{23} + & 2\beta b_{23} + & 2\gamma c_{23} + & 2\delta d_{23} & & - v_2u_3 & - v_3u_2 & = 0,\\
\alpha a_{33} + & \beta b_{33} + & \gamma c_{33} + & \delta d_{33} & & & - v_3u_3 & = 0.
\end{array}\right.$$

La symétrie en u et v montre que la transformation est réversible; ces équations donnent les rapports mutuels de α, β, γ, δ, v_1, v_2, v_3; les trois derniers nous intéressent seuls, et, comme nous l'avons prévu, v_1, v_2, v_3 sont proportionnels à des fonctions quadratiques de u_1, u_2, u_3. Mais les équations (2) ne donnent plus les rapports mutuels de α, β, γ, δ, v_1, v_2, v_3 si la matrice suivante est nulle :

$$(3)\qquad \left\| \begin{array}{ccccccc} a_{11} & b_{11} & c_{11} & d_{11} & -u_1 & & \\ 2a_{12} & 2b_{12} & 2c_{12} & 2d_{12} & -u_2 & -u_1 & \\ a_{22} & b_{22} & c_{22} & d_{22} & & -u_2 & \\ 2a_{13} & 2b_{13} & 2c_{13} & 2d_{13} & -u_3 & & -u_1 \\ 2a_{23} & 2b_{23} & 2c_{23} & 2d_{23} & & -u_3 & -u_2 \\ a_{33} & b_{33} & c_{33} & d_{33} & & & -u_3 \end{array} \right\|.$$

En supprimant l'une ou l'autre des trois dernières colonnes, on voit sans peine que cette matrice s'annule pour trois systèmes de valeurs des rapports u_1, u_2, u_3; en général, la transformation Cremona fait correspondre à la droite v un faisceau tangentiel à trois tangentes fixes communes, et une variable avec v.

Ainsi nous retrouvons la solution du problème des coniques dégénérées, mais pour le cas général; il reste à analyser les exceptions. Car nous venons de constater l'existence de trois droites exceptionnelles; mais il peut arriver qu'elles soient ou confondues, ou en nombre infini.

Seulement, si la dernière matrice ne représente que trois droites, peut-être confondues, celles-ci apparaissent comme trois des tangentes communes à deux courbes de seconde classe; la tangente commune à défalquer est réelle si les équations a_x^2, ... sont à coefficients réels, donc une des trois droites au moins est réelle. Si la matrice représente plus de trois droites, elle en représente une infinité comprenant un faisceau du second ou du premier ordre; mais les deux courbes de seconde classe ne peuvent avoir toutes leurs tangentes communes imaginaires, puisqu'il y en a au moins une réelle à défalquer; et si parmi les droites annulant la matrice il y a un faisceau du premier ordre, il est à sommet réel, sinon le faisceau à sommet imaginaire conjugué satisfait aussi, ce qui ramène au cas du faisceau de second ordre.

Bref, il y a au moins une droite exceptionnelle réelle; désignons-la par u; il lui répond au moins un faisceau de droites v réelles, car les équations donnant les v sont linéaires.

Or, si dans le système ∞^3, il y a un faisceau dégénéré en une droite u et un faisceau de droites v, adjoignons une courbe du système étrangère à ce faisceau; nous formons un réseau à deux points de base, savoir les points où u rencontre la nouvelle conique. Réciproquement, si un réseau de courbes du système a deux points de base, réels, imaginaires ou confondus, par un point arbitraire de la droite réelle u qui les porte (tangente commune si les points sont confondus), on peut mener un faisceau de courbes du réseau, et ce faisceau se décompose en la droite u plus un faisceau de droites v. La discussion ultérieure porte sur le fait que le sommet du faisceau v peut être extérieur à u ou situé sur u. Mais on peut déjà affirmer ceci : la droite joignant un couple de *points neutres* est une droite exceptionnelle de la transformation Cremona; donc le lieu Λ des points neutres, s'il est vraiment une infinité simple de points, se décompose en lignes droites.

Si le sommet du faisceau v est extérieur à la droite u, on peut prendre pour deux coniques définissant le système ∞^3, la droite u combinée avec deux droites v, ou en faisant une transformation de coordonnées, les deux courbes dégénérées $x_1x_3 = 0$, $x_1x_3 = 0$. Dans le cas contraire, on pourra prendre $x_1^2 = 0$ et $x_1x_2 = 0$.

1° Examinons la première alternative : les quatre coniques définissant le système sont, après soustraction, ramenées à

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} a_x^2 &\equiv x_1x_2, \qquad b_x^2 \equiv x_1x_3,\\ c_x^2 &\equiv c_1x_1^2 + c_2x_2^2 + c_3x_2x_3 + c_4x_3^2,\\ d_x^2 &\equiv d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + d_3x_2x_3 + d_4x_3^2; \end{aligned}\right.$$

les deux dernières déterminent un faisceau dont un élément au moins a une équation telle que

$$(5)\qquad fx_2^2 + gx_2x_3 + hx_3^2 = 0,$$

et ceci représente deux droites par le sommet x_2x_3 ; si elles sont réelles et distinctes, prenons-les comme nouveaux côtés x_2, x_3 de référence ; les deux coniques a_x^2, b_x^2 déterminent un faisceau qui peut tout aussi bien être défini par les nouvelles formules x_1x_2, x_1x_3 ; la troisième s'écrit x_2x_3 ; après soustraction, le système est défini par ces quatre expressions :

$$(6)\qquad x_1x_2, \qquad x_1x_3, \qquad x_2x_3, \qquad d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + d_3x_3^2,$$

c'est-à-dire *par une conique* d *et par un réseau de coniques ayant pour points de base les trois sommets d'un triangle autoconjugué pour cette conique* d.

Les hypothèses où un ou deux des coefficients d s'évanouissent ne doivent pas être exclues quand on fait la classification des systèmes ∞^3 ; alors il y a un ou deux points de base ; mais il n'y a pas lieu de considérer ces hypothèses pour le problème ici traité, lequel est alors immédiatement résolu. Toutefois nous traiterons dans un autre travail la question des réseaux à trois points de base dans les systèmes à un point de base.

Le cas des formules (6), évidemment réalisable, est le cas général ; si les droites $fx_2^2 + gx_2x_3 + hx_3^2 = 0$ sont imaginaires conjuguées, on peut les prendre pour côtés du triangle de référence, donc faire une substitution imaginaire ; alors le triangle autoconjugué a un sommet réel et deux imaginaires.

Mais nous cherchons à opérer dans le domaine réel, et nous traiterons ce cas en prenant deux nouveaux côtés réels x_2, x_3, conjugués harmoniques par rapport aux deux droites imaginaires, et nous aurons

$$(7) \qquad x_1x_3, \qquad x_1x_3, \qquad x_2^2 + mx_3^2, \qquad x_1^2 + nx_2x_3 + px_3^2;$$

nous supposons m positif; nous avons pu diviser par le coefficient de x_2^2 dans la troisième expression, car il n'est pas nul, et par celui de x_1^2 dans la dernière, car s'il était nul, le système aurait un point de base. Il est permis de réunir les formules (6) et (7) en admettant pour m des valeurs positives et négatives; nous séparons néanmoins, à cause de la simplicité et symétrie des formules (6).

Enfin, si les droites $fx_2^2 + gx_2x_3 + hx_3^2$ sont confondues, on les prend comme côté x_2, et l'on se trouve dans l'hypothèse $m = 0$ (ou encore, sauf le nom des variables, on est ramené à la deuxième des alternatives à examiner).

2° Occupons-nous à présent du système

$$a_x^2 \equiv x_1^2, \qquad b_x^2 \equiv x_1x_2,$$
$$c_x^2 \equiv c_1x_1x_3 + c_2x_2^2 + c_3x_2x_3 + c_4x_3^2,$$
$$d_x^2 \equiv d_1x_1x_3 + d_2x_2^2 + d_3x_2x_3 + d_4x_3^2;$$

derechef les deux derniers polynômes définissent un faisceau dont un élément au moins a la forme $fx_2^2 + gx_2x_3 + hx_3^2$; il se compose de deux droites réelles, imaginaires ou confondues; par rapport à ce couple, le rayon x_2 a un conjugué harmonique toujours réel, et distinct de x_2 si h n'est pas nul; on prend ce conjugué pour côté x_3, et l'on peut diviser par le coefficient de x_3^2 dans la troisième expression; d'où, après soustraction, le système

$$(8) \qquad x_1^2, \qquad x_1x_2, \qquad mx_2^2 + x_3^2, \qquad d_1x_1x_3 + d_2x_2^2 + d_3x_2x_3.$$

Si h est nul et g non nul, on peut prendre $fx_2 + gx_3$ pour nouveau côté x_3, ce qui donne

$$x_1^2, \qquad x_1x_2, \qquad x_2x_3, \qquad d_1x_1x_3 + d_2x_2^2 + d_3x_2x_3,$$

mais ceci, sauf le nom des variables, est le cas particulier du système (7) pour $m = 0$.

Enfin, si h et g sont nuls, on a

$$(9) \qquad x_1^2, \quad x_1x_2, \quad x_2^2, \quad d_1x_1x_3 + d_2x_2x_3 + d_3x_3^2,$$

où l'on peut supposer d_3 non nul, sinon les coniques du système ont un point commun x_1x_2 et y touchent une même droite.

Examinons les coniques dégénérées dans les systèmes réduits (6), (7), (8), (9). Le premier donne

$$\alpha x_1x_2 + \beta x_1x_3 + \gamma x_2x_3 + \delta(d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + d_3x_3^2) \equiv u_x v_x,$$
$$u_1v_1 = \delta d_1, \qquad u_2v_2 = \delta d_2, \qquad u_3v_3 = \delta d_3;$$

la transformation Cremona est une *inversion;* le lieu Λ des *points neutres* se compose des trois côtés du triangle de référence, seules droites exceptionnelles de la transformation; deux points neutres associés sont toujours sur un même côté du triangle. Celui-ci est parfois appelé *triangle chordal* des quatre coniques.

Pour avoir les couples de *points neutres* sur une droite exceptionnelle, il faut chercher ses intersections avec les coniques du système; faisons, par exemple, $x_3 = 0$ dans l'équation du système (6); nous obtenons

$$dx_1x_2 + \delta(d_1x_1^2 + d_2x_2^2) = 0;$$

c'est une *involution* dont deux éléments sont : le couple de sommets du triangle de référence et les intersections du côté x_3 avec la conique d_x^2. L'équation précédente a deux racines égales si $\alpha^2 = 4\delta^2 d_1 d_2$, ce qui exige, pour la réalité, que d_1 et d_2 soient de même signe. Comme le triangle est réel, si d_x^2 est à coefficients réels, et sans points réels, d_1, d_2, d_3 sont de même signe, il y a *six* réseaux réels à deux points de base confondus; sinon il n'y en a que *deux*.

Une droite quelconque coupe les côtés du triangle en trois points; les *associés* de ces points sont aussi alignés, car ils sont sur la conique du système qui contient la droite donnée.

La transformation Cremona a *quatre droites* coïncidant avec leurs transformées, savoir :

$$u_1 : u_2 : u_3 = \sqrt{d_1} : \pm \sqrt{d_2} : \pm \sqrt{d_3},$$

résultat connu en général (et alors on peut définir le système au moyen de ses quatre droites doubles). Elles sont réelles si la conique d_x^2 est sans point réel; sinon elles sont imaginaires conjuguées deux à deux. Elles coupent les côtés du triangle de référence aux points doubles des involutions.

Prenons le système (7) avec les hypothèses $m \geq 0$, l'identité

$$\alpha x_1 x_2 + \beta x_1 x_3 + \gamma (x_2^2 + m x_3^2) + \delta (x_1^2 + n x_2 x_3 + p x_3^2) \equiv u_x v_x$$

donne

$$u_1 v_1 = \delta, \qquad u_2 v_2 = \gamma, \qquad u_2 v_3 + u_3 v_2 = \delta n, \qquad u_3 v_3 = \gamma m + \delta p$$

et par suite les relations

$$\begin{aligned} -n u_1 v_1 + u_3 v_2 + u_2 v_3 &= 0, \\ -p u_1 v_1 - m u_2 v_2 + u_3 v_3 &= 0 \end{aligned}$$

qui définissent la transformation Cremona; les droites exceptionnelles annulent la matrice

$$\left\| \begin{matrix} -n u_1 & u_3 & u_2 \\ -p u_1 & -m u_2 & u_3 \end{matrix} \right\|;$$

ceci exige, ou bien $u_1 = u_3^2 + m u_2^2 = 0$; ou bien $m n u_2 + p u_3 = p u_2 - n u_3 = 0$, d'où $u_2 = u_3 = 0$, car le déterminant $mn^2 + p^2$ est positif, puisque $m \geq 0$ et n p sont réels. Donc on a bien *un triangle à deux côtés imaginaires conjugués,* si m est positif.

Sur la droite $u_2 = u_3 = 0$ ou $x_1 = 0$, seule droite exceptionnelle réelle, on a l'involution

$$\gamma (x_2^2 + m x_3^2) + \delta x_3 (n x_2 + p x_3) = 0,$$

dont les éléments doubles s'obtiennent en écrivant

$$\delta^2 n^2 - 4\gamma(\gamma m + \delta p) = 0,$$

et ils sont réels si m est positif, parce que les coefficients de δ^2 et γ^2 sont alors de signes contraires.

Les droites doubles sont données par

$$u_1^2 = \delta, \qquad u_2^2 = \gamma, \qquad 2u_2u_3 = \delta n, \qquad u_3^2 = \gamma m + \delta p,$$

d'où l'équation en $u_2 : u_3$,

$$-mnu_2^2 - 2pu_2u_3 + nu_3^2 = 0;$$

elle a deux racines réelles si m est positif, l'une positive et l'autre négative; d'autre part on a $nu_1^2 = 2u_2u_3$, d'où

$$\left(\frac{u_1}{u_3}\right)^2 = \frac{2}{n}\left(\frac{u_2}{u_3}\right)$$

donc deux valeurs de $u_1 : u_3$ sont réelles et deux imaginaires. Ainsi *il y a quatre droites doubles dont deux réelles*.

On voit sans peine que, dans les cas généraux (6) et (7), il n'y a qu'*un* réseau à trois points de base.

On énonce aisément les modifications apportées aux derniers résultats par l'hypothèse $m = 0$; notons seulement que deux des quatre droites doubles coïncident et qu'il est alors impossible de représenter le système ∞^3 par celles de ses coniques qui dégénèrent en droites doubles. Au surplus, ce cas de $m = 0$ se confond, comme on va le voir, avec le premier des cas suivants.

Passons aux formules (8); elles donnent

$$\alpha x_1^2 + \beta x_1x_2 + \gamma(mx_2^2 + x_3^2) + \delta(d_1x_1x_3 + d_2x_2^2 + d_3x_2x_3) \equiv u_x v_x;$$

en égalant terme à terme, il est superflu d'écrire les relations contenant α et β, car elles sont toujours vérifiées par un choix convenable de α, β qui ne paraissent qu'une fois ; on peut donc se restreindre à

$$u_2v_2 = \gamma m + \delta d_2, \qquad u_3v_3 = \gamma, \qquad u_1v_3 + u_3v_1 = \delta d_1,$$
$$u_2v_3 + u_3v_2 = \delta d_3;$$

des deux premières, on déduit, en éliminant γ :

$$u_2v_2 - mu_3v_3 = \delta d_2;$$

avec les deux dernières, ceci fournit les rapports mutuels de v_1, v_2, v_3, δ, à moins que l'on n'ait

$$\left\| \begin{matrix} u_3 & \cdot & u_1 & d_1 \\ \cdot & u_3 & u_2 & d_3 \\ \cdot & u_2 & -mu_3 & d_2 \end{matrix} \right\| = 0;$$

ceci exige, ou bien $u_3 = 0$ avec $u_2(d_3u_1 - d_1u_2) = 0$; ou bien $u_3d_2 - u_2d_3 = u_2d_2 + mu_3d_3 = 0$, ce qui représente la seule droite $u_2 = u_3 = 0$, à moins que $d_2^2 + md_3^2$ ne soit nul, et alors les coniques données passent par un au moins des points $x_1 = 0$, $x_3 = \pm x_2\sqrt{m}$; or nous avons exclu ce cas.

Les droites exceptionnelles de la transformation Cremona sont ici réduites à deux, savoir $u_2 = u_3 = 0$ et $u_3 = d_3u_1 - d_1u_2 = 0$. La transformation même s'exprime par

$$v_1 : v_2 : v_3 = [u_1(u_3d_2 - u_2d_3) + d_1(u_2^2 + mu_3^2)] : u_3(u_2d_2 + mu_3d_3)$$
$$: u_3(u_2d_3 - u_3d_2).$$

Si d_3 n'est pas nul, ceci est, à une transformation linéaire près, une *semi-inversion trilinéaire ;* si d_3 est nul, c'est une *quasi-inversion* (C. Servais, *loc. cit.*), car les polynômes du second membre, interprétés en coordonnées ponctuelles, représentent trois coniques ayant un contact bi- ou triponctuel.

Sur la droite exceptionnelle $x_1 = 0$ (ou $u_2 = u_3 = 0$), seule droite exceptionnelle quand d_3 est nul, l'involution des points neutres est

$$\gamma(mx_2^2 + x_3^2) + \delta x_2(d_2x_2 + d_3x_3) = 0\,;$$

les points doubles sont donnés par

$$4\gamma^2 m + 4\gamma\delta d_2 - \delta^2 d_3^2 = 0\,;$$

les réseaux correspondant aux racines $\gamma : \delta$ de cette équation sont réels, imaginaires ou confondus, suivant que $md_3^2 + d_2^2$ est positif, négatif ou nul; toutefois si $d_3 = 0$, les racines sont toujours réelles et l'une est $\gamma = 0$; les points doubles sont alors $x_1 = x_2 = 0$ et $x_1 = x_3 = 0$.

La seconde droite exceptionnelle $u_3 = 0$, $d_3u_1 - d_1u_2 = 0$, distincte de la première seulement si d_3 diffère de zéro, a pour équation ponctuelle $x_1d_1 + x_2d_3 = 0$; on en tire x_2 en fonction de x_1, et en remplaçant dans l'équation du système, on n'obtient que des termes en x_1^2 et x_3^2; donc la seconde droite exceptionnelle porte une involution dont les points doubles sont le point x_1x_2 et le point de rencontre de la droite exceptionnelle avec le côté x_3. Par suite, le système n'a qu'un réseau à trois points de base dont deux confondus au sommet x_1x_2.

La seconde droite exceptionnelle correspond à un faisceau de droites v que l'on trouve en faisant la substitution de ρd_1, ρd_3, 0 à u_1, u_2, u_3 dans les relations du début de ce paragraphe; ceci donne

$$\rho d_3v_2 = \gamma m + \delta d_2, \qquad 0 = \gamma, \qquad \rho d_1v_3 = \delta d_1, \qquad \rho\, d_3v_3 = \delta d_3,$$

ou simplement $\rho d_3v_2 = \delta d_2$, $\rho v_3 = \delta$; le sommet de ce faisceau a pour équation tangentielle $d_2v_3 - d_3v_2 = 0$ et ne se trouve pas sur la droite exceptionnelle, car on devrait avoir $0 - d_3d_3 = 0$; donc, dans le cas où d_3 n'est pas nul, le système ici considéré aurait pu être étudié au paragraphe précédent et, comme nous l'avons dit, il se confond avec le système (7) dans l'hypothèse $m = 0$.

Pour avoir les coniques du système (8) qui se réduisent à des droites doubles, nous devons envisager les relations

$$2u_1u_3 = \delta d_1, \qquad 2u_2u_3 = \delta d_2, \qquad u_2^2 - mu_3^2 = \delta d_2;$$

elles sont vérifiées pour $u_2 = u_3 = 0$ et en outre pour

$$d_3u_2^2 - 2d_2u_2u_3 - md_3u_3^2 = 0 \qquad (d_3 \neq 0)$$

d'où

$$u_2 : u_3 = \frac{d_2 \pm \sqrt{d_2^2 + md_3^2}}{d_3} \qquad (d_3 \neq 0),$$

puis $u_1 : u = d_1 : d_3$; c'est-à-dire pour deux droites réelles ou imaginaires, jamais confondues, puisque $d_2^2 + md_3^2$ n'est pas nul. En tout donc trois droites doubles.

Et si $d_3 = 0$, on a, ou bien $u_3 = 0$ et par suite $u_2 = 0$; ou bien $u_2 = 0$, $-mu_3^2 = \delta d_2$, $2u_1u_3 = \delta d_1$, d'où $u_2 = 0$, $mu_3d_1 + 2u_1d_2 = 0$; en tout seulement deux droites doubles, et elles sont réelles.

Considérons enfin les formules (9); elles donnent successivement :

$$\alpha x_1^2 + \beta x_1x_2 + \gamma x_2^2 + \delta(d_1x_1x_3 + d_2x_2x_3 + d_3x_3^2) \equiv u_xv_x,$$
$$u_1v_3 + u_3v_1 = \delta d_1, \qquad u_2v_3 + u_3v_2 = \delta d_2, \qquad u_3v_3 = \delta d_3;$$

ces relations sont satisfaites, d'abord pour $u_3 = v_3 = \delta = 0$, et alors l'équation du système, réduite à ses trois premiers termes, représente le réseau des couples de droites issues du sommet x_1x_2; donc on doit supposer u_3 non nul et l'on aura successivement :

$$v_3 = \delta d_3 : u_3,$$
$$u_1(\delta d_3 : u_3) + u_3v_1 = \delta d_1, \qquad v_1 = \delta(d_1u_3 - d_3u_1) : u_3^2,$$
$$u_2(\delta d_3 : u_3) + u_3v_2 = \delta d_2, \qquad v_2 = \delta(d_2u_3 - d_3u_2) : u_3^2,$$

et finalement :

$$v_1 : v_2 : v_3 = (d_1u_3 - d_3u_1) : (d_2u_3 - d_3u_2) : d_3u_3;$$

ceci est une transformation *linéaire* en coordonnées tangentielles ; entre deux droites correspondantes $u_x \equiv u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3$ et $v_x \equiv (d_1u_3 - d_3u_1)x_1 + (d_2u_3 - d_3u_2)x_2 + d_3u_3x_3$, on a une relation simple, car $d_3u_x - v_x$ est une expression privée du terme en x_3, et $d_3u_x + v_x = 0$ est une droite fixe $d_1x_1 + d_2x_2 + 2d_3x_3 = 0$, ainsi la transformation est une *homologie harmonique* où x_1x_2 est le centre, et la droite fixe $d_1x_1 + d_2x_2 + 2d_3x_3$ est l'axe. Quant aux droites pouvant porter des *points neutres* ou appartenir à un faisceau de coniques dégénérées, elles passent par le centre d'homologie, car les relations

$$u_1v_3 + u_3v_1 = \delta d_1, \qquad u_2v_3 + u_3v_2 = \delta d_2, \qquad u_3v_3 = \delta d_3$$

ne sont indéterminées en $v_1 : v_2 : v_3$ que si $u_3 = 0$.

L'involution de *points neutres* sur chaque droite issue de x_1x_2 a ses points doubles au centre et sur l'axe d'homologie.

Pour avoir les droites doubles, il faut écrire $2u_1u_3 = \delta d_1$, $2u_2u_3 = \delta d_2$, $u_3^2 = \delta d_3$, ce qui exige, ou bien $u_3 = 0$, ou bien $u_1 : u_2 : u_3 = d_1 : d_2 : 2d_3$; ainsi les droites doubles sont l'axe d'homologie et les rayons issus du centre.

En résumé, les formules (8) dans le cas de d_3 non nul, puis de d_3 nul, et les formules (9) constituent TROIS EXCEPTIONS E, E′, E″ au système de quatre coniques d'un plan ; la première peut aussi se représenter par les expressions (7) où l'on fait $m = 0$. Rappelons les formules réduites :

$$\begin{array}{llllll}
\text{(E)} & \left\{ \begin{array}{l} x_1x_2, \\ x_1^2, \end{array} \right. & \begin{array}{l} x_1x_3, \\ x_1x_2, \end{array} & \begin{array}{l} x_2^2, \\ mx_2^2 + x_3^2, \end{array} & \begin{array}{l} x_1^2 + nx_2x_3 + px_3^2, \\ d_1x_1x_3 + d_2x_2^2 + d_3x_2x_3, \end{array} \\
\text{(E}'\text{)} & x_1^2, & x_1x_2, & mx_2^2 + x_3^2, & d_1x_1x_3 + d_2x_2^2, \\
\text{(E}''\text{)} & x_1^2, & x_1x_2, & x_2^2, & d_1x_1x_3 + d_2x_2x_3 + d_3x_3^2.
\end{array}$$

Ces formules ne sont pas les plus simples possibles. Ainsi le système (E), sous sa première forme, gagne en simplicité si l'on déplace le côté x_3 ; pour rendre en outre cette première forme analogue à la seconde et à des résultats connus, remplaçons x_1, x_2, x_3 par x_2, x_1, $x_3 - (nx_1 : 2p)$; il vient

$$x_1x_2,\qquad x_2\left(x_3-\frac{n}{2p}x_1\right),\qquad x_1^2,\qquad x_2^2+nx_1\left(x_3-\frac{n}{2p}x_1\right)+p\left(x_3-\frac{n}{2p}x_1\right)^2;$$

dans la dernière expression, les termes en x_1x_3 se détruisent et, si l'on soustrait encore la première de la seconde et la troisième de la quatrième, on aboutit à

$$\text{(E)}\qquad x_1x_2,\qquad x_2x_3,\qquad x_1^2,\qquad x_2^2+px_3^2;$$

on peut même, en affectant les coordonnées de facteurs convenables, remplacer cette dernière par $x_2^2 + x_3^2$, mais alors on ne se préoccupe pas de la distinction du réel et de l'imaginaire.

De même, dans (E′), on remplace x_1, x_2, x_3 par x_1, x_2, $(md_1x_1 : 2d_2) - x_3$, ce qui donne

$$x_1^2,\qquad x_1x_2,\qquad mx_2^2+\left(\frac{md_1}{2d_2}x_1-x_3\right)^2,\qquad d_1x_1\left(\frac{md_1}{2d_2}x_1-x_3\right)+d_2x_2^2,$$

ou encore

$$x_1^2,\qquad x_1x_2,\qquad mx_2^2+\frac{m^2d_1^2}{4d_2^2}x_1^2-\frac{md_1}{d_2}x_1x_2+x_3^2,$$
$$\frac{md_1^2}{2d_2}x_1^2-d_1x_1x_3+d_2x_2^2;$$

en soustrayant la première, multipliée par des facteurs convenables, de la troisième et de la quatrième, puis la dernière, multipliée par $(m : d_2)$, de la troisième, on aboutit à

$$\text{(E}'\text{)}\qquad x_1^2,\qquad x_1x_2,\qquad x_3^2,\qquad x_2^2+px_1x_3.$$

Pour vérifier certains résultats précédents, exprimons qu'un point x a même conjugué y, pour les quatre coniques a_x^2, b_x^2, c_x^2, d_x^2,

$$a_x a_y = 0, \qquad b_x b_y = 0, \qquad c_x c_y = 0, \qquad d_x d_y = 0,$$

d'où, en éliminant les y :

$$\left\| \begin{matrix} a_x a_i & b_x b_i & c_x c_i & d_x d_i \end{matrix} \right\| = 0 \qquad (i = 1, 2, 3);$$

le premier membre est la *matrice jacobienne* des quatre polynômes donnés. Elle s'annule en général pour six points x et, à cause de la symétrie des formules, on a donc trois couples de points x, y répondant à la question. Ce sont les points doubles des involutions de points neutres, car soient D, D$'$ les points doubles d'une telle involution : il y a un réseau de coniques du système touchant en D la droite DD$'$; les points D et D$'$ sont conjugués pour toutes les courbes du réseau et aussi pour une conique non dégénérée du système, tangente en D$'$ à DD$'$. La réciproque résulte du fait qu'il y a en général le même nombre de points conjugués et de points doubles.

Voici maintenant le calcul effectué pour les systèmes exceptionnels E, E$'$, E$''$, les deux premiers sous la forme réduite du paragraphe précédent :

$$\text{(E)} \qquad \left\| \begin{matrix} x_2 & 0 & 2x_1 & 0 \\ x_1 & x_3 & 0 & 2x_2 \\ 0 & x_2 & 0 & 2px_3 \end{matrix} \right\| = 0$$

se vérifie pour $x_1 = x_2 = 0$, pour $x_2 = x_3 = 0$ et pour $x_1 = 0$ avec $x_2^2 = px_3^2$, donc il y a *quatre points conjugués ;*

$$\text{(E}'\text{)} \qquad \left\| \begin{matrix} 2x_1 & x_2 & 0 & px_3 \\ 0 & x_1 & 0 & 2x_2 \\ 0 & 0 & 2x_3 & px_1 \end{matrix} \right\|$$

s'annule seulement pour $x_1 = x_2 = 0$ et $x_1 = x_3 = 0$, *deux points conjugués;*

$$(\mathrm{E}'') \qquad \left\| \begin{matrix} 2x_1 & x_2 & 0 & d_1x_3 \\ 0 & x_1 & 2x_2 & d_2x_3 \\ 0 & 0 & 0 & d_1x_1 + d_2x_2 + 2d_3x_3 \end{matrix} \right\|$$

s'annule pour $d_1x_1 + d_2x_2 + 2d_3x_3 = 0$ ou pour $x_1 = x_2 = 0$, on a donc *une droite de points plus un point isolé.*

Le problème faisant l'objet du présent travail peut être examiné d'un nouveau point de vue. Exprimons algébriquement que les points x et y déterminent, non pas un faisceau, mais un réseau de courbes du système ∞^3 : les deux relations

$$\alpha a_x^2 + \beta b_x^2 + \gamma c_x^2 + \delta d_x^2 = 0,$$
$$\alpha a_y + \beta b_y + \gamma c_y + \delta d_y = 0$$

ne suffisent donc pas pour calculer deux des paramètres α, β, γ, en fonctions des deux autres et par suite

$$\left\| \begin{matrix} a_x^2 & b_x^2 & c_x^2 & d_x^2 \\ a_y^2 & b_y^2 & c_y^2 & d_y^2 \end{matrix} \right\| = 0.$$

Or ceci exprime que les relations

$$X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = a_x^2 : b_x^2 : c_x^2 : d_x^2$$

donnent un même système de valeurs aux rapports mutuels des X pour deux systèmes distincts x_1, x_2, x_3 et y_1, y_2, y_3 des paramètres. Et ces dernières relations sont les équations paramétriques d'une surface Σ, dans l'espace où X_1, X_2, X_3, X_4 sont coordonnées ponctuelles homogènes, en prenant pour paramètres les rapports mutuels de x_1, x_2, x_3; ainsi notre formule donne les points doubles de la surface Σ. Il est bien connu que celle-ci est une surface de Steiner, généralement du quatrième ordre, à trois droites doubles concourantes; ces droites doubles répondent aux trois droites de *points neutres* (*). De plus, les formules réduites du cas général :

$$X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = x_1x_2 : x_1x_3 : x_2x_3 : (d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + d_3x_3^2)$$

donnent facilement l'équation de la surface (et ont été utilisées déjà pour cet objet)

$$d_1X_1^2X_2^2 + d_2X_1^2X_3^2 + d_3X_2^2X_3^2 = X_1X_2X_3X_4.$$

Aux droites du plan des x_1, x_2, x_3 répondent des coniques sur Σ; aux coniques de ce plan, des courbes c_4 sur Σ; aux coniques du système ∞^3, des sections planes de Σ; aux coniques dégénérées de ce système, des sections tangentes; aux coniques réduites à des droites doubles, des plans touchant Σ suivant une conique.

Faisons les calculs pour les exceptions E, E′, E″ en commençant par E″, la plus facile; on a

$$X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = x_1^2 : x_1x_2 : x_2^2 : (d_1x_1x_3 + d_2x_2x_3 + d_3x_3^2),$$

d'où $X_2^2 = X_1X_3$, et la surface de Steiner dégénère en un cône double.

Pour E, nous prendrons les formules (8), parce qu'il suffit d'y faire $d_3 = 0$ pour avoir ensuite E′ ; nous aurons

$$\rho X_1 = x_1^2, \qquad \rho X_2 = x_1x_2, \qquad \rho X_3 = mx_2^2 + x_3^2,$$
$$\rho X_4 = d_1x_1x_3 + d_2x_2^2 + d_3x_2x_3\,;$$

d'où successivement :

$$x_2^2 = \rho\frac{X_2^2}{X_1}, \qquad x_3^2 = \rho\left(X_3 - m\frac{X_2^2}{X_1}\right), \qquad \rho X_4 = d_1x_1x_3 + d_2\rho\frac{X_2^2}{X_1} + d_3\frac{X_2}{X_1}x_1x_3,$$
$$\rho\left(X_4 - d_2\frac{X_2^2}{X_1}\right) = x_1x_3\left(d_1 + d_3\frac{X_2}{X_1}\right);$$

(*) Voir, par exemple, G. Cotty, *Nouv. Ann. math.*, 1908.

en calculant ainsi, de deux manières, $x_2^1 x_3^2$, on obtient

$$\left(X_4 - d_2\frac{X_2^2}{X_1}\right)^2 = X_1\left(X_3 - m\frac{X_2^2}{X_1}\right)\left(d_1 + d_3\frac{X_2}{X_1}\right)^2$$

ou encore

$$(X_1X_4 - d_2X_2^2)^2 = (X_1X_3 - mX_2^2)(d_1X_1 + d_3X_2)^2;$$

telle est l'équation de la surface E; pour avoir la projection, sur le plan X_3, d'une section plane quelconque, remplaçons X_3 par $\lambda X_1 + \mu X_2 + \nu X_4$:

$$(X_1X_4 - d_2X_2^2)^2 = (d_1X_1 + d_3X_2)^2(\lambda X_1^2 + \mu X_1X_2 + \nu X_1X_4 - mX_2^2);$$

et pour avoir cette équation en coordonnées cartésiennes, remplaçons X_1, X_2, X_4 par y, x, $\alpha x + \beta y + \gamma$:

$$(p) \qquad \left\{\begin{aligned} &(\alpha xy + \beta y^2 + \gamma y - d_2x^2)^2 = (d_1y + d_3x)^2(\lambda y^2 + \mu xy \\ &\qquad + \nu\alpha xy + \nu\beta y^2 + \nu\gamma y - mx^2). \end{aligned}\right.$$

Dans le cas de d_3 non nul, la surface E a une arête cuspidale X_1, X_2 et une arête nodale suivant la seconde intersection de

$$d_1X_1 + d_3X_2 = 0, \qquad X_1X_4 - d_2X_2^2 = 0,$$

savoir :

$$d_1X_1 + d_3X_2 = 0, \qquad d_1d_2X_2 + d_3X_4 = 0,$$

et cette seconde droite coïncide avec la première dans le cas de $d_3 = 0$ ou de l'exception E'.

Dans ce dernier cas, l'équation (p) a la forme

$$(\gamma y - d_2x^2)^2 + 2\alpha xy(\gamma y - d_2x^2) + My^3 + Nx^2y^2 + Pxy^3 + Qy^4 = 0,$$

et la courbe représentée présente à l'origine un point *oscnodal*, c'est-à-dire un rebroussement où deux branches de courbes sont osculatrices (voir G. Salmon, *Courbes planes*, p. 306). En particulier, les plans tangents à cette surface E' contiennent des couples de coniques osculatrices sur la droite cuspidale.

Voici un moyen de contrôler que la courbe (p) possède à l'origine deux branches, simplement tangentes quand d_3 n'est pas nul, et osculatrices dans le cas contraire. Prenons x pour infiniment petit principal : l'équation (p) y fait correspondre quatre valeurs de y dont deux sont des infiniment petits du second ordre, et les autres supposées finies, ce qui peut être réalisé par un choix convenable de l'axe des y. Des six différences mutuelles de ces valeurs de y, cinq sont finies et une infiniment petite ; leur produit est donc aussi infiniment petit, et réciproquement, selon que ce produit est infiniment petit du second ou du troisième ordre ; il en est de même de la différence des deux valeurs de y. Or le carré du produit des différences est le discriminant, et nous devons constater dans quel cas il est du quatrième ou du sixième ordre infinitésimal.

En écrivant l'équation (p) sous la forme abrégée

$$Ay^4 + By^3 + Cy^2 + Dy + E = 0,$$

les coefficients A, B, C sont finis, D est du second ordre et E du quatrième ; le discriminant est, au signe près :

$$\begin{vmatrix} 4A & 3B & 2C & D & & \\ B & 2C & 3D & 4E & & \\ & 4A & 3B & 2C & D & \\ & B & 2C & 3D & 4E & \\ & & 4A & 3B & 2C & D \\ & & B & 2C & 3D & 4E \end{vmatrix} ;$$

développons, par le théorème de Laplace, d'abord pour les deux premières lignes, puis pour les deux suivantes, et ne prenons chaque fois que le terme d'ordre infinitésimal le moins élevé; nous trouvons ce résultat, du quatrième ordre :

$$(8AC - 3B^2)[(-4C^2)(8CE - 3D^2) - (-2CD)(-2CD)] \\ -(-2BC)[(-2BC)(8CE - 3D^2) - (-BD)(-2CD)] = \\ -16(4CE - D^2)(4AC^3 - B^2C^2).$$

Or si dans l'équation (p) on fait $d_3 = 0$, les termes d'ordre le moins élevé de C, D, E se réduisent à γ^2, $-2\gamma d_2 x^2$, $d_2^2 x^4$ et le terme du quatrième ordre infinitésimal de $4CE - D^2$ disparaît; le discriminant n'a plus alors de terme du quatrième ordre, mais seulement du sixième.

La méthode employée ci-dessus pour étudier le système ∞^3 de coniques ne diffère pas essentiellement du procédé connu utilisant les CONIQUES CONJUGUÉES $\Sigma d_{ij} u_i u_j$ des coniques données a_x^2, b_x^2, c_x^2, d_x^2. En effet, ces coniques conjuguées sont définies par la relation

$$\alpha_{11}a_{11} + 2\alpha_{12}a_{12} + \alpha_{22}a_{22} + 2\alpha_{13}a_{13} + 2\alpha_{23}a_{23} + \alpha_{33}a_{33} = 0$$

et par trois analogues :

$$\Sigma\alpha_{ij}b_{ij} = 0, \qquad \Sigma\alpha_{ij}c_{ij} = 0, \qquad \Sigma\alpha_{ij}d_{ij} = 0.$$

Les quatre coniques données étant indépendantes entre elles, la matrice des coefficients des relations ci-dessus en α_{ij} n'est pas nulle; soit, pour fixer les idées, le déterminant des quatre premières colonnes non nul; alors on peut exprimer α_{11}, α_{12}, α_{22}, α_{13} en fonctions de α_{23}, α_{33}; puis en substituant dans $\Sigma\alpha_{ij}u_i u_j$, on a un faisceau tangentiel de coniques, faisceau dont deux éléments se trouvent respectivement en faisant $\alpha_{23} = 0$ ou $\alpha_{33} = 0$ dans l'équation du faisceau ou dans les équations qui y conduisent;

donc les quatre tangentes communes à ce faisceau tangentiel annulent la matrice

$$\mathrm{M} \equiv \left\| \begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & a_{22} & a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ b_{11} & b_{12} & b_{22} & b_{13} & b_{23} & b_{33} \\ c_{11} & c_{12} & c_{22} & c_{13} & c_{23} & c_{33} \\ d_{11} & d_{12} & d_{22} & d_{13} & d_{23} & d_{33} \\ u_1^2 & u_1u_2 & u_2^2 & u_1u_3 & u_2u_3 & u_3^2 \end{array} \right\| .$$

Or, si cette matrice est nulle, on a la relation

$$u_1^2 = \lambda a_{11} + \mu b_{11} + \nu c_{11} + \pi d_{11}$$

et cinq analogues, d'où, multipliant par x_1^2, $2x_1x_2$, x_3^2 et additionnant :

$$(u_x)^2 = \lambda a_x^2 + \mu b_x^2 + \nu c_x^2 + \pi d_x^2 ;$$

donc étudier les tangentes communes au faisceau conjugué revient à étudier les coniques du système ∞^3 qui se réduisent à des droites doubles $(x_x)^2$; ceci est un exemple d'un théorème dont l'hypothèse et la thèse reviennent à lire une matrice M respectivement dans le sens des lignes ou dans le sens des colonnes.

Cela étant, appelons D_{ij} le déterminant, affecté d'un signe convenable, extrait de la matrice M par suppression de la dernière ligne et des colonnes i et j. Nous avons fait l'hypothèse $\mathrm{D}_{56} \gtrless 0$. Et nous pouvons écrire le faisceau tangentiel de coniques conjuguées

$$\left| \begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{22} & a_{13} & a_{23} + \lambda a_{33} \\ b_{11} & b_{12} & b_{22} & b_{13} & b_{23} + \lambda b_{33} \\ c_{11} & c_{12} & c_{22} & c_{13} & c_{23} + \lambda c_{33} \\ d_{11} & d_{12} & d_{22} & d_{13} & d_{23} + \lambda d_{33} \\ u_1^2 & u_1u_2 & u_2^2 & u_1u_3 & u_2u_3 + \lambda u_3^2 \end{array} \right| = 0$$

ou encore :

$$u_1^2(D_{16}+\lambda D_{15})+u_1u_2(D_{26}+\lambda D_{25})+u_2^2(D_{36}+\lambda D_{35})$$
$$+u_1u_3(D_{46}+\lambda D_{45})+u_2u_3D_{56}+\lambda u_3^2D_{56}=0.$$

Le discriminant de ce polynôme en u_1, u_2, u_3 est cubique en λ. Dans les systèmes exceptionnels E, E$'$, E$''$, on a respectivement deux des droites doubles confondues, les quatre confondues deux à deux, ou trois confondues. Donc, dans le cas E, le discriminant a une racine double ; dans le cas E$''$, une racine triple ; dans le cas E$'$, les coniques ont un double contact.

Représentons pour abréger :

D_{45}, D_{25}, D_{35}, D_{45} par m, n, p, q,
D_{16}, D_{26}, D_{36}, D_{46} par m', n', p', q' et D_{56} par r ;

le discriminant du faisceau tangentiel précédent devient

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2(m'+\lambda m) & n'+\lambda n & q'+\lambda q \\ n'+\lambda n & 2(p'+\lambda p) & r \\ q'+\lambda q & r & 2\lambda r \end{vmatrix}$$

ou, développé et divisé par 2 :

$$\begin{aligned}&\lambda^3[(4mp-n^2)r-pq^2]\\ &\quad+\lambda^2[(4mp'+4m'p+nq-2nn')r-q^2p'-2pqq']\\ &\quad+\lambda[-mr^2+(nq'+n'q+4m'p'-n'^2)r-pq'^2-2p'qq']\\ &\quad+(-m'r^2+n'q'r-p'q'^2).\end{aligned}$$

Si ce dernier polynôme s'écrit

$$a\lambda^3+b\lambda^2+c\lambda+d,$$

il a une racine double quand son discriminant est nul ; or, ce discriminant est

$$\delta=\begin{vmatrix} 3a & 2b & c & \\ b & 2c & 3d & \\ & 3a & 2b & c \\ & b & 2c & 3d \end{vmatrix}$$

ou, développé :

$$3\,(18abcd - 4b^3d - 4ac^3 - 27a^2d^2 + b^2c^2).$$

Il faut remplacer ici a, b, c, d par leurs valeurs, puis examiner le rôle spécial de r ou D_{56} ; car le calcul ayant été fait dans l'hypothèse de r non nul, si le discriminant δ contient le facteur r, il doit être divisé par r. Et c'est précisément le cas ; en effet, le discriminant δ s'évanouit chaque fois que le polynôme Δ en λ a un facteur carré, et dans l'hypothèse $r = 0$, Δ se réduit à $-\,2\,(p' + \lambda p)\,(q' + \lambda q)^2$. D'ailleurs, dans δ le terme indépendant de r est

$$\begin{aligned}
&54\,(-pq^2)(-\,q^2p' - 2pqq')(-\,pq'^2 - 2p'qq')(-\,p'q'^2)\\
&\quad -12\,(-\,q^2p' - 2pqq')^3\,(-\,p'q'^2) - - 12\,(-\,pq^2)\,(-\,pq'^2 - 2pqq')^3\\
&\quad -81p^2p'^2q^4q'^4 + 3q^2q'^2(qp' + 2pq')(pq' + 2p'q)^2 ;
\end{aligned}$$

en divisant par $3q^2q'^2$, le quotient est

$$\begin{aligned}
&18pp'qq'\,(2pq' + p'q)\,(pq' + 2p'q) + (2pq' + p'q)^2\,(2p'q + pq')^2\\
&\quad - 4p'q\,(2pq' + p'q)^3 - 4pq'\,(pq' + 2p'q)^3 - 27p^2p'^2q^2q'^2,
\end{aligned}$$

ou encore :

$$\begin{aligned}
&(2pq' + p'q)\,(pq' + 2p'q)\,(2p^2q'^2 + 23pp'qq' + 2p'^2q^2)\\
&\quad - 32p^3p'qq'^3 - 48p^2p^{12}q^2q'^2 - 24pp'^3q^3q' - 4p'^4q^4\\
&\quad - 4p^4q'^4 - 24p^3p'qq'^3 - 48p^2p'^2q^2q'^2 - 32pp'^3q^3q'\\
&\quad - 27p^2p'^2q^2q'^2 ;
\end{aligned}$$

les termes positifs sont

$$\begin{aligned}
&4p^4q'^4 + 46p^3p'qq'^3 + 4p^2p'^2q^2q'^2\\
&\qquad + 10p^3p'qq'^3 + 115p^2p'^2q^2q'^2 + 10pp\,{}^3q^3q'\\
&\qquad\qquad + 4p^2p'^2q^2q'^2 + 46pp'^3q^3q' + 4p'^4q^4
\end{aligned}$$

et se détruisent avec les termes négatifs.

Quant aux termes du premier degré en r, ils ne se détruisent pas, car la matrice M montre que les déterminants D_{46} ou q' et D_{56} ou r jouent des rôles symétriques, et $(\delta : r)$ étant du sixième degré en q' doit l'être aussi en r; or δ contient comme terme le plus élevé $4ac^3$, du septième degré en r, donc $(\delta : r)$ est du sixième degré.

Ainsi $(\delta : r)$ *est un* INVARIANT SIMULTANÉ DES QUATRE CONIQUES, *et cet invariant s'évanouit dans le cas exceptionnel* E.

Dans l'exception E'', Δ doit avoir une racine triple, donc s'évanouit la MATRICE INVARIANTE DE QUATRE CONIQUES :

$$\left\| \begin{matrix} 3a & 2b & c \\ b & 2c & 3d \end{matrix} \right\|.$$

Enfin, on a la *matrice* INVARIANTE caractérisant l'exception E', si l'on écrit les conditions pour que les coniques du faisceau tangentiel

$$\begin{aligned} m'u_1^2 + n'u_1u_2 + p'u_2^2 + q'u_1u_3 + ru_2u_3 + ou_3^2 \\ + \lambda(mu_1^2 + nu_1u_2 + pu_2^2 + qu_1u_3 + ou_2u_3 + ru_3^2) \end{aligned}$$

aient un *double contact*. Ceci revient à chercher les conditions pour que le faisceau contienne un *point double*, donc

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{lll} m' + \lambda m = \rho\mu_1^2, & n' + \lambda n = 2\rho\mu_1\mu_2, & p' + \lambda q = \rho\mu_2^2, \\ q' + \lambda q = 2\rho\mu_1\mu_3, & r + \lambda o = 2\rho\mu_2\mu_3, & o + \lambda r = r\mu_3^2; \end{array} \right.$$

on tire de là

$$(n' + \lambda n)^2 - 4(m' + \lambda m)(p' + \lambda q) = 0$$

et deux analogues, ou encore :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{c} (n'^2 - 4m'p') + \lambda(2nn' - 4m'p - 4mp') + \lambda^2(n^2 - 4mq) = 0, \\ q'^2 + \lambda(2qq' - 4m'r) + \lambda^2(q^2 - 4mr) = 0, \\ r^2 + \lambda(-4p'r) + \lambda^2(-4pr) = 0; \end{array} \right.$$

réciproquement, si ces relations ont une racine commune λ, on prend pour ρ une valeur arbitraire, la première des relations (1) donne μ_1 précédé du double signe, on choisit l'une à volonté et les autres relations (1) donnent μ_2 et μ_3 sans ambiguïté.

Dès lors des résultats connus (voir, par exemple, L.-L. Dines, *Amer. Journ. math.*, 1913) donnent les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une racine commune aux équations (2) sous forme de la matrice

$$\left\| \begin{array}{cccc} n'^2-4m'p' & 2nn'-4mp'-4m'p & n^2-4mp & \\ q'^2 & 2qq'-4rm' & q^2-4mr & \\ r^2 & -4rp' & -4rp & \\ & n'^2-4m'p' & 2nn'-4mp'-4m'p & n^2-4mp \\ & q'^2 & 2qq'-4rm' & q^2-4mr \\ & r^2 & -4rp' & -4rp \end{array} \right\| = 0;$$

chacune des lettres $m, n, p, \ldots, r$ est un déterminant à quatre lignes; le cas de $r = 0$ ne paraît pas annuler cette matrice; comme r est non nul, on peut le faire sortir des lignes 3 et 6. Rappelons aussi que l'évanouissement du tableau ci-dessus à quatre colonnes et six lignes n'équivaut qu'à deux conditions.

Physiologie. — **Remarques sur les relations admises entre la fonction du nerf splanchnique et la sécrétion surrénale d'adrénaline** (¹),

par Eug. GLEY et Alf. QUINQUAUD.

Depuis la publication, dans le *Bulletin de la Classe des sciences de l'Académie royale de Belgique* (1914, n° 7, pp. 299-339), du mémoire d'Eug. Gley et Alf. Quinquaud : *Relations entre les actions vaso-motrices et la sécrétion surrénale. Mécanisme de l'action vaso-constrictive des nerfs splanchniques,* les auteurs ont continué leurs recherches sur les conditions de l'activité du nerf splanchnique.

Les résultats de ces nouvelles recherches, qui se trouvent consignés dans diverses publications (²), infirment la donnée fondamentale du mémoire présenté en 1914 à l'Académie. Les auteurs ont, en effet, montré que les nerfs splanchniques, chez tous les animaux sur lesquels ils ont expérimenté, chats, chiens et lapins, conservent toute leur excitabilité après la surrénalectomie double ou après la ligature des deux troncs veineux lombo-surrénaux. A quoi donc tient le désaccord entre les faits présentés

---

(¹) Présenté par M. Léon Fredericq.

(²) E. Gley et Alf. Quinquaud : Des rapports entre la sécrétion surrénale et la fonction vaso-motrice du nerf splanchnique (*Comptes rendus de l'Acad. des sc.,* 10 janvier 1916, t. CLXII, p. 86). — La sécrétion surrénale d'adrénaline ne tient pas sous sa dépendance l'effet vaso-constricteur du sang asphyxique (*Comptes rendus de la Soc. de biologie,* 6 janvier 1917, t. LXXX, pp. 15-18). — La fonction des surrénales. I. — Du rôle physiologique supposé de l'adrénaline (*Journ. de physiol. et de pathologie générale,* juillet 1918, t. XVII, pp. 807-835). — La fonction des surrénales. II. — De la prétendue influence de la sécrétion d'adrénaline sur les nerfs du cœur (*Arch. néerlandaises de physiol.,* 1918, t. III, pp. 1-6).

à l'Académie en 1914 et ceux publiés en 1916, 1917 et 1918? Ce désaccord, d'après les auteurs, est dû à une cause très simple, à la lésion du système splanchnique, inévitable dans toutes les opérations sur les surrénales, quand on ne pratique pas ces opérations avec les précautions qu'ils ont décrites (¹). Aussi suffit-il de conduire correctement la surrénalectomie pour qu'il devienne impossible de découvrir, sur le chien tout comme sur le chat ou le lapin, une différence entre la réaction cardio-vasculaire obtenue, par l'excitation d'un splanchnique, avant cette opération et celle que l'on obtient après. De même, l'excitabilité des nerfs du cœur, tant des accélérateurs que des modérateurs, n'est nullement modifiée par cette opération.

Mais ces faits réduisaient singulièrement l'importance de la sécrétion surrénale d'adrénaline. Les auteurs furent par suite conduits à rechercher quelle est la véritable signification de cette sécrétion. Leurs expériences montrent que l'adrénaline, présente dans le sang de la veine cave inférieure au-dessus de l'embouchure des veines surrénales, après l'excitation d'un splanchnique, ne se retrouve pas dans le segment supérieur de la cave, ni dans le cœur, ou ne s'y retrouve qu'en quantité physiologiquement insignifiante. Il n'y a donc pas d'adrénalinémie physiologique.

De tout cela, il résulte que, du mémoire publié à l'Académie royale de Belgique en 1914, il n'y a plus à retenir que les résultats des expériences relatives à l'action du splanchnique après éviscération (pp. 307-308 et 316-317), ceux des expériences relatives aux excitations réflexes de ce nerf après surrénalectomie (pp. 308-312) et ceux des expériences relatives à la teneur du sang veineux surrénal en adrénaline durant les excitations du nerf dépresseur (pp. 312-315).

(¹) Voyez le mémoire du *Journal de physiologie et de pathologie générale* ci-dessus indiqué, 1918, p. 811.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — **La Gravifique**

(Deuxième communication) (*),

par TH. DE DONDER.

7. *Deuxième exemple : champ matérialitique pur.*

Cas de la matière dépourvue de pression intérieure. Considérons le cas le plus simple, celui où la matière est composée de particules incohérentes; ce fluide sera donc dépourvu de pression intérieure.

La théorie que nous allons développer comprend l'explication des mouvements des planètes et des satellites dans notre système solaire, et cela avec une précision à laquelle n'atteint pas la théorie de l'attraction newtonienne.

Le fluide matériel en chaque point et à chaque instant est animé d'une *vitesse généralisée*

$$u^\alpha \equiv \frac{dx_\alpha}{ds} \qquad \alpha = 1, 2, 3, 4, \tag{46}$$

où u^α est une fonction de x_1, x_2, x_3, x_4.

Nous montrerons plus loin comment on peut passer de cette vitesse généralisée dans l'espace-temps à la vitesse de la cinématique ordinaire dans l'espace.

En vertu de (1), on a

$$ds^2 = \sum_\alpha \sum_\beta g_{\alpha\beta} dx_\alpha dx_\beta \tag{47}$$

d'où

$$1 = \sqrt{\sum_\alpha \sum_\beta g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta} \equiv S. \tag{48}$$

(*) Présenté par M. Stroobant.

On aura donc :

$$S - 1 = 0. \tag{49}$$

Reportons-nous au principe d'Hamilton généralisé (§ 1) ; nous avons vu que la variation δ se rapporte aux potentiels gravifiques $g_{\alpha\beta}$ seuls ; on aura donc $\delta u^\alpha = 0$.

En vertu de (49), nous sommes amenés à poser

$$L = \rho(S - 1), \tag{50}$$

où ρ est une fonction de x_1, x_2, x_3, x_4 seulement.

Substituons cette expression de L dans les formules et les équations générales données ci-dessus dans les cinq premiers paragraphes. Calculons d'abord le tenseur symétrique $\mathfrak{T}_{\mu\nu}$ au moyen de (7) ; on aura

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}_{\mu\nu} = \mathfrak{T}_{\nu\mu} &= -(1 + \varepsilon_{\mu\nu})\frac{dL}{dg^{\mu\nu}} \\ &= \rho u_\mu u_\nu,\end{aligned} \tag{51}$$

en posant

$$u_\mu \equiv \sum_\alpha u^\alpha g_{\alpha\mu} \tag{52}$$

et en utilisant la formule

$$\frac{dg_{\alpha\beta}}{dg^{\mu\nu}} = -\left(1 - \frac{\varepsilon_{\mu\nu}}{2}\right)(g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} + g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}), \tag{53}$$

que l'on déduit aisément des identités

$$\sum_\alpha g_{\alpha\beta} g^{\alpha\nu} = \varepsilon_{\beta\nu}. \tag{54}$$

La valeur du tenseur asymétrique T_α^β est fournie par (12) ; on obtient immédiatement

$$T_\alpha^\beta = \rho u_\alpha u^\beta ; \tag{55}$$

il en résulte que

$$\mathrm{T} \equiv \sum_{\alpha} \mathrm{T}_{\alpha}^{\alpha} = \rho. \tag{56}$$

Les équations différentielles du champ gravifique considéré peuvent s'écrire (17) :

$$k(-g)^{\frac{1}{2}}\mathrm{G}_{\mu\nu} = \rho\left(u_{\mu}u_{\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\right). \tag{57}$$

Voyons maintenant ce que devient le théorème du tenseur asymétrique (§ 3). En vertu des équations (21), ce théorème peut s'écrire :

$$0 = \sum_{\nu}\left(\frac{d\mathrm{T}_{\sigma}^{\nu}}{dx_{\nu}} - \frac{1}{2}\sum_{\mu}\sum_{\alpha} g_{\alpha\mu,\sigma}\, g^{\mu\nu}\,\mathrm{T}_{\nu}^{\alpha}\right). \tag{58}$$

Substituons dans (58) les valeurs du tenseur asymétrique $\mathrm{T}_{\sigma}^{\nu}$ données par (55) ; on obtient

$$0 = \sum_{\nu}\left[\frac{d(\rho u_{\sigma}u^{\nu})}{dx_{\nu}} - \frac{1}{2}\sum_{\mu}\sum_{\alpha} g_{\mu\alpha,\sigma}\, g^{\mu\nu}\rho\, u_{\nu}u^{\alpha}\right]. \tag{59}$$

Effectuons les dérivations et utilisons (52) ; d'où

$$0 = \sum_{\nu}\left[\frac{d(\rho u^{\nu})}{dx_{\nu}}u_{\sigma} + \rho u^{\nu}\frac{du_{\sigma}}{dx_{\nu}} - \frac{1}{2}\rho\sum_{\mu} g_{\nu\mu,\sigma}u^{\mu}u^{\nu}\right]. \tag{60}$$

Mais on a, en outre :

$$\sum_{\nu}\frac{du_{\sigma}}{dx_{\nu}}u_{\nu} = \sum_{\mu}\left(g_{\nu\sigma,\mu}u^{\mu}u^{\nu} + g_{\mu\sigma}\frac{du^{\mu}}{dx_{\nu}}u^{\nu}\right). \tag{61}$$

Substituons (61) dans (60) ; d'où, en tout point où la fonction ρ est différente de zéro :

$$0 = \sum_{\mu}\sum_{\nu}\left(g_{\mu\sigma}\frac{du^{\mu}}{dx_{\nu}}u^{\nu} + \begin{bmatrix}\mu\nu\\ \sigma\end{bmatrix}u^{\mu}u^{\nu}\right) + u^{\sigma}\sum_{\nu}\frac{d(\rho u^{\nu})}{dx_{\nu}}. \tag{62}$$

Si l'on admet qu'on a (pour la signification physique de cette hypothèse, voir plus loin) :

$$\sum_{\nu} \frac{d(\rho u^{\nu})}{dx_{\nu}} = 0, \tag{63}$$

le théorème du tenseur asymétrique exprime qu'on a les quatre relations

$$0 = \sum_{\mu} \left(g_{\sigma\mu} \frac{d^2 x_{\mu}}{ds^2} + \sum_{\mu} \begin{bmatrix} \mu\nu \\ \sigma \end{bmatrix} \frac{dx_{\mu}}{ds} \cdot \frac{dx_{\nu}}{ds} \right), \tag{64}$$

car on a

$$\sum_{\nu} \frac{du^{\mu}}{dx_{\nu}} u^{\nu} = \frac{du^{\mu}}{ds} = \frac{d^2 x_{\mu}}{ds^2} \tag{65}$$

Remarquons que l'équation (63) exprime la condition nécessaire et suffisante pour que

$$\int \rho \, \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3 \delta x_4 \tag{66}$$

soit un invariant intégral des équations du mouvement du fluide dans l'espace-temps :

$$\frac{dx_i}{ds} = u^i, \tag{67}$$

où s joue le rôle de variable indépendante.

Les quatre équations (64) sont susceptibles d'une interprétation géométrique, extrêmement remarquable, dans l'espace-temps ; elles expriment, en effet, que *les trajectoires dans l'espace-temps décrites par le fluide matériel considéré sont des extrémales de cet espace-temps.*

Ces extrémales sont obtenues en annulant la variation

$$\delta \int \sqrt{\sum_{\alpha} \sum_{\beta} g_{\alpha\beta} dx_{\alpha} dx_{\beta}} \tag{68}$$

où la variation porte sur x_1, x_2, x_3, x_4.

En appliquant les règles bien connues du calcul des variations, on obtient les équations différentielles des extrémales suivantes (48) :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_\alpha}{ds} &= u^\alpha \\ \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial S}{\partial u^\alpha}\right) - \frac{\partial S}{\partial x_\alpha} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (69)$$

Or,

$$\frac{\partial S}{\partial u^\alpha} = \frac{\sum\limits_\beta g_{\alpha\beta} u^\beta}{S} = \frac{u_\alpha}{S} \qquad (70)$$

$$\frac{\partial S}{\partial x^\alpha} = \frac{\sum\limits_\beta \sum\limits_\gamma g_{\beta\gamma,\alpha} u^\beta u^\gamma}{2S} \qquad (71)$$

D'autre part, nous avons la condition complémentaire (48) :

$$S = 1. \qquad (72)$$

En tenant compte de celle-ci et des valeurs (70) et (71), les équations (69) peuvent s'écrire :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_\alpha}{ds} &= u^\alpha \\ \frac{du_\alpha}{ds} - \frac{1}{2}\sum_\beta \sum_\gamma g_{\gamma\beta,\alpha} u^\beta u^\gamma &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (73)$$

On voit immédiatement que ces équations sont les mêmes que les équations (64). C. Q. F. D.

Le mouvement du fluide admet dans l'espace-temps l'invariant intégral relatif

$$\int \sum_\alpha u_\alpha \delta x_\alpha \qquad (74)$$

Je dis que les équations différentielles des extrémales (64) peuvent se mettre sous la *forme canonique :*

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_\alpha}{ds} &= \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial u_\alpha} \\ \frac{du_\alpha}{ds} &= -\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x_\alpha} \end{aligned}\right\} \tag{75}$$

avec la *condition complémentaire*

$$\mathcal{S} \equiv \sqrt{\sum_\alpha \sum_\beta g^{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta} = 1. \tag{76}$$

Remarquons en passant que

$$S \equiv \mathcal{S} = 1. \tag{77}$$

Pour vérifier que les équations (75) et (76) sont équivalentes aux équations (64), il suffit de remarquer qu'on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial u_\alpha} &= \sum_\mu g^{\mu\alpha} u_\mu = u^\alpha \\ \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x_\alpha} &= \frac{1}{2} \sum_\mu \sum_\nu g^{\mu\nu,\alpha} u_\mu u_\nu \\ &= -\frac{1}{2} \sum_\gamma \sum_\beta g_{\beta\gamma,\alpha} u^\beta u^\gamma. \quad \text{(Voir équation 73.)} \end{aligned}$$

C. Q. F. D.

On voit que S est un invariant des équations (75) ; cette propriété peut être utilisée dans l'intégration de ces équations différentielles, comme je l'ai montré dans mon mémoire (II, p. 55).

Enfin, étudions le théorème du tenseur asymétrique au point de vue dynamique. En vertu des équations (27), la force totale généralisée est nulle. Mais ces équations (27) deviennent ici les équations (64), que l'on peut écrire :

$$\frac{d^2 x_\sigma}{ds^2} = -\sum_\mu \sum_\nu \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \sigma \end{matrix} \right\} u^\mu u^\nu \tag{78}$$

Ce théorème exprime que l'accélération généralisée dans l'espace-temps est *équilibrée* par une accélération apparente

$$\sum_{\mu}\sum_{\nu} \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \sigma \end{matrix} \right\} u^{\mu} u^{\nu} \tag{79}$$

due à la déformation de l'espace-temps et à la vitesse généralisée du fluide.

Multiplions les équations (78) respectivement par u^1, u^2, u^3, u^4 et sommons ; d'où

$$\frac{d}{ds}\sum_{\sigma}\frac{1}{2}(u^{\sigma})^2 = -\sum_{\mu}\sum_{\nu}\sum_{\sigma} \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \sigma \end{matrix} \right\} u^{\mu} u^{\nu} u^{\sigma}, \tag{80}$$

ce qui représente le théorème de Bernouilli dans l'espace-temps pour le fluide considéré.

Dans l'espace et le temps. Les résultats que nous venons d'obtenir grâce à l'espace-temps se transportent aisément dans l'espace et le temps. En effet, représentons les trois composantes de la vitesse dans l'espace par

$$v^{\alpha} = \frac{dx_{\alpha}}{dt} \qquad \alpha = 1, 2, 3. \tag{81}$$

on aura

$$u^{\alpha} = \frac{\dfrac{dx_{\alpha}}{dt}}{\dfrac{ds}{dt}} = \frac{v^{\alpha}}{\dfrac{ds}{dt}}, \qquad \alpha = 1, 2, 3, 4 \tag{82}$$

en posant

$$v^4 \equiv 1. \tag{83}$$

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\sum_{\alpha}\sum_{\beta} g_{\alpha\beta} v^{\alpha} v^{\beta}} \equiv \mathrm{V} \tag{84}$$

d'où

$$u^{\alpha} = v^{\alpha}\mathrm{V}^{-1} \tag{85}$$

ce qui permettra d'exprimer la vitesse généralisée en fonction de la vitesse ordinaire.

Les équations du mouvement du fluide (81) admettent, en vertu de (63) et de (66), l'*invariant intégral*

$$\int \rho V^{-1} \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3. \tag{86}$$

En effet, l'équation (63) peut s'écrire, en vertu de (85) :

$$\sum_{\alpha} \frac{d(\rho V^{-1} \cdot v^{\alpha})}{dx_{\alpha}} = 0 \qquad \alpha = 1, 2, 3, 4. \tag{87}$$

C. Q. F. D.

Donc le fluide se meut comme si ρV^{-1} était sa densité.

Je dis que *les trajectoires du fluide matériel considéré dans l'espace* (x_1, x_2, x_3) *sont des extrémales de cet espace.*

Montrons donc que les équations différentielles (64) expriment les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'on ait

$$\delta \int V dt = 0; \tag{88}$$

ici la variation porte sur x_1, x_3, x_3, v^1, v^2, v^3.

L'intégrale (88) est prise le long d'une trajectoire décrite dans l'espace depuis l'instant initial (fixe) t_0 jusqu'à l'instant final (fixe) t_1.

On a

$$u^{\alpha} = v^{\alpha} V^{-1}$$

d'où

$$\frac{d^2 x_{\alpha}}{ds^2} = \sum_{\nu} \frac{\partial (v^{\alpha} V^{-1})}{\partial x_{\nu}} (v^{\nu} V^{-1}). \tag{89}$$

Substituons ces valeurs dans (64); après simplification par V^{-1}, on aura

$$0 = \sum_{\mu} \sum_{\nu} \left[g_{\sigma\mu} \frac{\partial (v^{\mu} V^{-1})}{dx_{\nu}} v^{\nu} + \begin{bmatrix} \mu\nu \\ \sigma \end{bmatrix} v^{\mu} v^{\nu} V^{-1} \right]. \tag{90}$$

Mais ces équations peuvent encore s'écrire :

$$\sum_{\nu} \frac{\partial\left(\sum_{\mu} g_{\sigma\mu} v^{\mu} V^{-1}\right)}{dx_{\nu}} v^{\nu} - \frac{1}{2} V^{-1} \sum_{\mu}\sum_{\nu} g_{\mu\nu,\sigma} v^{\mu} v^{\nu} = 0. \tag{91}$$

Remarquons d'autre part qu'on a

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial v^{\sigma}} &= \sum_{\mu} g_{\sigma\mu} v^{\mu} V^{-1} \\ \frac{\partial V}{\partial x_{\sigma}} &= \frac{1}{2} V^{-1} \sum_{\mu}\sum_{\nu} g_{\mu\nu,\sigma} v^{\mu} v^{\nu}. \end{aligned}\right\} \tag{92}$$

En substituant (92) dans (91), on obtient

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial v^{\sigma}}\right) - \frac{\partial V}{\partial x_{\sigma}} = 0. \tag{93}$$

C. Q. F. D.

Ces équations pourront aussi se mettre sous la forme canonique (voir II, pp. 58 et 59). En utilisant l'invariant intégral (86), on obtiendra la liaison entre la force et la quantité de mouvement (voir II, p. 60).

Les équations (90) peuvent s'écrire :

$$\sum_{\mu} \frac{\partial(v^{\sigma} V^{-1})}{\partial x_{\mu}} v^{\mu} = - V^{-1} \sum_{\mu}\sum_{\nu} \left\{ {\mu\nu \atop \sigma} \right\} v^{\mu} v^{\nu}, \tag{94}$$

ou en effectuant :

$$\sum_{\mu} \frac{\partial v^{\sigma}}{\partial x_{\mu}} v^{\mu} - V^{-1} v^{\sigma} \sum_{\mu} \frac{dV}{\partial x_{\mu}} v^{\mu} = - \sum_{\mu}\sum_{\nu} \left\{ {\mu\nu \atop \sigma} \right\} v^{\mu} v^{\nu}. \tag{95}$$

Supposons $\sigma = 4$; d'où

$$\frac{d \log V}{dt} = \sum_{\mu}\sum_{\nu} \left\{ {\mu\nu \atop 4} \right\} v^{\mu} v^{\nu}. \tag{96}$$

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Breton (*Commandant Willy*). Les établissements d'artillerie belges pendant la guerre. Paris, 1917 ; gr. in-8° (xvii-198 p., pl.).

Rutot (*A.*). La conception nouvelle de l'Univers d'après les données de la science moderne. Bruxelles, 1918 ; in-16 (98 p.).

— La préhistoire. (Première partie. Introduction à l'étude de la préhistoire en Belgique.) Bruxelles, 1918 ; gr. in-8° (165 p., pl.).

Zunz (*Edgard*) et *György* (*Paul*). Contribution à l'étude de l'action des acides aminés des peptides et des protéoses sur la coagulation du sang. (Troisième communication : Action sur le plasma oxalaté filtré sur bougie Berkefeld.) Liége et Paris, 1914 ; extr. in-8° (78-84 pp.).

— A propos de l'action floculo-agglutinante de l'hétéroalbumose et de la protoalbumose vis-à-vis du fibrinogène et du plasma. Bruxelles, 1914 ; extr. in-8° (4 p.).

La Haye. *Flora Batava.* Livraisons 376-395. La Haye, 1914-1918 (in-f°, fig.).

* * *

TABLE DES MATIÈRES

CLASSE DES SCIENCES. — *Séance du 5 avril 1919.*

Adoption des conclusions de la Commission d'enquête chargée d'examiner l'attitude de M. Dollo 213

CORRESPONDANCE : M le Ministre des sciences et des arts transmet l'arrêté royal nommant M. H. Pirenne, président de l'Académie pour 1919. — Félicitations de Corrado Segre, associé, pour l'héroïsme de la Belgique. — Félicitations de l'Académie royale flamande au sujet de l'exclusion des associés ennemis. — Notification par des Sociétés belges de la radiation des savants des pays ennemis. — Communications du Comité international des recherches scientifiques. — Remerciements du Dr Roskam pour le prix qui lui a été décerné. — Pli cacheté. — Vote de l'impression d'un mémoire de M. Césàro. — Travaux à l'examen. — Hommages d'ouvrages 215

ÉLECTIONS : Présentation des candidats 216

CONCOURS : Prorogation 216

RAPPORTS : 1° De MM. Nolf et Fredericq, *Électro-physiologie musculaire,* par M. J. De Meyer; 2° De MM. Fredericq et Nolf, *Dualité et complexité de la réaction électrique du muscle strié,* par J. De Meyer. 217, 219

FONDATION AGATHON DE POTTER : Formation de la Commission 221

Règlement 221

PRÉROGATIVES ACADÉMIQUES 224

CONSEIL INTERNATIONAL DE RECHERCHES ET CONSEIL NATIONAL BELGE DE RECHERCHES. 225

Communications et Lectures.

BOTANIQUE — *Connexions anatomiques de la tige et de la racine;* note préliminaire (2 fig.), par A. Gravis 227

BIBLIOGRAPHIE. — *Liste des recueils bibliographiques des sciences mathématiques, physiques, chimiques et naturelles;* par Jean Massart 237

PHYSICO-CHIMIE. — *La loi de Faraday et l'action de l'effluve électrique sur les oxydes métalliques* (1 fig.); par A. de Hemptinne 249

ANALYSE MATHÉMATIQUE ET GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE. *Sur la transformation de Moutard et quelques-unes de ses applications géométriques;* par A. Demoulin 285

OPTIQUE. — *L'existence d'une déviation constante dans la réfraction par un prisme biréfringent;* par J.-E. Verschaffelt 289

ALGÈBRE. — *Systèmes triplement infinis de coniques dans un plan;* par M. Stuyvaert 289

PHYSIOLOGIE. — *Remarques sur les relations admises entre les fonctions des nerfs splanchiques et la sécrétion surrénale d'adrénaline;* par E. Gley et A. Quinquaud 315

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *La gravifique* (2e communication); par Th. De Donder. 316

Bulletin bibliographique 327

Le fonds des publications académiques ayant été systématiquement pillé par les Allemands il ne sera plus possible de donner suite aux demandes de combler les lacunes antérieures à 1919.

1-5-19.

ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

BULLETIN

DE LA

CLASSE DES SCIENCES

1919 — N° 5

SMITHSONIAN INSTITUTION
OCT 12 1936
NATIONAL MUSEUM

BRUXELLES
HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE
112, Rue de Louvain, 112

1919

Séance du 6 mai 1919.

M. A. Gravis,, vice-directeur, occupe le fauteuil.

M. L. Le Nain, secrétaire de la Commission administrative, fait fonctions de secrétaire perpétuel.

M. A. Rutot, secrétaire de séance.

Sont présents : M. J, Deruyts, Léon Fredericq, J. Neuberg, P. Pelseneer, Ch.-J. de la Vallée Poussin, M. Lohest, F. Swarts, J. Massart, A. Demoulin, A. de Hemptinne, V. Willem, P. Stroobant, Ch. Julin et E. Marchal, *membres;* J, Verschaffelt, G. Lecointe et M. Stuyvaert, *correspondants.*

M. le Directeur prononce l'éloge de M. Paul Mansion, membre de la Classe, décédé à Gand, le 16 avril.

Le procès-verbal de la dernière séance est lu et approuvé.

M. le Secrétaire perpétuel ff. fait savoir que la Commission administrative, vu le coût actuel des impressions, a examiné la possibilité de suspendre provisoirement la publication des *Bulletins.* — Après discussion, la Classe insiste pour continuer l'impression intégrale des communications et engage la Commission à solliciter du Gouvernement une augmentation du Budget.

CORRESPONDANCE.

— L'Académie des sciences de l'Institut de France exprime ses condoléances pour le décès de M. Paul Mansion.

— Le Conseil de l'École d'anthropologie de Paris annonce que le Congrès dans lequel les bases de l'organisation d'un Institut international d'anthropologie seront discutées, aura lieu à Paris en 1920. — Pris pour notification.

— Hommage d'ouvrages :

Sui complessi linari di piani nello spazio a cinque dimensioni, par Corrado Segre, associé;

Une série de brochures par A.-K.-M. Noyons, professeur à l'Université de Louvain (présentées par M. Léon Fredericq).

— Remerciements.

TRAVAUX A L'EXAMEN.

M. Alfred Scholl, médecin vétérinaire à Gembloux, demande l'ouverture d'un pli cacheté déposé au Secrétariat, le 6 août 1915, par M. C. Malaise.

Ce pli contient un mémoire traitant *De l'avortement épizootique des juments.* — Renvoi à l'examen de MM. Bordet et Nolf.

RAPPORTS.

Sur avis verbal de M. Verschaffelt, la Classe décide l'impression au *Bulletin* des travaux suivants :

1° *Volumes de ménisques de mercure,* par Ch. Nicaise;

2° *Sur une propriété commune aux systèmes thermodynamiques les plus simples,* par E. Henriot.

Seront déposés aux archives :

1° Sur avis de M. Ch.-J. de la Vallée Poussin, le mémoire de M. Marc Droesbeke : *Biplan à surface portante variable;*

2° Sur avis de M. Stuyvaert : *La géométrie par le mouvement. Démonstration du Postulatum d'Euclide comme théorème initial de la géométrie*, par F. Darose;

3° Sur avis de M. de Hemptinne : *L'énergie dans son essence, d'après un concept nouveau*, par Henri Wilmotte.

Sur une nouvelle forme de l'étincelle, par S. Pienkowski.

Rapport de M. A. de Hemptinne, premier commissaire.

M. Pienkowski a photographié l'étincelle qui éclate entre deux fils de platine au moyen d'une plaque mobile. L'aspect de la décharge varie avec le nombre de décharges par seconde et avec les conditions physiques auxquelles on soumet l'étincelle, notamment l'action d'un champ magnétique et le soufflage. M. Pienkowski croit pouvoir attribuer principalement les différences d'aspect à la présence d'ions.

Je fais toutes mes réserves quant à ces interprétations, vu la complexité des phénomènes qui accompagnent la décharge électrique dans les gaz. L'auteur semble avoir fait un grand nombre d'expériences pour trouver l'explication des phénomènes; je propose donc l'impression de son travail dans les *Bulletins* de l'Académie.

Rapport de M. J.-E. Verschaffelt, deuxième commissaire.

Je me rallie volontiers à la conclusion du premier commissaire. L'auteur ajoute à son travail deux dessins : un schéma de son appareil et un schéma d'une photographie. Le premier devra, me semble-t-il, être remplacé par un autre plus clair; quant au second, je propose de le remplacer par la reproduction d'une des photographies faites par l'auteur.

CONCOURS ANNUEL DE 1913.

Section des sciences naturelles.

SIXIÈME QUESTION.

On demande de nouvelles recherches sur la reviviscence des végétaux. — Prix : 1000 francs.

La Classe entend la lecture des rapports de MM. Gravis, Massart et Marchal sur le mémoire en réponse à la question ci-dessus mentionnée.

Rapport de M. A. Gravis, premier commissaire.

Tel qu'il est représenté, le mémoire portant comme devise : *Felix qui rerum potuit cognoscere causas*, a été grandement amélioré. Par une série de faits bien établis, il apporte une contribution importante à l'étude du phénomène si curieux de la reviviscence chez les végétaux. L'exposé de ces faits nettement formulés et leur interprétation correcte conduisent à des conclusions bien établies.

J'ai l'honneur de proposer à la Classe des sciences d'accorder à l'auteur de ce mémoire le prix prévu pour la sixième question du concours annuel de 1913 et de décider l'impression du travail.

A. Gravis.

Liége, le 31 mars 1919.

Avis de M. J. Massart, deuxième commissaire.

J'adopte volontiers les conclusions du savant premier commissaire.

J. Massart.

Bruxelles, le 16 avril 1919.

Avis de M. Marchal, troisième commissaire.

Je suis très heureux de pouvoir me rallier à l'avis des savants premier et deuxième commissaires.

E. Marchal.

Gembloux, le 2 mai 1919.

Le prix est décerné. L'ouverture du billet cacheté portant la devise : *Felix qui rerum potuit cognoscere causas,* fait connaître le nom de l'auteur : M^lle^ Jeanne Terby, docteur en sciences à Louvain.

L'ouvrage couronné sera publié dans le recueil des *Mémoires* in-8°.

COMMUNICATIONS ET LECTURES.

Les communications suivantes seront publiées dans le *Bulletin :*

1° *Quelques problèmes de probabilité,* par M. J. Neuberg;

2° *Sur les congruences de sphères cycliques et sur les systèmes triples orthogonaux à lignes de courbure planes ou sphériques dans un système,* par M. A. Demoulin.

PRÉROGATIVES ACADÉMIQUES.

L'Académie royale de médecine fait connaître qu'elle a renvoyé à une commission composée de MM. Léon Fredericq, Hector Leboucq et Victor Desguin l'examen de la question soulevée par la Classe des sciences au sujet des prérogatives académiques.

La Classe clôture la discussion et adopte un texte à soumettre à l'assemblée générale des trois Classes.

COMITÉ SECRET.

Il est procédé à la discussion des titres des candidats aux places vacantes et à la présentation de candidatures supplémentaires.

CONSEIL INTERNATIONAL DE RECHERCHES ET CONSEIL NATIONAL BELGE DE RECHERCHES.

M. le Ministre des Sciences et des Arts fait connaître qu'il approuve hautement l'initiative prise par la Classe des sciences de la création d'un Conseil national belge de recherches et de la participation de ce Conseil aux travaux du Conseil international dont la constitution a été préconisée par les conférences des Académies des sciences interalliées tenues à Londres et à Paris en 1918.

COMMUNICATIONS ET LECTURES.

Mathématiques. — **Quelques problèmes de probabilité**.

par M. J. NEUBERG, membre de l'Académie.

Ces questions, que j'ai proposées dans l'*Educational Times*, n'ayant pas reçu de réponse, qu'il me soit accordé d'en publier mes propres solutions dans les *Bulletins* de l'Académie.

1. *Une droite* AB *s'appuie par ses extrémités* A, B *sur deux droites données* Ox, Oy. *Quelle est la probabilité que l'aire du triangle* OAB *soit inférieure à* l^2 ?

Soient MPN l'arc du segment capable de l'angle xOy construit sur une droite $MN = AB$, et P le milieu de cet arc. Menons une corde $M'N'$ parallèle à MN, à la distance $2l^2 : AB$. Quand un point Q parcourt l'arc MP, le triangle MNQ reproduit tous les triangles possibles OAB ; mais en parcourant l'arc MM' il reproduit seulement ceux des triangles OAB dont l'aire n'excède pas l^2. Par conséquent, la probabilité cherchée est égale au rapport des arcs MM', MP.

2. *Par un point quelconque* P *situé à l'intérieur du triangle* ABC *on mène une parallèle :*

à BC, *qui coupe* CA *en* C' *et* AB *en* B'' ;
à CA, — — AB *en* A' *et* BC *en* C'' ;
à AB, — — BC *en* B' *et* CA *en* A''.

Trouver la probabilité : 1° *que les segments* $B'C''$, $C'A''$, $A'B''$ *soient les côtés d'un triangle;* 2° *qu'il existe un triangle ayant des côtés égaux à* $BB'' + CC'$, $CC'' + AA'$, $AA'' + BB'$.

1° Soient x, y, z les coordonnées barycentriques absolues de P par rapport au triangle ABC, de sorte que $x + y + z = 1$;

alors $B'C'' = ax$, $C'A'' = by$, $A'B'' = cz$. Les conditions d'une chance favorable sont :

$$(1) \qquad by + cz \geqq ax, \qquad cz + ax \geqq by, \qquad ax + by \geqq cz.$$

Divisons BC, CA, AB en L_a, L_b, L_c respectivement dans les rapports $b:c$, $c:a$, $a:b$. Les équations des droites L_bL_c, L_cL_a, L_aL_b seront :

$$by + cz - ax = 0, \qquad cz + ax - by = 0, \qquad ax + by - cz = 0.$$

Les conditions (1) seront vérifiées respectivement par les points intérieurs aux quadrilatères BCL_aL_c, CAL_cL_a, ABL_aL_b; par suite, une position favorable du point P est nécessairement à l'intérieur du triangle $L_aL_bL_c$. On en conclut que la probabilité cherchée est égale au rapport des aires des triangles $L_aL_bL_c$ et ABC, donc égale à

$$2abc : (b + c)(c + a)(a + b).$$

2° On a $BB'' = cx$, $CC' = bx$, etc. ; donc une chance favorable exige

$$(c + a)y + (a + b)z \geqq (b + c)x, \text{ etc.}$$

En raisonnant comme ci-dessus, on est conduit à diviser BC, CA, AB dans les rapports $(c + a) : (a + b)$, etc. ; si L_a, L_b, L_c désignent les points de division, la probabilité cherchée est égale au rapport des aires des triangles $L_a\ L_b\ L_c$ et ABC, donc égale à

$$\frac{2(b + c)(c + a)(a + b)}{(2a + b + c)(a + 2b + c)(a + b + 2c)}.$$

3. *On partage un nombre* $3a$ *en trois parties* x, y, z. *Quelle est la probabilité que le produit* xyz *soit compris entre* ma^3 *et* na^3*? On suppose* $m < n < 1$.

Considérons x, y, z comme les coordonnées d'un point par rapport à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz. Si nous prenons sur ces axes les longueurs $OA = OB = OC = 3a$, l'équation du plan ABC est $x + y + z = 3a$, et les coordonnées de tout point de la surface du triangle ABC représentent un partage de $3a$ en trois parties.

Les surfaces représentées par les équations

$$xyz = ma^3, \qquad xyz = na^3$$

rencontrent le plan ABC suivant deux courbes fermées U_m, U_n qui sont intérieures au triangle ABC et dont la seconde entoure la première. Si l'on désigne par S l'aire du triangle ABC et par S' l'aire comprise entre U_m et U_n, la probabilité cherchée est égale au rapport $S' : S$.

Les projections U'_m, U'_n de U_m, U_n sur le plan xy ont pour équations :

$$xy(3a - x - y) = ma^3, \qquad xy(3a - x - y) = na^3.$$

En prenant pour axes de coordonnées les bissectrices des angles des anciens axes Ox, Oy, on obtient :

$$y = \sqrt{x^2 - \frac{2ma^3}{3a - x\sqrt{2}}}, \qquad y = \sqrt{x^2 - \frac{2na^3}{3a - x\sqrt{2}}}$$

Les quadratures des courbes U'_m, U'_n dépendent des intégrales elliptiques. Si S'' est l'aire comprise entre ces lignes, la probabilité cherchée a pour expression $2S' : 9a^2$.

4. *On casse, au hasard, une barre* PS *de longueur* 3a *en trois morceaux* PQ, QR, RS. *Quelle est la probabilité que le produit des longueurs de deux de ces morceaux ne surpasse pas* a^2*?*

Soient ABC un triangle équilatéral de hauteur $3a$, et A′, B′, C′ les milieux des côtés BC, CA, AB. Les distances x, y, z d'un point intérieur à ce triangle aux côtés BC, CA, AB peuvent représenter les morceaux PQ, QR, RS de la barre. Un cas favorable des morceaux QR, RS correspond à la relation $yz \leqq a^2$. Or l'équation $yz = a^2$ représente une hyperbole Δ_a qui a pour axe réel la hauteur AA', pour sommet le centre O du triangle ABC, pour asymptotes les côtés AB, AC; cette courbe rencontre les hauteurs BB', CC' en des points E, E' et le côté BC en des points F, F'. Tout point de l'aire ABC non compris à l'intérieur du segment hyperbolique FEOE'F' satisfait à l'inégalité $yz < a^2$. Donc, si S et S' désignent l'aire du triangle ABC et celle du segment hyperbolique FEOE'F', la probabilité de $yz \leqq a^2$ a pour expression (S — S') : S.

Les équations $zx = a^2$, $xy = a^2$ représentent deux hyperboles Δ_b, Δ_c qu'on obtient en faisant tourner Δ_a de 120° autour de O dans le sens BCA ou CBA. Pour qu'aucun des produits yz, zx, xy ne soit supérieur à a^2, le point (x, y, z) doit tomber en dehors du segment FEOE'F' de Δ_a et des segments analogues de Δ_b et Δ_c. Donc, si L désigne l'aire de la lunule comprise entre les arcs de Δ_a et Δ_c qui ont pour extrémités communes les points O et E, la probabilité cherchée est égale à (S — 3S' + 3L) : S.

5. *Soit* ABC *l'un quelconque des triangles dont la somme des carrés des côtés est égale à* l^2. *Quelle est la probabilité que l'angle* ω *de Brocard de ce triangle soit compris entre* α *et* β?

Posons $a^2 = rx$, $b^2 = ry$, $c^2 = rz$, $a^2 + b^2 + c^2 = 3rm$, où $3rm = l^2$; r est une longueur auxiliaire quelconque. Comme $x + y + z = 3m$, nous pouvons considérer x, y, z comme les distances d'un point aux côtés d'un triangle équilatéral MNP de hauteur $3m$. On a

$$\cot \omega = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\text{ABC}} = \frac{x + y + z}{\sqrt{-\Sigma x^2 + 2\Sigma yz}}.$$

Pour que x, y, z soient les côtés d'un triangle réel, la quantité $\Delta \equiv \Sigma x^2 - 2\Sigma yz$ doit être nulle ou négative. Or l'équation $\Delta = 0$ représente la circonférence U inscrite au triangle

MNP, et pour tout point intérieur à U on a $\Delta < 0$. On en conclut la probabilité pour que trois longueurs a, b, c dont la somme des carrés est égale à $3rm$ soient les côtés d'un triangle réel; elle est égale au rapport des aires du cercle U et du triangle MNP.

La condition $\alpha < \omega < \beta$ revient à $\cot\alpha > \cot\omega > \cot\beta$ ou à

$$(1) \qquad -\Delta > 9m^2 \operatorname{tg}^2\alpha \quad \text{et} \quad < 9m^2 \operatorname{tg}^2\beta.$$

Si l'on change les inégalités (1) en égalités et qu'on suppose $\beta < 30°$, on a les équations de deux circonférences U′, U″ concentriques avec U et intérieures au cercle U. Donc si ρ, ρ', ρ'' sont les rayons de U, U′, U″, la probabilité cherchée est égale à $(\rho''^2 - \rho'^2) : \rho^2$.

6. *Un jeu de 32 cartes, mêlé au hasard, est étalé en cercle. Quelle est la probabilité que deux* AS *ne se suivent pas immédiatement?*

Les 32 cartes peuvent être étalées en cercle de P_{31} manières. Si l'on ôte les quatre AS, les 28 cartes restantes peuvent être étalées en cercle de P_{27} manières et présentent 28 intervalles entre deux cartes consécutives. Choisissons au hasard quatre de ces intervalles pour y placer un AS, ce qui peut se faire de $C_4^{28} \times P_4$ manières. Donc la probabilité cherchée a pour expression :

$$\frac{P_{27} \times C_4^{28} \times P_4}{P_{31}} = \frac{27 \,.\, 26 \,.\, 25}{31 \,.\, 30 \,.\, 29}.$$

GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE. — **Sur les congruences de sphères cycliques et sur les systèmes triples orthogonaux à lignes de courbure planes ou sphériques dans un système,**

par M. A. DEMOULIN, membre de l'Académie.

I.

1. Soit S_3 une sphère dépendant de deux paramètres. Cherchons à quelles conditions il est possible de tracer sur cette sphère deux cercles Γ, Γ' engendrant des systèmes cycliques tels que leurs périsphères se correspondent et coupent la sphère S_3 sous des angles égaux. Nous dirons, dans ce cas, que la congruence des sphères S_3 est cyclique.

2. Soient S_1, S_2, S_4, S_5 quatre sphères orthogonales deux à deux et à (S_3). Rapportons les cinq sphères $S_1, S_2, \ldots, S_5$ à un système de coordonnées pentasphériques et supposons leurs coordonnées exprimées en fonction des paramètres u, v des périsphères engendrés par Γ et Γ'. Le pentasphère (*) P, formé des sphères $S_1, S_2, \ldots, S_5$, admet, lorsque u varie seul, les rotations $p, q, r, \xi, \eta, \zeta, \lambda, \mu, \nu, \rho$, et lorsque v varie seul, les

---

(*) Nous appelons *pentasphère* tout système de cinq sphères deux à deux orthogonales, les cinq coordonnées de chacune de ces sphères (choisies de manière que la somme de leurs carrés soit égale à 1) étant données en grandeur et en signe.

rotations p_1, q_1, r_1, ξ_1, η_1, ζ_1, λ_1, μ_1, ν_1, ρ_1 (*). Ces vingt rotations sont liées par douze relations. Si l'on pose :

$$A = \frac{\partial p}{\partial v} - \frac{\partial p_1}{\partial u} - qr_1 + rq_1 - \eta\zeta_1 + \zeta\eta_1 - \mu\nu_1 + \nu\mu_1,$$

$$B = \frac{\partial q}{\partial v} - \frac{\partial q_1}{\partial u} - rp_1 + pr_1 - \zeta\xi_1 + \xi\zeta_1 - \nu\lambda_1 + \lambda\nu_1,$$

$$C = \frac{\partial \zeta}{\partial v} - \frac{\partial \zeta_1}{\partial u} - \xi q_1 + q\xi_1 - p\eta_1 + \eta p_1 - \rho\nu_1 + \nu\rho_1,$$

$$D = \frac{\partial \nu}{\partial v} - \frac{\partial \nu_1}{\partial u} - \lambda q_1 + q\lambda_1 - p\mu_1 + \mu p_1 - \zeta\rho_1 + \rho\zeta_1,$$

quatre d'entre elles peuvent s'écrire :

$$\text{(A)} \qquad A = 0, \qquad B = 0, \qquad C = 0, \qquad D = 0.$$

Les huit autres, que nous désignerons par (B), ne contiennent aucune des rotations p, q, ζ, ν, p_1, q_1, ζ_1, ν_1.

Soient x_1, x_2, ..., x_5 les coordonnées relatives d'un des foyers de Γ. Les sphères focales Σ, Σ_1 de ce cercle, rapportées au pentasphère P, ont respectivement pour équation :

$$x_1X_1 + x_2X_2 + i \operatorname{tg}\sigma\, x_3X_3 + x_4X_4 + x_5X_5 = 0,$$

$$x_1X_1 + x_2X_2 - i \cot\sigma\, x_3X_3 + x_4X_4 + x_5X_5 = 0,$$

σ désignant l'angle des sphères Σ_1 et S_3.

(*) Voir, pour la définition de ces quantités, dans les *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris,* notre note du 5 juin 1905. Nous avons remplacé ici σ et σ_1 par ρ et ρ_1.

Si l'on exprime que Γ est la caractéristique de Σ lorsque u varie seul et de Σ_1 lorsque v varie seul, il vient :

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = -\lambda x_5 - \xi x_4 - q' x_3 + r x_2 + \theta x_1,$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial u} = -\mu x_5 - \eta x_4 - r x_1 + p' x_3 + \theta x_2,$$

$$\frac{\partial x_3}{\partial u} = -\nu' x_5 - \zeta' x_4 - p' x_2 + q' x_1 + \theta x_3,$$

$$\frac{\partial x_4}{\partial u} = \xi x_1 + \eta x_2 + \zeta' x_3 - \rho x_5 + \theta x_4,$$

$$\frac{\partial x_5}{\partial u} = \lambda x_1 + \mu x_2 + \nu' x_3 + \rho x_4 + \theta x_5;$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial v} = -\lambda_1 x_5 - \xi_1 x_4 - q'_1 x_3 + r_1 x_2 + \theta_1 x_1,$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial v} = -\mu_1 x_5 - \eta_1 x_4 - r_1 x_1 + p'_1 x_3 + \theta_1 x_2,$$

$$\frac{\partial x_3}{\partial v} = -\nu'_1 x_5 - \zeta'_1 x_4 - p'_1 x_2 + q'_1 x_1 + \theta_1 x_3,$$

$$\frac{\partial x_4}{\partial v} = \xi_1 x_1 + \eta_1 x_2 + \zeta'_1 x_3 - \rho_1 x_5 + \theta_1 x_4,$$

$$\frac{\partial x_5}{\partial v} = \lambda_1 x_1 + \mu_1 x_2 + \nu'_1 x_3 + \rho_1 x_4 + \theta_1 x_5,$$

étant posé :

$$p' = ip \operatorname{tg} \sigma, \qquad q' = iq \operatorname{tg} \sigma, \qquad \zeta' = i\zeta \operatorname{tg} \sigma, \qquad \nu' = i\nu \operatorname{tg} \sigma,$$

$$p'_1 = -ip_1 \cot \sigma, \qquad q'_1 = -iq_1 \cot \sigma, \qquad \zeta'_1 = -i\zeta_1 \cot \sigma, \qquad \nu'_1 = -i\nu_1 \cot \sigma,$$

et θ, θ_1 désignant deux inconnues auxiliaires.

Pour que le système précédent, que nous désignerons par (S), admette une solution $(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_5)$, il faut que l'on ait

$$\frac{x_1}{\mathrm{B}'}=\frac{x_2}{-\mathrm{A}'}=\frac{x_3}{-\mathrm{C}'}=\frac{x_4}{-\mathrm{D}'}=\frac{x_3}{\dfrac{\partial\theta}{\partial v}-\dfrac{\partial\theta_1}{\partial u}}. \tag{1}$$

On déduit A′, B′, C′, D′ respectivement de A, B, C, D en remplaçant, dans ces quantités, p, q, ζ, ν, p_1, q_1, ζ_1, ν_1 respectivement par p', q', ζ', ν', p_1', q_1', ζ_1', ν_1'.

Si x_1', x_2', ..., x_5' sont les coordonnées relatives d'un des foyers de Γ′, on aura de même

$$\frac{x_1'}{\mathrm{B}'}=\frac{x_2'}{-\mathrm{A}'}=\frac{x_5'}{-\mathrm{C}'}=\frac{x_4'}{-\mathrm{D}'}=\frac{x_3'}{\pm\left(\dfrac{\partial\theta}{\partial v}-\dfrac{\partial\theta_1}{\partial u}\right)}. \tag{2}$$

Le rapprochement des égalités (1) et (2) montre que si les quantités A′, B′, C′, D′ n'étaient pas toutes nulles, les points $(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_5)$, $(x_1',\ x_2',\ \dots,\ x_5')$ coïncideraient ou seraient inverses par rapport à la sphère S_3; or cela est impossible, les cercles Γ et Γ′ étant distincts. Donc, pour que ces cercles existent, il faut que l'on ait

$$\mathrm{A}'=0,\qquad \mathrm{B}'=0,\qquad \mathrm{C}'=0,\qquad \mathrm{D}'=0, \tag{A′}$$

et, par suite,

$$\frac{\partial\theta}{\partial v}-\frac{\partial\theta_1}{\partial u}=0.$$

Cette dernière égalité permet de poser

$$\theta=-\frac{\partial\log\varphi}{\partial u}\qquad \theta_1=-\frac{\partial\log\varphi}{\partial v}$$

En remplaçant, dans le système (S), x_i par $\frac{x_i}{\varphi}$, on obtient un système (S′) qu'on peut déduire du système (S) en supprimant, dans celui-ci, les termes qui contiennent θ ou θ_1. Le système (S′) est complètement intégrable et admet une triple infinité de solutions telles que $\Sigma x_i^2 = 0$. Donc, pour que la congruence des sphères S_3 soit cyclique, il faut et il suffit qu'il existe une fonction σ satisfaisant aux relations (A′). A chaque fonction σ vérifiant ces relations correspondra une triple infinité de cercles tracés sur S_3 et engendrant des systèmes cycliques dont les périsphères ont pour paramètres u, v et coupent S_3 sous les angles σ, $\frac{\pi}{2} - \sigma$. La sphère S_3 ne contient pas d'autre cercle jouissant de ces propriétés, car, d'après ce qui précède, si l'on cherche un tel cercle, on trouve un des ∞^3 cercles qui viennent d'être définis.

3. Soient Γ_1, Γ_2 deux de ces cercles et M_1 un point quelconque de Γ_1. Il y a deux cercles tangents à Γ_1, en M_1, et à Γ_2. Par un de ces cercles, que nous appellerons Ω, passent deux sphères : l'une est tangente aux sphères focales des cercles Γ_1, Γ_2, u variant seul (c'est-à-dire aux sphères focales qui ont pour caractéristiques les cercles Γ_1, Γ_2 lorsque u varie seul); l'autre est tangente aux sphères focales des mêmes cercles, v variant seul. Par conséquent, les systèmes orthogonaux cycliques dont les lignes de courbure circulaires sont les cercles Γ_1 et les cercles Γ_2 se correspondent dans une transformation de Ribaucour, M_1 et le point de contact M_2 de Ω et de Γ_2 étant des points correspondants (*). Réciproquement, si deux systèmes orthogonaux cycliques se correspondent dans une transformation de Ribaucour, deux lignes de courbure circulaires correspondantes Γ_1, Γ_2 se coupent en deux

---

(*) Il suit de là que si l'on connaît les surfaces orthogonales aux différentes positions du cercle Γ_1, on obtiendra sans intégration les surfaces orthogonales aux différentes positions du cercle Γ_2.

points et engendrent simultanément des périsphères qui coupent sous des angles égaux la sphère qui contient ces cercles. On obtiendra dès lors la congruence de sphères cyclique la plus générale, en appliquant la transformation de Ribaucour au système orthogonal cyclique le plus général de manière à obtenir un système orthogonal de même espèce. La sphère qui contient deux lignes de courbure circulaires correspondantes engendrera la congruence cherchée.

II.

4. Soient α, β, γ les coordonnées rectangulaires du centre G de la sphère S_3 et R le rayon de cette sphère.

Posons

$$\omega = R \cos \sigma, \qquad \omega_1 = R \sin \sigma, \tag{3}$$

d'où

$$R^2 = \omega^2 + \omega_1^2, \tag{4}$$

puis définissons huit fonctions ε, ε_1, A, B, C, A_1, B_1, C_1 au moyen des égalités suivantes :

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial u} = \varepsilon_1 \omega, \qquad \frac{\partial \omega}{\partial v} = \varepsilon \omega_1, \tag{5}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial u} &= A\omega, & \frac{\partial \beta}{\partial u} &= B\omega, & \frac{\partial \gamma}{\partial u} &= C\omega, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial v} &= A_1\omega_1, & \frac{\partial \beta}{\partial v} &= B_1\omega, & \frac{\partial \gamma}{\partial v} &= C_1\omega. \end{aligned} \right. \tag{6}$$

Si l'on prend pour sphères S_1, S_2, S_4 les plans diamétraux de S_3 respectivement perpendiculaires aux axes des x, des y et des z, et si l'on pose :

$$x_1 = -iy_1, \qquad x_2 = -iy_2, \qquad x_4 = -iy_3,$$

$$x_3 = y_4 \sin \sigma - y_5 \cos \sigma, \qquad x_5 = y_4 \cos \sigma + y_5 \sin \sigma,$$

le système (S′) s'écrira :

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial y_1}{\partial u} = Ay_4, && \frac{\partial y_1}{\partial v} = A_1 y_5,\\ &\frac{\partial y_2}{\partial u} = By_4, && \frac{\partial y_2}{\partial v} = B_1 y_5,\\ &\frac{\partial y_3}{\partial u} = Cy_4, && \frac{\partial y_3}{\partial v} = C_1 y_5,\\ &\frac{\partial y_4}{\partial u} = Ay_1 + By_2 + Cy_3 - \varepsilon_1 y_5, && \frac{\partial y_4}{\partial v} = \varepsilon y_5,\\ &\frac{\partial y_5}{\partial u} = \varepsilon_1 y_4; && \frac{\partial y_5}{\partial v} = A_1 y_1 + B_1 y_2 + C_1 y_3 - \varepsilon y_4. \end{aligned}\right.$$

Pour que le système (7) soit complètement intégrable, il faut et il suffit que l'on ait

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial A}{\partial v} = \varepsilon_1 A_1, \qquad \frac{\partial B}{\partial v} = \varepsilon_1 B_1, \qquad \frac{\partial C}{\partial v} = \varepsilon_1 C_1,\\ &\frac{\partial A_1}{\partial u} = \varepsilon A, \qquad \frac{\partial B_1}{\partial u} = \varepsilon B, \qquad \frac{\partial C_1}{\partial u} = \varepsilon C,\\ &\qquad AA_1 + BB_1 + CC_1 = \frac{\partial \varepsilon}{\partial u} + \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial v}. \end{aligned}\right.$$

5. Les formules (8), (5), (6) et (4) montrent que les congruences de sphères étudiées ici sont les congruences C (ou cycliques) de M. Guichard (*).

6. Si l'on remplace, dans les égalités (8), ε, ε_1, A, B, C, A_1, B_1, C_1 par leurs valeurs tirées des égalités (5) et (6) [où l'on aura mis pour ω et ω_1 leurs valeurs (3)], on n'obtiendra que quatre

---

(*) Guichard, *Sur un mode de génération des systèmes triple-orthogonaux à lignes de courbure sphériques dans un système* (Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris, séance du 2 mai 1910).

relations. Celles-ci expriment que α, β, γ, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - R^2$ satisfont à l'équation

$$(9) \qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial u \partial v} = \left(\frac{\partial \log R}{\partial v} - \operatorname{tg} \sigma \frac{\partial \sigma}{\partial v}\right)\frac{\partial \theta}{\partial u} + \left(\frac{\partial \log R}{\partial u} + \cot \sigma \frac{\partial \sigma}{\partial u}\right)\frac{\partial \theta}{\partial v}$$

Telles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que la congruence des sphères S_3 soit cyclique. Nous allons les mettre sous une autre forme. Trois d'entre elles expriment que le réseau (u, v), tracé sur la surface (G), lieu du point (G), est conjugué (*). Par suite, α, β, γ satisfont à l'équation

$$(10) \qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial u \partial v} = \left\{ {12 \atop 1} \right\} \frac{\partial \theta}{\partial u} + \left\{ {12 \atop 2} \right\} \frac{\partial \theta}{\partial v},$$

les symboles de Christoffel $\left\{ {12 \atop 1} \right\}$, $\left\{ {12 \atop 2} \right\}$ étant relatifs au ds^2 de la surface (G).

Les équations (9) et (10) étant identiques, on a

$$(11) \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial u} = \operatorname{tg} \sigma \left(\left\{ {12 \atop 2} \right\} - \frac{\partial \log R}{\partial u}\right), \quad \frac{\partial \sigma}{\partial v} = -\cot \sigma \left(\left\{ {12 \atop 1} \right\} - \frac{\partial \log R}{\partial v}\right) \text{(**)}$$

Pour que la congruence des sphères S_3 soit cyclique, il faut qu'il existe une fonction σ vérifiant ces deux égalités. Nous

---

(*) Pour abréger, nous n'examinons pas le cas, qui se traite aisément, où le point O décrit une ligne.

(**) Si la sphère (S_3) n'est pas une des sphères principales d'une surface et si elle ne touche pas une droite fixe en un point fixe, on a

$$\left\{ {12 \atop 2} \right\} - \frac{\partial \log R}{\partial u} = \left\{ {12 \atop 2} \right\}', \quad \left\{ {12 \atop 1} \right\} - \frac{\partial \log R}{\partial v} = \left\{ {12 \atop 1} \right\}',$$

les symboles de Christoffel $\left\{ {12 \atop 1} \right\}'$, $\left\{ {12 \atop 2} \right\}'$ étant relatifs à la forme quadratique en *du* et *dv* qui est égale au carré de l'angle de deux positions de S_3 infiniment voisines.

allons démontrer que cette condition, convenablement entendue, est suffisante. Considérons, en effet, une congruence, lieu d'une sphère S_3 de centre G (α, β, γ) et de rayon R. Supposons d'abord que cette sphère ne passe pas par un point fixe et qu'elle ne soit pas orthogonale à une sphère fixe. D'après ce qu'on a vu plus haut, pour que la congruence soit cyclique, il faut qu'on puisse tracer sur la surface (G), lieu du point G, un réseau (u, v) tel que $\alpha, \beta, \gamma, \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - R^2$, exprimées en fonction de u et de v, satisfassent à une équation de Laplace. Supposons qu'il en soit ainsi. L'équation dont il s'agit sera évidemment l'équation (10). Admettons en outre que le système (11), considéré comme déterminant σ, soit intégrable. Alors les équations (9) et (10) seront identiques et, par suite, $\alpha, \beta, \gamma, \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - R^2$ satisferont à la première : la congruence des sphères S_3 sera cyclique. C. Q. F. D.

Lorsque la différence $\frac{\partial}{\partial u}\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} - \frac{\partial}{\partial v}\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}$ est $\neq 0$, le système (11) admet une solution et une seule si deux conditions sont vérifiées. Lorsque cette différence est nulle, le système (11) n'admet de solution que si l'on a

$$\frac{\partial}{\partial u}\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} = \frac{\partial}{\partial v}\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} = 2\left(\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} - \frac{\partial \log R}{\partial v}\right)\left(\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} - \frac{\partial \log R}{\partial u}\right) + \frac{\partial^2 \log R}{\partial u \partial v}.$$

Il est alors complètement intégrable. Nous dirons, dans ce cas, que la congruence des sphères S_3 est cyclique d'une infinité de manières.

Lorsque la sphère S_3 passe par un point fixe ou est orthogonale à une sphère fixe, à chaque réseau conjugué (u, v) tracé sur (G) correspond un système tel que (11). Ce système se discute comme plus haut.

7. Soit σ une solution du système (11) [ou d'un des systèmes (11) si la sphère S_3 passe par un point fixe ou est orthogonale à une sphère fixe]. A cette solution correspondent ∞^3 cercles Γ

tracés sur S_3 et engendrant des systèmes cycliques dont les périsphères ont pour paramètres u, v et coupent S_3 sous les angles σ, $\frac{\pi}{2} - \sigma$. Pour obtenir ces cercles, il faut intégrer le système (7). Ce système admet l'intégrale

$$\psi(y) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_4^2 - y_5^2 = \text{const.} \tag{12}$$

A toute solution $(y_1, y_2, ..., y_5)$ telle que la constante soit nulle, correspond un cercle Γ. Celui-ci est situé dans le plan défini par l'équation

$$y_1(X - \alpha) + y_2(Y - \beta) + y_3(Z - \gamma) = -(\omega y_4 + \omega_1 y_5). \tag{13}$$

Les considérations suivantes conduisent à une autre détermination des cercles Γ.

III.

8. En vertu des égalités (A′) et (B), il existe un pentasphère P' admettant, lorsque u varie seul, les rotations p', q', r, ξ, η, ζ', λ, μ, ν', ρ, et lorsque v varie seul, les rotations p'_1, q'_1, r_1, ξ_1, η_1, ζ'_1, λ_1, μ_1, ν'_1, ρ_1. Soient S_1, S'_2, ..., S'_5 les sphères de P', S_i et S'_i $(i = 1, 2, ..., 5)$ étant des sphères homologues. La congruence des sphères S'_3 est cyclique; elle ne dépend que de celle des sphères S_3 et non du choix des sphères S_1, S_2, S_4, S_5. Nous dirons que chacune de ces congruences se déduit de l'autre en soumettant celle-ci à une *flexion*.

Soit T la transformation conforme en vertu de laquelle les sphères S_1, S'_2, ..., S'_5 correspondent respectivement aux sphères S_1, S_2, ..., S_5.

9. Considérons un quelconque des cercles Γ. Les coordonnées x_1, x_2, ..., x_5 d'un de ses foyers F satisfont au système S' (n° 1). Ce système exprime que le point F' qui correspond à F dans la transformation T est fixe. Le cercle d'intersection de S_3 et du cône isotrope de sommet F' correspond évidemment, dans la transformation T, au cercle Γ considéré. Par conséquent, *les cercles* Γ *sont ceux qui correspondent, dans la transformation* T^{-1}, *inverse de* T, *aux cercles d'intersection de* S_3 *avec les* ∞^3 *cônes isotropes de l'espace.*

Ce théorème conduit au suivant : *Le cercle qui correspond, dans la transformation* T^{-1}, *à l'intersection de* S_3 *et d'une sphère fixe engendre le système* K *le plus général* (*).

IV.

10. Désignons par K une courbe quelconque tracée sur S_3 et définie pour chaque position de cette sphère, et par K′ la courbe qui lui correspond dans la transformation T. Soient M un point quelconque de K et M′ le point qui lui correspond dans T. *Si la trajectoire du point* M *est orthogonale à* K, *la trajectoire du point* M′ *sera orthogonale à* K′ *et vice versa.*

11. Supposons, en particulier, que K′ appartienne à une développable isotrope fixe D′. Soient M′ l'intersection de K′ et d'une génératrice rectiligne g' de D′, arbitrairement choisie, et M le point qui lui correspond dans T^{-1}. La trajectoire du point M′, qui est évidemment la droite g, est orthogonale aux courbes K′ ; donc la surface Σ, lieu du point M, est orthogonale aux courbes K. Nous allons démontrer que si g' varie, la surface Σ engendrera une famille de Lamé. Soit Γ' l'intersection de S_3 et du cône isotrope qui a pour sommet un point de g', arbitrairement choisi. Le cercle Γ qui correspond à Γ' dans T^{-1} est tangent à K en M et engendre un système cyclique dont les périsphères ont pour paramètres u, v. On déduit facilement de là que les surfaces décrites par K lorsque u ou v varie seul découpent la surface Σ suivant ses lignes de courbure. Il suit de là que les différentes positions de Σ forment une famille de Lamé.

(*) Pour la définition des systèmes K, voir, dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences de Paris*, notre note du 17 janvier 1910.

12. *On obtient ainsi tous les systèmes triples orthogonaux à lignes de courbure sphériques dans un système, les sphères qui les contiennent étant en nombre doublement infini.*

Considérons, en effet, une famille de Lamé dont les trajectoires orthogonales soient situées sur ∞^2 sphères. En vertu d'un théorème de Ribaucour, les cercles osculateurs Ω d'une quelconque K de ces trajectoires, en ses points d'intersection avec les différentes surfaces de la famille, engendrent, lorsque K varie, des systèmes cycliques dont les périsphères ont pour paramètres les paramètres des lignes de courbure des surfaces de la famille. En outre, ces périsphères coupent la sphère S_3 qui contient la courbe K sous des angles égaux. Il suit de là que la congruence des sphères S_3 est cyclique (*). A cette congruence en correspond une autre, lieu d'une sphère S_3', déduite de la première par flexion et telle que les cercles Ω' qui correspondent aux cercles Ω, dans la transformation T, soient les intersections de S_3' avec une famille de cônes isotropes. La courbe K' qui correspond à K dans la transformation T, admet les cercles Ω' comme cercles osculateurs et est par suite l'intersection de S_3' avec la développable isotrope dont l'arête de rebroussement est le lieu des sommets des cônes isotropes qui viennent d'être définis. Le théorème énoncé est donc démontré.

V.

13. Considérons une congruence cyclique, lieu d'une sphère S_3. On a vu qu'à toute solution σ du système (11) relatif à cette congruence correspondent ∞^3 cercles Γ tracés sur S_3 et engendrant des systèmes cycliques.

Détachons de l'ensemble des cercles Γ une infinité simple

(*) M. Darboux (*Leçons sur la théorie des surfaces*, IVe partie, n° 1061) a démontré que cette condition est nécessaire. M. Guichard (*loc. cit.*) a prouvé qu'elle est suffisante.

de cercles. *Lorsque* u *et* v *varieront, les points de contact de ces cercles avec leur enveloppe* K *décriront deux familles de surfaces orthogonales aux courbes* K *et chacune de ces familles sera la famille de Lamé la plus générale à trajectoires orthogonales sphériques* (*). *Si les cercles considérés osculent leur enveloppe, les surfaces décrites par les points d'osculation formeront la famille de Lamé la plus générale à trajectoires orthogonales sphériques.* Ces propriétés sont des conséquences des théorèmes établis dans les n^{os} 11 et 12 et du théorème de Ribaucour invoqué dans la démonstration du second de ces théorèmes. Pour en déduire les systèmes orthogonaux à lignes de courbure sphériques dans un système, il faut d'abord résoudre les deux problèmes suivants : Problème I. *Déterminer la congruence de sphères cyclique la plus générale.* Problème II. *Déterminer les* ∞^3 *cercles qui correspondent à une solution du système* (11) *relatif à cette congruence.* Nous avons déjà indiqué au n° 3 une solution du problème I : on appliquera la transformation de Ribaucour au système orthogonal cyclique le plus général de manière à obtenir un système orthogonal de même espèce. La sphère contenant deux lignes de courbure circulaires correspondantes Γ_1, Γ_2 engendrera la congruence cherchée. Nous avons résolu ce problème comme il suit, dans le mémoire auquel l'Académie des sciences de Paris a décerné le prix Bordin, en 1911. Conservons toutes les notations de notre note du 3 janvier 1910 (*Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*) et prenons pour cercle Γ_1 l'intersection des sphères S_1, S_2. Soient (θ_1, θ_2) une solution du système

$$(14) \qquad \frac{\partial\theta_2}{\partial u} = -r\theta_1, \qquad \frac{\partial\theta_1}{\partial v} = r_1\theta_2,$$

(*) Les systèmes triples orthogonaux auxquels appartiennent ces familles de Lamé se correspondent dans une transformation de Ribaucour.

et θ_3, P, Q trois fonctions définies par les égalités

$$(15)\quad \begin{cases} \theta_3 = l + \int q\theta_1 du + p_1\theta_2 dv, \\ P = m + \int A\theta_1 du + C\theta_2 dv, \\ Q = n + \int A_1\theta_1 du + C_1\theta_2 dv, \end{cases}$$

l, m, n désignant des constantes arbitraires.

Le cercle Γ_2 est l'inverse du cercle Γ_1 par rapport à la sphère qui a pour équation

$$\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \theta_3 x_3 + \frac{P+Q}{2} x_4 - i\frac{P-Q}{2} x_5 = 0.$$

Cette sphère touche son enveloppe en des points situés sur Γ_1, propriété qui le caractérise.

Les cercles Γ_2, qui sont en nombre triplement infini si l'on donne à l, m, n toutes les valeurs possibles, appartiennent à la sphère Σ définie par l'équation

$$\theta_2 x_1 - \theta_1 x_2 = 0.$$

Cette sphère, contenant le cercle Γ_1, engendre la congruence cyclique la plus générale. Le problème I est donc résolu. Le problème II est résolu par surcroît, car, d'après la manière dont les cercles Γ_2 ont été obtenus, il est clair que ces cercles sont les ∞^3 cercles qui correspondent à une solution du système (11) relatif à la congruence des sphères Σ. Le cercle Γ_1 est nécessairement compris parmi les cercles Γ_2; on l'obtient en posant $m = 0$, $n = 0$ et en faisant tendre l vers l'infini.

Cela posé, détachons de l'ensemble des cercles Γ_2 une infinité simple de cercles en prenant pour l, m, n des fonctions d'une variable w. Lorsque u et v varieront, les points de contact de ces cercles avec leur enveloppe K décriront deux familles de surfaces normales aux différentes positions de cette courbe. Chacune d'elles sera la famille de Lamé la plus générale à trajectoires orthogonales sphériques. Les deux familles qu'il faudra lui adjoindre pour obtenir un système orthogonal sont formées des surfaces engendrées par la courbe K lorsque u ou v varie seul. On obtiendra des systèmes orthogonaux réels en prenant pour Γ_1 un cercle réel, pour θ_1, θ_2 des fonctions réelles et pour l, m, n des fonctions réelles telles que l'on ait $l'^2 + m'n' > 0$, les accents désignant des dérivées par rapport à w. Si l'on a $l'^2 + m'n' = 0$, les cercles Γ_2 osculeront leur enveloppe et les deux systèmes orthogonaux se réduiront à un seul; les coordonnées du point générateur de ce système seront évidemment rationnelles.

Les intégrations qu'exige la présente méthode sont exactement celles que requiert la méthode de M. Guichard (*loc. cit.*).

14. On satisfait au système (14) en posant $\theta_1 = a_1$, $\theta_2 = a_2$. La sphère Σ se réduit alors au plan du cercle Γ_1. Les quadratures (15) peuvent être effectuées et l'on trouve:

$$\theta_3 = l + a_3, \qquad P = m + a_4 + ia_5, \qquad Q = n + a_4 - ia_5.$$

En procédant comme au n° 13, on obtiendra, au moyen de ces valeurs de θ_1, θ_2, θ_3, P, Q, le système orthogonal le plus général à lignes de courbure planes dans un système.

VI.

15. Soit une congruence cyclique, lieu d'une sphère S de centre G (α, β, γ) et de rayon R. σ désignant une solution du système (11) relatif à cette congruence, si l'on définit ω, ω_1 au moyen des égalités (3), puis ε, ε_1, A, B, C, A_1, B_1, C_1 au moyen des égalités (5) et (6), ces dernières fonctions satisferont, on l'a vu, aux égalités (8).

16. Soit $(\bar{\omega}, \bar{\omega}_1)$ une solution quelconque du système

$$(16) \qquad \frac{\partial \bar{\omega}_1}{\partial u} = \varepsilon_1 \bar{\omega}, \qquad \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial v} = \varepsilon \bar{\omega}_1.$$

En vertu des égalités (8), il existe trois fonctions $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ telles qu'on ait

$$(17) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial u} = A\bar{\omega}, \qquad &&\frac{\partial \bar{\beta}}{\partial u} = B\bar{\omega}, \qquad &&\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial u} = C\bar{\omega}, \\ &\frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial v} = A_1\bar{\omega}_1, \qquad &&\frac{\partial \bar{\beta}}{\partial v} = B_1\bar{\omega}_1, \qquad &&\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial v} = C_1\bar{\omega}_1. \end{aligned} \right.$$

La sphère $\bar{S}$ dont le centre $\bar{G}$ a pour coordonnées $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ et dont le rayon $\bar{R}$ est défini par l'égalité

$$\bar{R}^2 = \bar{\omega}^2 + \bar{\omega}_1^2,$$

engendre une congruence cyclique. Nous dirons que cette congruence correspond à la congruence, lieu de S, dans une *transformation de Combescure.* Cette dénomination est justifiée par la propriété suivante. On a vu qu'à toute solution $(y_1, y_2, \ldots, y_5)$ du système (7) telle que $\psi(y) = 0$ correspond un cercle tracé sur S et engendrant un système cyclique. Le plan de ce cercle est défini par l'équation (13). A la même solution $(y_1, y_2, \ldots, y_5)$, on peut faire correspondre un cercle tracé sur $\bar{S}$ et engendrant aussi un système cyclique. L'équation de son plan se déduit de l'équation (13) en remplaçant, dans cette dernière, ω, ω_1 par $\bar{\omega}$, $\bar{\omega}_1$ *Les systèmes orthogonaux cycliques attachés à ces systèmes cycliques se correspondent dans une transformation de Combescure.*

17. Parmi les congruences cycliques qui correspondent à la congruence, lieu de S, dans des transformations de Combescure, il y en a une infinité qui sont composées de sphères passant par l'origine O des coordonnées. On les obtient comme il suit : Soit $(y_1, y_2, \ldots, y_5)$ une solution du système (7) telle que $\psi(y) = 0$. Les fonctions $\overline{\omega}, \overline{\omega}_1, \overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma}$ définies par les égalités

$$\overline{\omega} = y_4, \qquad \overline{\omega}_1 = y_5, \qquad \overline{\alpha} = y_1, \qquad \overline{\beta} = y_2, \qquad \overline{\gamma} = y_3$$

satisfont aux équations (16) et (17). Par suite, la sphère S_0 dont le centre G_0 a pour coordonnées y_1, y_2, y_3 et dont le rayon a pour carré $y_4^2 + y_5^2$ engendre une congruence cyclique. En vertu de la relation $\psi(y) = 0$, cette sphère passe par le point O.

18. Soit π_0 l'inverse de S_0 par rapport à une sphère fixe U de centre O et de rayon $k\sqrt{2}$. La sphère S_0 contient, on le sait, ∞^3 cercles qui engendrent des systèmes cycliques dont les périsphères ont pour paramètres u, v. Les inverses de ces cercles, par rapport à U, appartiennent à π_0 ; donc, si l'enveloppe de π_0 est une surface Ω_0, le réseau (u, v) tracé sur cette surface sera cyclique (*).

19. Désignons, d'une manière générale, par $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_5$ les sphères d'un pentasphère Π dépendant des paramètres u, v et par a_i l'inverse du rayon de la sphère Σ_i. Lorsque u varie seul, ce pentasphère admet les rotations $p, q, r, \xi, \eta, \zeta, \lambda, \mu, \nu, \rho$

(*) Les plans des cercles d'un système cyclique peuvent envelopper une courbe. Le système cyclique le plus général jouissant de cette propriété est le lieu des lignes de courbure d'un système d'une cyclide de Dupin variable qui engendre une famille de Lamé. Ce système admet la génération suivante : Soient C la caractéristique d'une sphère variable S et D_1, D_2 les points de contact de ce cercle avec son enveloppe. Désignons par V une conique tangente à C aux points D_1, D_2. Soient F, F′ les intersections de C et d'une tangente quelconque t de V. Si S et t varient, le cercle dont F, F′ sont les foyers engendrera le système cyclique considéré.

et, lorsque v varie seul, les rotations p_1, q_1, r_1, ξ_1, η_1, ζ_1, λ_1, μ_1, ν_1, ρ_1. Cela posé, aux déplacements euclidiens près, il y a un pentasphère Π et un seul satisfaisant aux conditions suivantes : 1° Ses rotations q, ξ, λ, ν, p_1, η_1, μ_1, ν_1 ont respectivement pour valeurs $-iA$, $-iB$, $-iC$, $-\varepsilon_1$, iA_1, $-iB_1$, $-iC_1$, ε; 2° Ses douze autres rotations sont nulles; 3° a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 sont respectivement égaux à iy_4, iy_5, y_1, y_2, y_3 divisés par k^2.

L'intersection Γ_{12} des sphères Σ_1, Σ_2 engendre un système cyclique dont les périsphères ont u, v pour paramètres. La sphère S′ définie, relativement au pentasphère Π, par l'équation

$$\omega_1 x_1 - \omega x_2 = 0$$

engendre une congruence cyclique qui se déduit par flexion de la congruence, lieu de la sphère S. Ces propriétés sont vraies dans tous les cas. Si π_0 enveloppe une surface Ω_0, on peut leur ajouter les suivantes : 1° L'enveloppe du plan du cercle Γ_{12} est une surface Ω applicable sur Ω_0 et les paramètres du réseau conjugué commun aux deux surfaces sont u, v; 2° Si l'on fait rouler Ω_0 sur Ω, le point O, entraîné par Ω_0, coïncidera avec un des foyers de Γ_{12}.

20. Lorsque le rayon de la sphère S est constant, la surface, lieu du point G, a même représentation sphérique que deux surfaces isothermiques I, I_1 qui se correspondent dans une transformation de Christoffel et les foyers du cercle Γ_{12} décrivent deux surfaces isothermiques J, J_1 qui se correspondent dans une transformation de Darboux. Cette relation entre les couples de surfaces I, I_1 et J, J_1 est celle qui a été signalée par M. Guichard en 1903 (*). M. Bianchi et moi l'avons retrouvée, indépendamment l'un de l'autre et sous des formes très différentes, en

---

(*) C. Guichard, *Sur les systèmes orthogonaux et les systèmes cycliques* (Annales scientifiques de l'École normale supérieure, 3e sér., t. XX).

1905 (*). La méthode qui m'y a conduit m'a fourni, en 1911, le théorème suivant : *De tout couple de surfaces de Guichard associées, on peut déduire un couple de surfaces de Guichard qui se correspondent dans une transformation de Ribaucour. Il suffit, à cet effet, d'intégrer un système de cinq équations aux différentielles totales.*

VII.

21. Imaginons deux congruences de sphères cycliques déduites l'une de l'autre par flexion. Conservant les notations des n^{os} 1 et 8, nous désignerons en outre par C_{ik} l'intersection des sphères S_i, S_k et par C'_{ik} l'intersection des sphères S'_i, S'_k. Supposons que la sphère S_3 ait une enveloppe E qu'elle touche en deux points distincts M_0, M_1 et choisissons les sphères S_1, S_2 de manière que le cercle C_{12} passe par les points M_0, M_1. Alors la sphère S'_3 aura une enveloppe E' qu'elle touchera en deux points distincts M'_0, M'_1 et le cercle C'_{12} passera par ces points.

Les enveloppes E, E' ont entre elles des relations toutes semblables à celles qui existent entre deux surfaces applicables l'une sur l'autre.

Supposons que les points M_0 et M'_0, respectivement rapportés aux pentasphères P, P', aient mêmes coordonnées. *La correspondance entre les surfaces* (M_0) *et* (M'_0) [*ou* (M_1) *et* (M'_1)], *dans laquelle* M_0 *et* M'_0 (*ou* M_1 *et* M'_1) *sont deux points correspondants, a lieu avec conservation des angles.*

(*) L. Bianchi, *Complementi alle ricerche sulle superficie isoterme* (Annali di Matematica, 3e sér., t. XII).

A. Demoulin, *Sur les enveloppes de sphères dont les deux nappes se correspondent avec conservation des angles* (Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris, séance du 4 septembre 1905).

Soient A_0, B_0 les seconds points d'intersection de C_{12} avec les sphères principales de (M_0) en M_0. Il y a une sphère Σ_0 contenant le cercle C_{45} et le cercle dont A_0, B_0 sont les foyers. Soient, de même, A'_0, B'_0 les seconds points d'intersection de C'_{12} avec les sphères principales de (M'_0) en M'_0. Il y a une sphère Σ'_0 contenant le cercle C'_{45} et le cercle dont A'_0, B'_0 sont les foyers. *La sphère Σ'_0 correspond à la sphère Σ_0 dans la transformation* T.

Faisons décrire au point M_0 une courbe quelconque C_0 et désignons par C'_0 la courbe correspondante décrite par le point M'_0. *La sphère de courbure géodésique* (*) *de C'_0 en M'_0 correspond, dans la transformation* T, *à la sphère de courbure géodésique de C_0 en M_0.*

Les deux propriétés des surfaces (M_0), (M'_0) que nous venons d'énoncer appartiennent aussi aux surfaces (M_1), (M'_1).

Soit Σ une sphère quelconque passant par le cercle C_{45} et définie pour chaque position de ce cercle. *Ses points caractéristiques sont inverses par rapport à S_3.* Soit Σ' la sphère qui correspond à Σ dans la transformation T. *Les points caractéristiques de Σ' correspondent à ceux de Σ dans la transformation* T. *L'angle de deux sphères Σ infiniment voisines est égal à l'angle des sphères Σ' qui leur correspondent. Si les paramètres des lignes principales de l'enveloppe de Σ sont* u, v, *les paramètres des lignes principales de l'enveloppe de Σ' seront aussi* u, v.

Si la surface (M'_0) est une sphère, la surface (M_0) sera une surface de Guichard. Toute surface de Guichard admet cette génération.

22. Si l'on soumet l'espace fixe à une transformation conforme dépendant de p paramètres ($p = 1, 2, \ldots, 9$), deux positions quelconques de l'espace transformé se correspondront

---

(*) Une courbe C étant tracée sur une surface, nous appelons *sphère de courbure géodésique* de la courbe C, en un point M de celle-ci, la sphère qui passe par le cercle osculateur de C en M et qui est orthogonale à la surface en ce point.

dans une transformation conforme. Pour exprimer ce fait, nous dirons que cet espace est *angulairement invariable.* Nous avons étudié la cinématique des espaces angulairement invariables dans le mémoire cité au n° 13.

Cela posé, soit $\overline{F}$ l'espace qui correspond à l'espace fixe dans la transformation T^{-1}. La surface qui correspond à E′ dans cette transformation touche E en M_0 et en M_1 et participe au déplacement de $\overline{F}$. Ledit déplacement jouit de propriétés toutes semblables à celles du déplacement d'un solide invariablement lié à une surface qui roule sur une surface applicable : *tout déplacement élémentaire de* $\overline{F}$ *est une rotation autour d'un cercle tracé sur* S_3 *et passant par* M_0 *et* M_1*; la surface décrite par un point* P *de* $\overline{F}$ *est orthogonale au cercle passant par* P, M_0, M_1, *etc.*

Physique. — **Volumes de ménisques de mercure,**

par Ch. NICAISE (*).

1. *Introduction.* Ceux qui se sont occupés de la détermination d'isothermes savent qu'une des principales raisons pour lesquelles on a atteint dans la mesure des volumes, des pressions et des températures une limite de précision ($^1/_{5000}$ environ) qu'il est difficile de dépasser (**), c'est que dans l'emploi des appareils de mesure (piézomètres, manomètres, thermomètres) on a à évaluer le plus exactement possible, à 1°/₀ près par exemple, le volume d'un ménisque mercuriel. Comme les tubes dont on se sert sont assez larges (quelques millimètres de diamètre), la déformation du ménisque par la pesanteur est considérable, de sorte qu'il ne suffit pas du tout de considérer le ménisque comme une calotte sphérique, dont le volume serait déterminé par sa flèche et son cercle de base. C'est pourquoi J.-C. Schalkwijk (***) a fait des calculs de volumes de ménisques mercuriels en se servant de développements en série de la courbe méridienne; malheureusement ces séries ne sont rapidement convergentes que très près du sommet du ménisque. Scheel et Heuse (IV), et Schalkwijk aussi, d'ailleurs, ont mesuré des volumes de ménisques mercuriels. Avec les résultats de leurs mesures et de leurs calculs, ces auteurs ont construit des

---

(*) Présenté par M. Verschaffelt.

(**) Voir par exemple J.-C. Schalkwijk, *De nauwkeurige isotherme van waterstof bij 20° C. tusschen 8 en 60 atmosferen.* Thèse de doctorat, Leyde, 1902, p. 43. Communications from the Physical Laboratory of the University of Leiden, n° 67.

(***) *Loc. cit.*, p. 51.

(IV) *Ann. der Physik*, t. 23, p. 295, 1910.

tableaux permettant de trouver aisément le volume d'un ménisque mercuriel dont on connaît le rayon de base et dont on a mesuré la flèche.

Les tableaux donnés par Schalkwijk et par Scheel et Heuse sont difficilement comparables : ils n'ont pas de points de contact, celui de Schalkwijk se rapportant à des rayons de base assez petits ($0^{cm}05$ à $0^{cm}35$), tandis que Scheel et Heuse ont fait leurs mesures sur de larges gouttes ($0^{cm}7$ à $1^{cm}2$ de rayon). Ils ne sauraient d'ailleurs être concordants, car ils ne se rapportent pas à une même valeur de la constante capillaire; en effet, Schalkwijk, dans ses calculs, s'est servi de la valeur $a = 0.266$ (*), alors que Lohnstein (**) déduisit des mesures de Scheel et Heuse $a = 0.241$ (***). Cette dernière valeur de a se rapporte à du mercure qui a été longtemps en contact avec l'air (IV) ; or il nous semble beaucoup plus logique de prendre pour a cette dernière valeur, puisque le mercure dans les appareils de mesure ne se trouve pas simplement en contact avec sa vapeur ; il est vrai que, le gaz avec lequel le mercure est en contact pouvant varier et aussi changer de température et de pression, il règne au sujet de la constante capillaire du mercure dans les appareils une grande incertitude.

Il nous a semblé que les photographies de gouttes liquides que nous avons faites autrefois (V) pouvaient servir au calcul

---

(*) Schalkwijk a pris notamment $\frac{1}{2} a^2 = \frac{\sigma}{\mu g} = 0,0354$ (σ = tension superficielle, μ = densité), d'après des mesures de Quincke sur des gouttes fraîches; il a donc pris $\sigma = 472$. Fürth (*Wien. Ber.*, II a, t. 126, p. 329, 1917) trouva dans le vide $\sigma = 440$.

(**) *Ann. der Physik*, t. 23, p. 306, 1910.

(***) D'où $\frac{\sigma}{\mu g} = 0,0291$ et $\sigma = 396$.

(IV) On sait en effet qu'au contact de gaz la tension superficielle du mercure diminue considérablement.

(V) CH. NICAISE, *Étude graphique de surfaces capillaires* (BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, Classe des sciences, n° 7, p. 437, 1912).

de volumes de ménisques, si pas directement de ménisques de mercure, du moins de ménisques d'un liquide à constante capillaire bien déterminée, par exemple $a = 1$. M. J.-E. Verschaffelt a en effet montré (*) que si l'on connaît la forme d'un ménisque se rapportant à un liquide à constante capillaire a_1^2, on en déduit la forme d'un ménisque de liquide de constante capillaire a_2^2 en réduisant toutes les dimensions linéaires du premier ménisque dans le rapport $a_2 : a_1$. Il suit que, ayant fait un tableau donnant les volumes de ménisques d'un liquide à constante capillaire 1 pour divers rayons et pour diverses flèches, on pourra en déduire immédiatement tout autre tableau, se rapportant à un liquide à constante capillaire a^2, en multipliant les rayons et les flèches par a et les volumes par a^3. Pour appliquer ceci à des ménisques mercuriels, il suffira donc de connaître dans chaque cas particulier la constante capillaire du mercure.

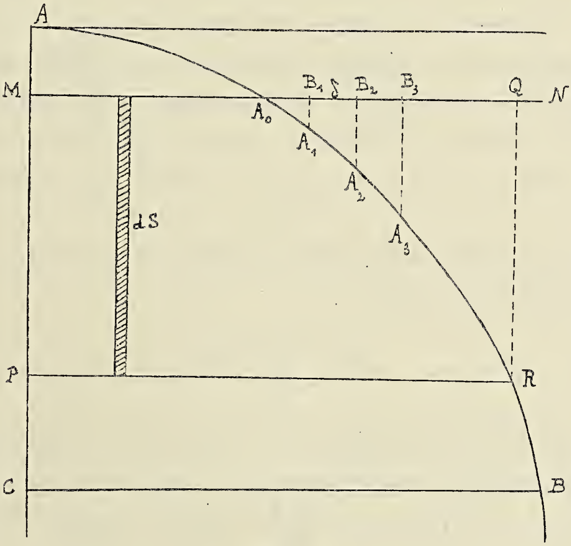


Fig. 1.

(*) *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique* (Classe des sciences), 1912, p. 451.

2. *Calcul des volumes de ménisques d'un liquide fictif à constante capillaire* 1. Pour faire ces calculs, nous nous sommes servi des formes de gouttes tracées pour le liquide fictif à constante capillaire 1 sur la planche II de la note citée de M. Verschaffelt.

Soit A_0R (fig. 1) une portion de courbe méridienne d'un ménisque. Le volume engendré par la rotation de cet arc autour de l'axe AC est $2\pi M$, M représentant le moment de la surface A_0RPM par rapport à l'axe, c'est-à-dire :

$$M = \int x dS,$$

dS étant l'élément de surface hachuré. Ou bien ce volume est égal au volume du cylindre engendré par MNRP diminué de $2\pi M'$, M' étant le moment de la surface A_0RQ par rapport à l'axe. Il est facile de calculer ce moment par une méthode analogue à celle de Simpson pour le calcul approximatif d'une surface.

Si nous prenons MN comme axe des x et que nous comptions les ordonnées vers le bas :

$$M' = \int_{x_0}^{x_Q} xy dx.$$

Divisons la distance A_0Q en un certain nombre pair ($2m$) de parties égales δ et menons par les points de division les ordonnées $y_1 = B_1A_1$, $y_2 = B_2A_2$, etc. Le moment M' est égal à la somme des moments M'_1, M'_2... M'_r des tranches de largeur δ en lesquelles nous pouvons décomposer la surface A_0RQ. Or, faisons passer par trois points A_0, A_1, A_2 une parabole

$$y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

et supposons que l'arc $A_0A_1A_2$ se confonde avec l'arc de cette parabole entre A_1 et A_2 ; alors la somme des moments M_1 et M_2 est

$$\int_{x_0}^{x_2} xy dx = \frac{1}{3}\delta \left[3x_1(y_2 + y_0) + \beta \} x_2(x_1 - x_0) + x_0(x_1 - x_2) \{ \right]$$

et, comme on trouve aisément que

$$\beta = \frac{(x_0 + x_1)(y_1 - y_2) - (x_1 + x_2)(y_0 - y_1)}{2\delta^2},$$

on en déduit

$$M_1 + M_2 = \frac{1}{3}\delta\,(x_0y_0 + 4x_1y_1 + x_2y_2)$$

d'où

$$M' = \int_{x_0}^{x_Q} xy\,dx = \frac{1}{3}\delta\left[(x_0y_0 + x_{2m}y_{2m}) + 4\sum_{n=1}^{n=m} x_{2n-1}y_{2n-1} + 2\sum_{n=1}^{n=m-1} x_{2n}y_{2n}\right].$$

Pour calculer par cette méthode le volume d'un ménisque, nous l'avons divisé en tranches horizontales de hauteurs presque égales et nous avons calculé le volume de chacune des tranches. Pour chacune des formes de gouttes de la planche II dans la note de M. Verschaffelt, sauf la première qui est sensiblement sphérique, nous avons ainsi calculé les volumes de tranches d'environ $0^{cm}1$ de hauteur jusque dans le voisinage de la section à rayon maximum; c'est, en effet, jusque-là seulement que les formes considérées peuvent exister comme ménisques dans des tubes.

3. *Construction des tableaux.* Ces calculs nous ont conduit d'abord au tableau I, donnant pour le liquide ($a = 1$) les volumes correspondant à une série de flèches pour les gouttes n^{os} 2 à 8 (rayons au sommet : 0.39, 0.54, 0.78, 0.83, 1.57, 1.98, 4.7, 8.5). De là nous avons déduit, de la façon indiquée au § 1, un tableau II correspondant au mercure, en prenant $a = 0.241$.

TABLEAU I.

Liquide fictif : $a = 1$.

r	e	v
	Goutte nº 2.	
Centim.	Centim.	Centim. cubes.
0.300	0.090	0.0135
0.420	0.199	0.0594
0.520	0.452	0.2478
	Goutte nº 3.	
0.360	0.100	0.0208
0.500	0.208	0.0865
0.660	0.512	0.4310
	Goutte nº 4.	
0.410	0.101	0.0293
0.530	0.199	0.0998
0.650	0.360	0.2815
0.710	0.580	0.6067
	Goutte nº 5.	
0.520	0.099	0.0442
0.720	0.199	0.1634
0.940	0.400	0.6155
1.080	0.690	1.5723
	Goutte nº 6.	
Centim.	Centim.	Centim. cubes.
0.620	0.103	0.0686
0.800	0.196	0.2184
0.960	0.302	0.4814
1.120	0.467	1.0109
1.240	0.850	2.5007
	Goutte nº 7.	
0.960	0.099	0.1695
1.240	0.190	0.5605
1.440	0.297	1.1202
1.600	0.398	1.8520
1.800	0.597	3.6863
1.918	1.000	8.1652
	Goutte nº 8.	
1.080	0.101	0.1815
1.400	0.200	0.6735
1.620	0.297	1.385
1.800	0.394	2.250
1.940	0.505	3.824
2.080	0.643	5.6957
2.200	1.000	10.9355

TABLEAU II.

Mercure : $a = 0.241$.

r	e	v
	Goutte n° 2.	
Centim.	Centim	Centim. cubes.
0.072	0.022	0.00019
0.101	0.048	0.00083
0.125	0.109	0.00347
	Goutte n° 3.	
0.087	0.024	0.00029
0.121	0.050	0.00121
0.159	0.123	0.00603
	Goutte n° 4.	
0.099	0.024	0.00041
0.128	0.048	0.00140
0.157	0.087	0.00394
0.171	0.140	0 00849
	Goutte n° 5.	
0.125	0.024	0.00062
0.174	0.048	0.00229
0.227	0.096	0.00862
0.260	0.166	0.02201

r	e	v
	Goutte n° 7.	
Centim.	Centim.	Centim. cubes.
0.146	0.024	0.00087
0.193	0.047	0.00306
0.231	0.073	0.00674
0.270	0.113	0.01445
0.299	0.205	0.03501
	Goutte n° 7.	
0.231	0.024	0 00237
0.299	0.046	0.00785
0.347	0.072	0.01568
0.386	0.096	0.02593
0.434	0.144	0 05161
0.462	0.241	0.1143
	Goutte n° 8.	
0.260	0.024	0.00294
0.337	0.048	0.00983
0.390	0.072	0.01964
0.434	0.095	0.03175
0.468	0.120	0.05379
0.501	0.155	0.07974
0.530	0.241	0.1311

TABLEAU III.

e	Goutte n° 2.		Goutte n° 3.		Goutte n° 4.		Goutte n° 5.		Goutte n° 6.		Goutte n° 7.		Goutte n° 8.	
	R	v	R	v	R	v	R	v	R	v	R	v	R	v
0.020	0.069	0.0001	0.080	0.0004	0.092	0.0004	0.116	0.0005	0.136	0.0006	0.216	0.0018	0.247	0.0022
0.040	0.094	0.0006	0.111	0.0008	0.119	0.0010	0.161	0.0019	0.181	0.0025	0.285	0.0064	0.313	0.0045
0.060	0.110	0.0014	0.129	0.0020	0.139	0.0020	0.190	0.0040	0.213	0.0048	0.327	0.0118	0.364	0.0090
0.080	0.120	0.0024	0.143	0.0030	0.153	0.0031	0.212	0.0065	0.239	0.0077	0.352	0.0167	0.396	0.0167
0.100	0.124	0.0031	0.152	0.0042	0.162	0.0046	0.230	0.0094	0.259	0.0114	0.391	0.0280	0.442	0.0360
0.120	—	—	0.158	0.0059	0.169	0.0071	0.241	0.0120	0.274	0.0152	0.413	0.0386	0.468	0.0531
0.140	—	—	—	—	0.171	0.0085	0.250	0.0151	0.285	0.0202	0.431	0.0496	0.488	0.0690
0.160	—	—	—	—	—	—	0.258	0.0200	0.291	0.0236	0.443	0.0595	0.504	0.0833
0.180	—	—	—	—	—	—	—	—	0.295	0.0273	0.451	0.0712	0.515	0.0965
0.200	—	—	—	—	—	—	—	—	0.298	0.0319	0.457	0.0835	0.522	0.1080
0.220	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.460	0.0930	0.527	0.1185
0.240	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.462	0.1143	0.530	0.1311

TABLEAU IV.

Volumes des ménisques mercuriels.

r = rayon de base ; e = flèche.

r \ e	0.020	0.040	0.060	0.080	0.100	0.120	0.140	0.160	0.180	0.200
0 05. . .	0.0001	0.0003	—	—	—	—	—	—	—	—
0.10 . .	0.0003	0 0007	0.0012	0.0019	0.0023	0.0031	0.0034	—	—	—
0.15. . .	0.0007	0.0014	0.0021	0.0030	0.0040	0.0056	0.0066	—	—	—
0.20. . .	0.0012	0.0026	0.0040	0.0053	0.0068	0.0086	0.0106	0.0131 (?)	—	—
0.25. . .	0.0023	0.0040	0.0061	0.0077	0.0100	0.0126	0.0153	0.0184	—	—
0.30. . .	—	—	0.0093	0.0122	0.0147	0.0181	0.0215	0.0251	0.0280	0.0325
0.35. .	—	—	—	0.0163	0.0208	0.0248	0.0296	0.0344	0 0387	0.0469
0.40. . .	—	—	—	—	0.0282	0.0350	0.0407	0.0466	0.0532	0.0621
0.45. . .	—	—	—	—	—	0.0481	0.0545	0.0614	0.0711	0 0804
0.50. . .	—	—	—	—	—	—	0.0751	0.0810	0.0905	0.1005

Ces tableaux ne sont pas d'un emploi commode; ce qui est désirable, c'est d'avoir un tableau à deux entrées, sur lequel on puisse lire (ou trouver aisément par interpolation) le volume du ménisque, lorsqu'on connaît son rayon de base r et sa flèche e. Voilà pourquoi nous avons d'abord, pour chaque goutte, déterminé à l'aide de graphiques les valeurs de r et v répondant à des valeurs de e croissant régulièrement par degrés de $0^{\mathrm{cm}}020$, depuis 0 jusqu'à $0^{\mathrm{cm}}240$; l'opération n'a été faite que pour le mercure. Cela a donné le tableau III.

Puis, au moyen du tableau III, nous avons construit des courbes donnant, pour une même valeur de e, les volumes en fonction des rayons de base, et sur ces courbes nous avons lu les valeurs de v correspondant à des valeurs de r régulièrement espacées de $0^{\mathrm{cm}}05$, depuis $0^{\mathrm{cm}}05$ jusqu'à $0^{\mathrm{cm}}50$. Nous avons obtenu ainsi le tableau IV.

4. *Comparaison avec les résultats de Schalkwijk et de Scheel et Heuse.* Le domaine de rayons et de flèches sur lequel s'étendent nos calculs coïncide en grande partie avec le domaine examiné par Schalkwijk, mais n'atteint pas encore le domaine des grands rayons de Scheel et Heuse. Si l'on compare notre tableau IV avec celui de Schalkwijk (p. 75), on constate qu'il y a accord avec des écarts de quelques pour cent en plus ou en moins, mais cet accord se change en désaccord lorsqu'on réduit le tableau de Schalkwijk à $a = 0.241$: alors les volumes de Schalkwijk deviennent manifestement plus grands que les nôtres.

Si l'on compare les courbes qui traduisent la variation de v avec r pour des valeurs déterminées de e d'après notre tableau IV et d'après celui de Scheel et Heuse, l'accord entre les deux systèmes de courbes paraît être satisfaisant.

Physique. — **Sur une propriété commune aux systèmes thermodynamiques les plus simples,**

par E. Henriot (*).

1. L'équation d'état d'un gaz parfait que l'on écrit, avec les notations classiques :

$$pv = \mathrm{RT},$$

peut se mettre sous la forme :

$$pv = (\gamma - 1)\,\mathrm{U},$$

où U est l'énergie interne et γ le rapport des chaleurs spécifiques. Il est indifférent, pour un tel système, de dire que $\frac{dQ}{T}$ est différentielle exacte, ou que $\frac{dQ}{U}$ l'est.

La deuxième de ces équations, en vertu du théorème du viriel, garde sa validité même si l'énergie cesse d'être fonction linéaire de la température, et alors $\frac{1}{T}$ et $\frac{1}{U}$ sont respectivement facteurs intégrants.

Le fait que l'inverse de l'énergie interne est facteur intégrant de dQ se retrouve dans la plupart des systèmes thermodynamiques les plus simples dont la théorie peut être considérée comme complète. Nous allons en donner quelques exemples.

(*) Présenté par M. Verschaffelt.

Le cas du corps noir envisagé comme système thermodynamique possède cette propriété. En effet, l'expression de la quantité de chaleur infiniment petite dQ peut s'écrire :

$$dQ = dU + \frac{U}{3v}dv = Ud \log Uv^{\frac{1}{3}}.$$

On aura une série de facteurs intégrants pour dQ qui seront de la forme $U^n\, v^p$,

$$U^n v^p dQ = U^{n-1} v^p d \log Uv^{\frac{1}{3}},$$

et l'on devra avoir $n + 1 = 3\, p$, d'où $n = 3\, p - 1$.

On voit, en faisant $p = 0$, que $\frac{1}{U}$ est facteur intégrant.

Parmi ces facteurs intégrants que l'on obtient par seule application du premier principe de la thermodynamique s'en trouve un autre remarquable. Si l'on fait $n = -\, p$ dans l'équation

$$n = 3p - 1,$$

on trouve $p = \frac{1}{4}$, $n = -\frac{1}{4}$, ce qui nous montre que

$$\frac{1}{X} = \frac{1}{\frac{U^{\frac{1}{4}}}{v^{\frac{1}{4}}}}$$

est facteur intégrant.

On peut écrire :

$$U = X^4 v.$$

Nous voyons donc que si l'on admet que l'énergie est proportionnelle au volume, et à une fonction de la température, le facteur intégrant X que nous obtenons peut jouer le rôle de la température, à une constante près.

Ce résultat est intéressant, en ce sens qu'il permet d'obtenir la formule qui donne l'énergie du corps noir sans faire appel au deuxième principe de la thermodynamique. M. Brillouin avait autrefois signalé un fait analogue.

2. Le fait que $\frac{1}{U}$ est facteur intégrant se retrouve d'une façon générale lorsque le travail des forces extérieures est utilisé à lutter contre des pressions de radiation.

Prenons, pour fixer les idées, un ensemble de résonnateurs monochromatiques de fréquence ν. Nous admettrons qu'ils peuvent échanger de l'énergie entre eux, de manière qu'un équilibre s'établisse, et nous ferons, au moyen des forces extérieures, varier d'une manière infiniment lente et adiabatiquement la fréquence commune ν.

Le travail des forces extérieures pour une augmentation $d\nu$ de la fréquence est de la forme

$$d\mathfrak{T} = \frac{U}{\nu} d\nu.$$

La chaleur élémentaire dQ fournie au système dans une transformation quelconque sera donc

$$dQ = dU - \frac{U}{\nu} d\nu = U d \log \frac{U}{\nu},$$

qui possède bien $\frac{1}{U}$ comme facteur intégrant. Parmi les autres facteurs intégrants intéressants se trouve $\frac{1}{\nu}$.

Tout ceci n'est qu'une conséquence du premier principe de la thermodynamique. Si nous exprimons, pour utiliser le deuxième principe, que $\frac{dQ}{T}$ est différentielle exacte, nous trouvons immédiatement que

$$U = T\frac{\partial U}{\partial T} + \nu\frac{\partial U}{\partial \nu},$$

ce qui est l'équation aux dérivées partielles des fonctions homogènes de degré 1 en ν et T, de la forme

$$U = \nu f\left(\frac{T}{\nu}\right). \tag{1}$$

Nous désignerons, pour abréger, $\frac{\nu}{T}$ par x.

On ne peut obtenir la forme de la fonction f que par d'autres hypothèses.

Si le théorème de l'équipartition de l'énergie s'applique, on sait que la fonction homogène qui représente U peut s'écrire :

$$U = KT.$$

Nous pouvons toujours mettre U sous la forme

$$U = K\theta,$$

où θ est une fonction de T et ν.

Lorsque le système passe d'un état A à un état B, les intégrales

$$S_{AB} = \int_A^B \frac{dQ}{T} \qquad \text{et} \qquad \sigma_{AB} = \int_A^B \frac{dQ}{\theta}$$

sont toutes deux indépendantes du chemin suivi.

Il pourra arriver, et nous savons que cela se produira aux températures élevées et aux basses fréquences, que

$$T = \theta.$$

Nous dirons alors, pour abréger le langage et par analogie avec les gaz parfaits, que l'état du système est parfait. L'équation d'état $f(U, T, \nu) = 0$ nous serait connue si nous possédions la forme de la fonction

$$\psi = U - ST.$$

La fonction analogue :

$$\eta = \mathrm{U} - \sigma\theta,$$

où $\theta = \frac{\mathrm{U}}{\mathrm{K}}$ et $\sigma = \mathrm{K} \log f$,

se met sous la forme

$$e^{-\frac{\eta}{\mathrm{K}\theta}} = a\frac{\mathrm{U}}{\nu}, \tag{2}$$

a étant une constante.

De la fonction ψ nous savons seulement qu'elle est fonction homogène de degré 1 en ν et T, ce qui peut s'écrire :

$$e^{-\frac{\psi}{\mathrm{KT}}} = \varphi\left(\frac{\mathrm{U}}{\nu}\right). \tag{3}$$

Dans l'état parfait, les fonctions T et θ, S et σ, ψ et η doivent se confondre, à une constante près ; ceci se produit dans le cas où il y a équipartition.

L'hypothèse la plus simple que nous puissions faire sur φ, eu égard à (2), c'est que φ est de la forme

$$a + b\frac{\mathrm{U}}{\nu} + c\frac{\mathrm{U}^2}{\nu^2} + \cdots = a + bf + cf^2 + \cdots$$

Nous admettrons, comme deuxième hypothèse, que si les racines du second membre sont $-\alpha$, $-\beta$..., où α, β sont forcément positifs, c'est-à-dire si

$$a + bf + cf^2 + \cdots = \mathrm{A}(f+\alpha)^p(f+\beta)^q \cdots, \tag{4}$$

les exposants p sont entiers.

Ces hypothèses sont purement formelles et elles sont arbitraires. Elles vont nous conduire à une expression de U qui contient comme cas particulier l'expression de Planck. Elles peuvent servir, dans d'autres cas que celui que nous considérons, pour passer de l'état parfait justiciable de l'équipartition à l'état non parfait.

L'application du théorème de Gibbs-Helmholtz :

$$\psi = \mathrm{U} + \mathrm{T}\frac{\partial\psi}{\partial \mathrm{T}}\cdot$$

à l'équation (3) nous fournit :

$$\mathrm{U} = \mathrm{KT}^2\frac{\partial \log \varphi}{\partial \mathrm{T}} = \frac{\mathrm{KT}^2}{\varphi}\frac{d\varphi}{dx}\left(-\frac{\nu}{\mathrm{T}^2}\right),$$

ou

$$f = -\mathrm{K}\frac{d\log\varphi}{dx}$$

L'équation (4) met cette expression sous la forme

$$-\frac{f}{\mathrm{K}} = \frac{d\log\varphi}{dx} = \frac{p}{f+\alpha}\frac{df}{dx} + \frac{q}{f+\beta}\frac{df}{dx} + \ldots,$$

et nous devons intégrer

$$-\frac{dx}{\mathrm{K}} = p\frac{df}{f(f+\alpha)} + q\frac{df}{f(f+\beta)} + \ldots,$$

ce qui nous donne

$$e^{\frac{\nu}{\mathrm{KT}}} = \left(1+\frac{\alpha\nu}{\mathrm{U}}\right)^{\frac{p}{\alpha}}\left(1+\frac{\beta\nu}{\mathrm{U}}\right)^{\frac{q}{\beta}}\cdots \tag{5}$$

Admettons que, quand l'énergie est grande et la fréquence petite, nous avons l'état parfait :

$$\mathrm{U} = \mathrm{KT} \qquad \text{ou} \qquad f = \frac{\mathrm{K}}{x}\cdot$$

L'équation (5) peut s'écrire :

$$e^{\frac{x}{K}} = \left(1 + \frac{\alpha}{f}\right)^{\frac{f}{\alpha} \cdot \frac{p}{f}} \cdot \left(1 + \frac{\beta}{f}\right)^{\frac{f}{\beta} \cdot \frac{q}{f}} \ldots,$$

ou, pour f très grand :

$$e^{\frac{x}{K}} = e^{\frac{p+q \ldots}{f}}.$$

Il faut donc que $p + q + \ldots = 1$, ce qui ne peut avoir lieu que pour

$$p = 1, \qquad q = 0, \qquad \ldots$$

Alors (5) devient

$$e^{\frac{x}{K}} = \left(1 + \frac{\alpha}{f}\right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

ou

$$U = \frac{\alpha\nu}{e^{\frac{\alpha\nu}{KT}} - 1},$$

ce qui est la fonction de Planck.

3. Les systèmes dynamiques, constitués par des cordes, membranes, volumes résonnants, possèdent des propriétés analogues. Si l'on fait varier l'espace offert à la radiation, en le laissant géométriquement semblable à lui-même, on a

$$dQ = dU - \frac{U_1}{\nu_1} d\nu_1 - \frac{U_2}{\nu_2} d\nu_2 - \ldots,$$

ν_1, ν_2 étant les fréquences des différentes vibrations propres ; si l est la longueur de la corde, S la surface de la membrane, V le volume résonnant, et si nous appelons $\frac{d\nu}{\nu}$ la valeur du rapport

$$\frac{d\nu_1}{\nu_1} = \frac{d\nu_2}{\nu_2} = \ldots = -\frac{dl}{l} = -\frac{1}{2}\frac{ds}{S} = -\frac{1}{3}\frac{dv}{v},$$

on aura encore pour dQ une expression de la forme

$$dQ = dU - \frac{U}{\nu}\,dv.$$

$\frac{1}{U}$ est encore facteur intégrant. Cette dernière conclusion subsiste même si la vitesse de propagation des vibrations dans le milieu dépend de la température.

4. La juxtaposition de systèmes simples analogues à tous les précédents formera un système complexe. Si un tel système parcourt réversiblement un cycle fermé, on aura, pour ce cycle :

$$\Sigma \int \frac{dQ}{\theta} = \int \frac{dQ_1}{\theta_1} + \int \frac{dQ_2}{\theta_2} + \dots = 0,$$

de la même manière que dans un système thermodynamique obtenu par la juxtaposition de systèmes à température $T_1, T_2, \dots$ on aura

$$\Sigma \int \frac{dQ}{T} = \int \frac{dQ_1}{T_1} + \int \frac{dQ_2}{T_2} + \dots = 0.$$

5. Nous pouvons nous rendre compte dans quelle mesure les résultats obtenus ci-dessus sont généraux en suivant une marche analogue à celle qu'a suivie lord Rayleigh dans son mémoire classique sur la pression de radiation (*). Soient L, $\mathcal{E}_c$, $\mathcal{E}_p$ les fonctions de Lagrange, énergie cinétique et énergie potentielle d'un système mécanique défini par les paramètres q_1, q_2, q_3 ..., dont l'un, q_1, est à variation infiniment lente, q_2, q_3 ... étant à variation beaucoup plus rapide. — Le paramètre q_1 est celui que nous ferons varier pour fournir adiaba-

---

(*) Lord Rayleigh, *Phil. Mag.*, 1902, t. III, p. 338.

tiquement du travail au système ; si nous faisons varier les autres paramètres q_2, q_3 ..., l'énergie fournie sera sous forme calorifique.

L'équation de Lagrange relative au paramètre q_1 sera

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^{qq'}}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial L^{qq'}}{\partial q_1} = F_1,$$

où $L = \mathcal{E}_c - \mathcal{E}_p$ est exprimé en fonction des q et de leurs dérivées par rapport au temps.

Si l'on calcule la valeur moyenne de F dans l'intervalle de temps (t_0, t), on trouve que la valeur moyenne du premier terme du membre de gauche s'annule si la moyenne porte sur un temps suffisamment long et l'on a simplement :

$$\frac{1}{t - t_0}\int_{t_0}^{t}\left(-\frac{\partial L^{qq'}}{\partial q_1}\right) dt = \frac{1}{t - t_0}\int_{t_0}^{t} F_1 dt,$$

ce que nous écrirons, en supprimant l'indice 1 :

$$F_m = -\left(\frac{\partial L^{qq'}}{\partial q}\right)_m$$

La force F peut varier assez rapidement, car L est fonction de paramètres à variation très rapide. Pendant un intervalle de temps δt suffisamment long, le travail des forces extérieures pour une variation δq de q sera :

$$\partial \mathfrak{T} = \int_0^{\delta t} F dq = \int_0^{\delta t} F \dot{q} dt;$$

si dans l'intervalle de temps considéré q varie sensiblement proportionnellement au temps, ceci pourra s'écrire :

$$d\mathfrak{T} = \int_0^{\delta t} F \frac{\delta q}{\delta t} dt = \delta q \cdot \frac{1}{\delta t}\int_0^{\delta t} F dt = F_m \delta q.$$

L'expression de dQ sera donc :

$$dQ = dU + \left(\frac{\partial L^{q\dot{q}}}{\partial q}\right)_m dq.$$

Si on utilise les variables q et $p = \frac{\partial \mathcal{E}_c^{q\dot{q}}}{\partial q}$, on sait que

$$\frac{\partial L^{qq'}}{\partial q} = \frac{\partial \mathcal{E}_c^{qq'}}{\partial q} - \frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial q} = - \frac{\partial \mathcal{E}_c^{pq}}{\partial q} - \frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial q} = - \frac{\partial U^{pq}}{\partial q}$$

et

$$dQ = dU - \left(\frac{\partial U^{pq}}{\partial q}\right)_m dq.$$

$\frac{1}{U}$ sera facteur intégrant si le coefficient de dQ satisfait à la relation

$$\left(\frac{\partial U^{qp}}{\partial q}\right)_m = \frac{U}{f(q)};$$

or ceci se produit dans la plupart des systèmes *simples* et dont la théorie thermodynamique et statistique a pu être poussée jusqu'au bout, notamment pour le paramagnétisme des gaz. Ceci ne veut évidemment pas dire qu'elle est générale. Pour qu'elle pût, par exemple, s'appliquer aux gaz réels, il faudrait que leur énergie interne fût de la forme

$$U = p\varphi(v).$$

6. Si l'on écrit que l'inverse de l'énergie est facteur intégrant de la chaleur élémentaire, on n'obtient pas d'autre relation, en général, que celle qu'on obtient par application du premier principe de la thermodynamique. — Cependant, ce que nous avons dit sur le corps noir et l'ensemble de résonnateurs accordés montre que les calculs ont une forme suggestive et qu'ils conduisent à introduire des fonctions θ, σ, η dont l'allure est semblable à celles qu'on obtiendra ensuite, par application du deuxième principe de la thermodynamique.

La recherche des facteurs intégrants déduits de l'application du premier principe est intéressante et doit être développée, puisque, parmi ces facteurs intégrants, il peut s'en introduire un que l'on est amené à considérer comme l'inverse de la température, avant toute application du deuxième principe.

◆

CHIMIE BIOLOGIQUE. — **La stérilisation de la farine en vue de la fermentation panaire** (Deuxième note),

par A.-J.-J. VANDEVELDE, docteur en sciences,
Directeur du Laboratoire chimique et bactériologique de la Ville de Gand,
Directeur de l'Institut supérieur des fermentations de Gand.

J'ai en 1910 présenté à l'Académie le résultat de quelques recherches effectuées en vue de la stérilisation de la farine (¹); l'obtention de farine de froment stérile est une condition indispensable pour établir le rôle des différents organismes de la pâte en fermentation. Mes essais sur l'utilisation de la chaleur, sur l'emploi d'acétone et de chloroforme, sur l'emploi de vapeurs de formol ne m'avaient pas conduit au but désiré.

J'ai depuis poursuivi mes investigations et je suis parvenu à obtenir de la farine de froment stérile dont le gluten a conservé ses propriétés mécaniques et chimiques; en attendant de pouvoir adresser la présente note à l'Académie, j'ai fait, en novembre 1916, un exposé de mes recherches dans l'une des réunions scientifiques clandestines tenues, sous l'occupation ennemie, par le personnel du Laboratoire communal et des services annexés.

Ces recherches comportent : 1° l'utilisation de l'eau stérile; 2° l'emploi de l'éther et du sulfure de carbone. C'est le sulfure de carbone qui constitue l'agent de stérilisation auquel je puis m'adresser pour obtenir la farine stérile; à l'aide d'eau stérile, je puis préparer un milieu exempt d'organismes dans lequel il est possible de faire les ensemencements nécessaires.

(¹) *Bull. Acad. sc. Belg.*, 1910, pp. 597-610.

1° Utilisation de l'eau stérile.

La chaleur enlève au gluten du froment ses propriétés élastiques; j'ai cherché à séparer le gluten de la fécule, pour chauffer séparément la fécule et réunir ultérieurement cette dernière au gluten obtenu stérile par séparation et lavage à l'eau stérile; j'espérais reformer la farine, cette fois stérile, par la réunion de ses deux constituants principaux, stérilisés séparément.

J'ai commencé par stériliser une vingtaine de litres d'eau distillée dans un bidon de fer-blanc. Le goulot du bidon porte un bouchon percé de deux trous : l'un livre passage à un tube en siphon permettant l'écoulement à un niveau inférieur au fond du bidon et fermé à l'aide d'un tube court en caoutchouc muni d'une pince; l'autre trou porte un simple tube de verre droit permettant le mouvement de l'air et de la vapeur d'eau. Le tout est recouvert d'un grand verre protecteur, destiné à jouer le même rôle que le couvercle d'une plaque de Petri.

Quand l'eau est en ébullition, les vapeurs chaudes viennent stériliser la partie extérieure du bidon recouverte par le verre et la paroi intérieure du verre lui-même; pendant l'ébullition, le siphon est maintenu fermé; à la fin de l'ébullition, j'ai laissé s'écouler environ 2 litres d'eau bouillante, afin de stériliser complètement les parois intérieures du tube-siphon.

Dans l'intervalle, on chauffe à 170° dans le four Pasteur un grand entonnoir dans le tube duquel est fixé, à l'aide d'un bouchon d'ouate, un tube plus mince destiné à être raccordé au tube-siphon du réservoir à eau. L'entonnoir lui-même, qui doit être posé le tube en haut, sert à protéger les objets manipulés dans l'eau stérile contre les souillures atmosphériques. L'entonnoir avec ses annexes est naturellement stérilisé comme la verrerie en général, c'est-à-dire enfermé complètement dans du papier à filtrer.

Lorsque l'eau du réservoir est revenue à la température ambiante, l'entonnoir et le tube sont rattachés aseptiquement au tube-siphon, après flambage; l'eau stérile nécessaire au malaxage de la farine s'écoule après ouverture de la pince; le malaxage lui-même s'effectue en dessous de l'entonnoir, les mains de l'opérateur étant revêtues de gants de chirurgie en caoutchouc. Dans ces conditions, j'ai fait les essais suivants :

a) 50 grammes de farine sont traités par 25 centimètres cubes d'eau distillée, et la pâte est ensuite malaxée aseptiquement avec 7 litres d'eau stérile pendant trente minutes. Le morceau de gluten est déposé dans une boîte de Petri stérilisée, placée elle-même dans une chambre humide aseptique dans l'incubateur à 37° C. Après quatre jours, des moisissures apparaissent.

b) 50 grammes de farine sont mêlés à 25 centimètres cubes d'eau distillée, puis malaxés à l'aide d'une solution de 1 gramme de chlorure de chaux et de 1 gramme de chlorure de sodium dans 2 litres d'eau stérile, et puis avec une dizaine de litres d'eau distillée stérile. Le morceau de gluten obtenu est conservé comme dans l'expérience précédente. Au bout de trois jours, il se développe des moisissures et le gluten lui-même est en pleine liquéfaction. La reprise de l'expérience n'a fait que confirmer les résultats observés.

c) Le pâton de gluten obtenu comme il vient d'être indiqué est mis à macérer pendant quinze minutes dans la solution de chlorure à 1 °/₀. Puis j'ai malaxé pendant trente minutes dans un courant d'eau stérile, pendant cinq minutes dans un filet de solution de chlorure de chaux, enfin pendant dix minutes dans un filet d'eau stérile. Le pâton est ensuite, pendant trois heures, mis au contact d'eau oxygénée pure à 2 °/₀ (50 centimètres cubes d'eau stérile et 2 centimètres cubes de perhydrol à 40 °/₀) et malaxé pendant dix minutes dans le filet d'eau stérile. Les liquides utilisés pour le malaxage s'écoulent à la vitesse de 20 litres à l'heure. Après quatre jours de conservation aseptique dans une boîte de Petri, le gluten est en pleine décomposition.

d) L'expérience précédente est reprise, avec cette variante que le séjour dans l'eau oxygénée étendue dure vingt-quatre heures. Après un lavage de dix minutes par malaxage à l'eau stérile et conservation dans la chambre humide aseptique, le pâton de gluten est, au bout de quatre jours, en pleine décomposition et partiellement liquéfié.

e) Le pâton est préparé à l'aide de 50 grammes de farine et de 25 centimètres cubes d'une solution obtenue par mélange de 1 litre d'eau stérile et 10 centimètres cubes de formol à 40 °/₀. Après quinze minutes de repos, le gluten est extrait par malaxage avec de l'eau stérile. Ce gluten ne comporte à l'état humide que 12^{gr}1 (témoin, sans traitement au formol, 14^{gr}9); il est plus élastique et cassant. Au bout de trois jours de séjour dans la chambre humide aseptique à 37°C., le gluten est fortement attaqué, mais non liquéfié. L'essai répété a conduit aux mêmes résultats.

Le malaxage par de l'eau stérile, dans toutes les conditions d'asepsie les meilleures, avec intervention éventuelle d'antiseptiques comme le chlorure de chaux, l'eau oxygénée ou le formol, ne m'a donc pas permis d'obtenir du gluten stérile, et par suite ne me semble pas pouvoir conduire à l'obtention de farine stérile.

2° Emploi de l'éther et du sulfure de carbone.

La littérature comporte quelques recherches sur l'action de l'éther ordinaire sur la farine (¹). Les résultats obtenus ne permettent cependant pas de conclure à l'obtention de produits stériles, même après quarante-six jours de traitement.

J'ai commencé par établir l'influence chimique de l'éther et du sulfure de carbone sur le gluten de la farine de froment. La farine examinée permettait d'extraire 29 °/₀ de gluten humide

---

(¹) A. Wolffin, *Arch. Hyg.*, 1894, 21, p. 268. — F. Levy, *Arch. Hyg.*, 1904, 49, p. 62. — W. Holliger, *C. B. Bakteriol.*, II, 1902, 9, p. 305. — L. Budinoff, *C. B. Bakteriol.*, II, 1903, 10, p. 458. — Dombrowsky, *Arch. Hyg.*, 1904, 50, p. 97.

et 9.2 °/₀ de gluten sec. J'ai mis au contact, à la température ordinaire, pendant six semaines, des mélanges de 50 grammes de farine et de 100 centimètres cubes de réactifs, préalablement purifiés, et puis ces réactifs ont été éliminés par évaporation spontanée à l'air libre.

La farine traitée par l'éther est très blanche; le pâton exige pour sa formation 28 centimètres cubes d'eau pour 50 grammes de farine. Par malaxage il est impossible de retirer la moindre portion de gluten.

Par contre, la farine traitée au sulfure de carbone donne une pâte très ferme; le pâton préparé au moyen de 50 grammes de farine et 30 centimètres cubes d'eau donne 14gr6 de gluten humide et 9.6 °/₀ de gluten desséché, soit 29.2 °/₀ de gluten humide. Tout le gluten se retrouve donc, avec ses propriétés mécaniques inchangées.

J'ai examiné ensuite l'action de quelques dissolvants sur les farines traitées, afin de me rendre compte de l'état dans lequel se trouvent les protéines constituantes. J'ai à cet effet employé l'alcool fort (¹), l'alcool dilué selon les indications de Ralph Hoagland (²), une solution de chlorure de sodium selon Olson (³). Les échantillons qui ont servi à cette recherche étaient restés pendant quatre semaines exposés à l'air libre, l'un à côté de l'autre, de manière à présenter la même teneur en humidité. J'ai trouvé en effet :

10.9 °/₀ d'humidité pour la farine non traitée;
10.6 °/₀ d'humidité pour la farine soumise à l'éther;
10.4 °/₀ d'humidité pour la farine soumise au sulfure de carbone.

(¹) Voir A. J. J. VANDEVELDE et L. BOSMANS, *Versl. en Med. Kon. Vl. Academie*, 1912, p. 1034.

(²) RALPH HOAGLAND, *Journ. ind. engin. chem.*, 1911, 3, p. 838.

(³) G. A. OLSON, *Journ. ind. engin. chem.*, 1914, 6, p. 211.

a) *Traitement à l'alcool fort.*

Dix grammes de farine sèche sont secoués pendant cinq heures avec 88^{cm3}9 d'alcool à 70 V %; pratiquement les mélanges sont constitués comme suit :

	FARINE. Grammes.	ALCOOL 94 V %. Cent. cubes.	EAU. Cent. cubes.
Farine non traitée	11.22	64.5	23.2
Farine traitée à l'éther . . .	11.19	64.5	23.2
Farine traitée au CS_2	11.16	64.5	23.1

Le dosage de l'azote dans 40 centimètres cubes du filtrat a donné :

49^{mg}0 pour la farine non traitée;
42^{mg}1 pour la farine traitée à l'éther;
52^{mg}1 pour la farine traitée au sulfure de carbone.

La farine traitée à l'éther laisse donc extraire moins d'azote soluble que la farine non traitée et la farine soumise au sulfure de carbone, qui donnent sensiblement les mêmes résultats.

b) *Traitement à l'alcool dilué.*

Dans la méthode d'extraction de Ralph Hoagland, 2 grammes de farine sont secoués avec 100 centimètres cubes d'alcool à 50 V % pendant soixante à nonante minutes; le filtrat est traité après évaporation d'après la méthode Kjeldahl. En tenant compte des teneurs en humidité des échantillons, j'ai employé :

2^{gr}25 de farine non traitée;
2^{gr}24 de farine traitée à l'éther;
2^{gr}23 de farine traitée au sulfure de carbone.

Après avoir secoué pendant une heure et demie, j'ai filtré et prélevé pour chaque dosage Kjeldahl 40 centimètres cubes de filtrat. J'ai retrouvé ainsi :

$7^{mg}14$ pour la farine non traitée;
$7^{mg}00$ pour la farine traitée à l'éther;
$6^{mg}58$ pour la farine traitée au sulfure de carbone.

Les différences obtenues sont très faibles et ne permettent pas de conclure à une modification des propriétés des protéines.

c) *Traitement à la solution de chlorure de sodium.*

La méthode d'extraction d'Olson consiste à déterminer les quantités de protéines solubles dans une solution de chlorure de sodium à 1 $^{0}/_{0}$. Dix grammes de farine sont secoués pendant deux heures avec 500 centimètres cubes de solution. On évapore ensuite 200 centimètres cubes du filtrat limpide jusqu'à complète siccité. Le résidu est extrait par de l'alcool à 55 $^{0}/_{0}$, recueilli sur un filtre et lavé à l'alcool fort; ce résidu insoluble est constitué des composés d'azote d'albumine. Le filtrat alcoolique est évaporé à 10 centimètres cubes, étendu par 50 centimètres cubes d'eau, évaporé à 35 centimètres cubes, ramené à 50 centimètres cubes : le résidu insoluble séparé après refroidissement est séparé par filtration et lavé à l'eau froide. Le liquide obtenu par filtration est traité par l'acide phosphotungstique, ce qui permet la séparation des composés d'azote de globuline. Le filtrat du liquide traité par l'acide phosphotungstique contient l'azote amidé.

Un dosage selon Kjeldahl effectué sur un volume déterminé de la solution initiale de chlorure sodique donne la teneur en azote total. La différence entre l'azote total et la somme de l'azote d'albumine, de globuline et d'amide, donne l'azote de gliadine.

Voici les quantités d'azote pour 10 grammes de farine sèche obtenues par des dosages effectués dans des conditions identiques sur les trois échantillons de farine :

	FARINE NON TRAITÉE. Milligr.	FARINE A L'ÉTHER. Milligr.	FARINE AU CS_2. Milligr.
Azote total soluble	35 00	38.50	42.00
Azote d'albumine	12.35	14.70	14.65
Azote de globuline	11.55	9.80	8 55
Azote amidé	3 85	3.85	4 90
Azote de gliadine	7.25	10.15	13 90

Pris dans leur ensemble, ces résultats ne permettent pas d'établir de grandes différences entre les trois échantillons ; il est cependant curieux de signaler que la farine traitée à l'éther, qui s'écarte au point de vue des propriétés mécaniques le plus de la farine normale, s'en rapproche davantage au point de vue de l'action des dissolvants que la farine traitée au sulfure de carbone qui ne modifie pas les propriétés élastiques du gluten.

En tout cas, la farine, après le traitement par le sulfure de carbone, ne semble pas avoir subi de modifications importantes ; après avoir constaté le fait, j'ai examiné la question au point de vue bactériologique.

Les essais doivent nécessairement être effectués dans des récipients fermés. La farine était introduite par quantités de 20 grammes dans des ballons de 250 centimètres cubes, et recouverte pendant six semaines de sulfure de carbone fraîchement distillé. Après ce temps, les mélanges de farine et de sulfure de carbone sont introduits aseptiquement dans des flacons stérilisés munis d'un dispositif de tubes et de filtres d'ouate pour évaporer à froid le sulfure de carbone par un courant d'air stérile ; l'entrée et la sortie des ballons sont protégées contre l'infection extérieure par des filtres d'ouate.

Après deux jours, la farine est sèche ; les flacons sont alors chauffés à 40°C. et puis maintenus dans le vide pour éliminer les dernières traces du sulfure de carbone. Après quelques jours, j'ai introduit, dans chacun de mes flacons, 15 centimètres cubes d'eau stérile, en opérant aseptiquement; j'ai obtenu ainsi une pâte assez fluide, et j'ai maintenu les flacons à 37°C. dans l'étuve à incubation, en prenant la précaution de remplacer aseptiquement l'eau évaporée par de nouvelle eau stérile.

Au bout de quinze à trente jours d'observation, la pâte contenue dans les flacons était stérile; des ensemencements en bouillon ne donnèrent lieu à aucun développement microbien; l'aspect de la pâte déjà faisait admettre l'état de stérilité.

Par contre, après ensemencement de levures ou de moisissures, un développement ne tarda pas à s'effectuer; après avoir ouvert les flacons et en avoir exposé à l'air le contenu pendant quelques minutes, la décomposition putride ne tarda pas à apparaître. Ces faits montrent que si la farine était stérile, le réactif employé avait suffisamment été éliminé pour permettre à des microorganismes de se développer.

J'ai cependant constaté qu'il est nécessaire de maintenir non ensemencés, pendant quelque temps, les flacons stérilisés, même en présence de l'eau qui a servi à former la pâte. Quand on ensemence les ballons aussitôt après l'évaporation du sulfure de carbone, les microorganismes ne se développent généralement pas. Reste-t-il encore des traces du réactif qui ne s'éliminent que lentement, surtout en présence d'humidité? Je ne puis que constater le fait, même après l'emploi de sulfure de carbone rectifié fraîchement et à plusieurs reprises. Les actions oligodynamiques sont, on le sait, toujours à craindre en microbiologie, et je suppose que ce sont les dernières traces de sulfure de carbone qui mettent longtemps à quitter les flacons, qui s'opposent au développement quand on ensemence trop tôt.

Afin de réduire le temps de stérilisation, j'ai essayé de traiter la farine par le sulfure de carbone à température plus élevée, ce qui pouvait se faire à l'aide de l'appareil à extraction Soxhlet, la farine se trouvant dans un capuchon à extraction, le liquide étant le sulfure de carbone bouillant (46° C.). Le capuchon à extraction lui-même était fermé par un fort tampon d'ouate.

J'ai ainsi traité pendant des périodes de deux à quatre heures. J'ai d'abord constaté que le gluten n'était pas modifié : j'ai retrouvé 32.6 °/₀ de gluten humide et 11.0 °/₀ de gluten sec, tandis que la farine non traitée donnait respectivement 32.4 °/₀ et 10.6 °/₀. Mais, d'autre part, la farine n'était pas stérilisée : après avoir aseptiquement fait passer la farine du capuchon dans un flacon soigneusement stérilisé, et après avoir traité par de l'eau stérile, après l'élimination complète du sulfure de carbone j'ai observé des phénomènes intenses de putréfaction.

Il faudra donc, dans les recherches que je me propose de faire ultérieurement sur la farine stérilisée, avoir recours à la macération froide dans le sulfure de carbone.

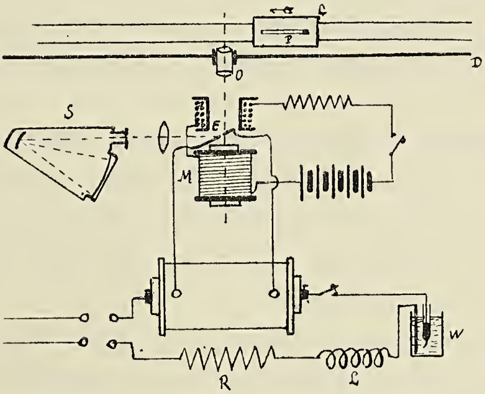
(Laboratoire chimique et bactériologique de la Ville de Gand, 11 novembre 1918.)

Physique. — **Sur une nouvelle forme de l'étincelle,**

par S. PIENKOWSKI.

Lors des recherches sur l'émission, j'ai réussi à mettre en évidence une forme particulière de l'étincelle qui présente un caractère fort intéressant.

Je ne décrirai pas tous les essais préparatoires ; voici le dispositif qui permet l'observation aisée de la nouvelle forme de la décharge.



L'étincelle était intercalée dans le secondaire d'une forte bobine d'induction (35 centimètres d'étincelle) dont le primaire, contenant un interrupteur de Whenelt, était alimenté par un courant d'intensité efficace 4-8 ampères. L'étincelle verticale, de longueur de 10 à 20 millimètres, éclatait entre deux électrodes filiformes en platine, de 1 millimètre de diamètre ; elle était placée soit à l'intérieur d'un cylindre en verre de 10 centimètres de diamètre et de 20 centimètres de hauteur, soit même à l'air libre. L'image de l'étincelle E était projetée par un objectif O sur une plaque photographique mobile P. Le châssis contenant la plaque était fixé à un chariot C roulant sur deux rails fixes; la vitesse de la plaque au moment de son passage dans le champ de l'objectif était égale à 1 mètre par seconde. L'écran D protégeait la plaque, sur tout son parcours, de l'action directe de la lumière de l'étincelle. L'expérience se faisait, bien entendu, dans la salle complètement obscure.

Un électro-aimant M, dont une bobine était dépourvue de noyau afin de faciliter l'observation de l'étincelle, permettait de créer un champ magnétique assez intense; le soufflage magnétique donne souvent des renseignements précieux.

Le spectre de l'étincelle était analysé au moyen d'un spectrographe S à réseau concave; pour l'examen plus rapide, j'ai employé un spectroscope à prismes.

Le circuit primaire contenait une résistance R et une bobine de selfinductions réglables à volonté, ainsi qu'un interrupteur de Whenelt.

Si les étincelles se suivent très rapidement, chacune d'elles passe dans l'air fortement ionisé par celle qui l'a précédée, et elles sont toutes roses; si, au contraire, elles sont trop espacées dans le temps, l'ionisation persistante est trop faible et toutes les étincelles sont blanches.

Les étincelles blanches donnent le spectre des raies, tandis que le spectre des étincelles roses est composé de bandes de l'azote. Les premières impressionnent fortement la plaque photographique, les secondes faiblement.

En partant du régime des étincelles blanches et en augmentant successivement le nombre de décharges par seconde, on arrive insensiblement au régime des étincelles roses. Ne disposant pas d'un interrupteur mécanique qui pourrait donner un nombre d'étincelles suffisamment élevé, je faisais varier le nombre d'interruptions de l'interrupteur de Whenelt en changeant la longueur et le diamètre du fil ainsi que la selfinduction et la résistance de son circuit. Ce procédé m'a permis de trouver un régime de décharge où une partie de chaque étincelle est blanche, tandis que son prolongement est rose. En prenant une série de photographies de ce type d'étincelle sur les plaques mobiles, j'ai vu qu'effectivement chacune d'elles se compose d'une partie émanant de l'*anode* qui laisse une forte impression sur la plaque (étincelle blanche) et qui, à une distance plus ou moins grande de l'anode se transforme en une étincelle impressionnant faiblement la plaque (étincelle rose). De très nombreuses plaques montrent ces deux formes de décharge dans la même étincelle; l'étincelle blanche part toujours de l'anode et se prolonge, à peu près, jusqu'à la moitié de la longueur de l'étincelle.

En examinant les plaques de plus près, on remarque que dans la plupart des cas la partie fortement impressionnée ne forme pas une ligne continue, mais se compose, en réalité, d'une série de traits fort courts se succédant dans l'intervalle de $0^{mm}5$ à $1^{mm}5$. Entre ces points fortement impressionnés, le noircissement de la plaque est approximativement le même que dans la partie correspondante de l'étincelle rose. L'image donne l'impression d'une suite de grains placés le long du chemin parcouru par l'étincelle. Pour faciliter le langage, appelons cette forme de l'étincelle, l'*étincelle grenue.*

Quel que soit le réglage du circuit, si on lance le courant, la première étincelle est toujours blanche; elle peut être suivie soit par d'autres étincelles blanches, soit par les étincelles roses. Parmi plusieurs dizaines de photographies de cette première étincelle, je n'en ai trouvé aucune montrant une discontinuité en n'importe quel point de son parcours. Ce fait indique que l'étincelle grenue ne se produit pas s'il n'y a pas dans le gaz une quantité suffisante d'ions. Effectivement, si même le circuit est réglé pour la décharge par les étincelles grenues et si l'on chasse les ions de l'espace entre les électrodes en y dirigeant un courant d'air rapide, l'étincelle grenue disparaît et la décharge a lieu par les étincelles blanches; le même effet est produit par un soufflage magnétique. J'ai pris un certain nombre de photographies des étincelles grenues dans l'air tranquille et dans un courant d'air sans changer en quoi que ce fût les autres conditions de la décharge. Les plaques montrent que, tandis que dans le premier cas le nombre des étincelles grenues est environ égal à 55 °/₀ du nombre total, dans les décharges soufflées cette proportion a diminué jusqu'à 6 °/₀. Il est probable que si le courant d'air était plus fort et capable de chasser tous les ions produits par une étincelle avant que la suivante éclate, les étincelles grenues disparaîtraient complètement.

D'autre part, si, en partant du régime qui donne les étincelles grenues, on diminue le nombre de décharges jusqu'à obtenir exclusivement des étincelles blanches, aucune d'elles, parmi les milliers de celles que j'ai photographiées, ne montre de trace de discontinuité dans son parcours. (Les changements brusques de direction se rencontrent de temps en temps.)

De même si l'on augmente le nombre de décharges jusqu'à obtenir les étincelles roses exclusivement, les discontinuités dans leur parcours disparaissent totalement.

Ces faits montrent que l'étincelle grenue se forme le plus facilement dans le cas où le gaz contient un certain nombre d'ions, parfaitement déterminé, bien qu'inconnu, au moment de la décharge. Si le nombre d'ions est plus petit, on a les étincelles blanches ; s'il est plus grand, on a les étincelles roses.

J'ai bien souvent observé le fait suivant : Lorsqu'on lance le courant dans le circuit, on remarque une production d'étincelles grenues pendant un certain temps (10 à 40 secondes); elles disparaissent ensuite et font place à des étincelles roses. J'ai pu même fixer cette transformation du phénomène sur une plaque photographique. Dans une rangée de photographies prises sur une plaque mobile, parmi les vingt-quatre premières étincelles, il y a quinze étincelles grenues; les vingt-neuf suivantes n'en contiennent aucune. Remarquons que les étincelles se suivaient dans l'intervalle de 0.0022 seconde.

Ce fait s'explique par la diffusion des ions à partir de l'étincelle vers l'espace environnant. En effet, au commencement d'une série de décharges, cette diffusion est relativement intense, car, le milieu ambiant ne contenant pas d'ions, la chute de concentration ionique est grande. A mesure que les ions diffusent, la chute de concentration diminue, et bientôt se produit un état stationnaire dans lequel le nombre d'ions diffusés devient constant, mais est plus petit qu'à l'état initial. On voit donc que la quantité d'ions présents au moment du passage d'une étincelle est plus faible à l'état initial qu'à l'état stationnaire ; cette augmentation relative du nombre d'ions est suffisante pour faire disparaître l'étincelle grenue.

Ainsi, l'ensemble des faits montre que dans l'air ionisé par l'étincelle, il se produit des variations locales des propriétés. On parvient à les déceler parce que les régions à propriétés différentes, étant excitées par une étincelle, émettent des radiations lumineuses impressionnant différemment la plaque photographique ; au moment du passage de l'étincelle, ces régions se comportent comme des sources émettant de la lumière d'intensité différente.

Cette différence de l'émission est due soit à la composition particulière locale de l'air, soit à la valeur particulière locale du champ électrique. En réalité, la deuxième hypothèse se ramène à la première, car si le champ prend des valeurs aussi différentes d'un point à l'autre, c'est qu'il existe des charges locales qui le font varier ; en d'autres termes, cette composition particulière implique les concentrations locales d'ions dans les différents points de l'espace parcouru par l'étincelle. Quelle est la cause produisant ces concentrations locales ? Comment pouvons-nous nous rendre compte de la formation des « grains » dans l'étincelle ?

On pourrait penser que les différences de l'émission proviennent de la présence, en des régions particulières, d'oxydes d'azote produits par la décharge ; mais étant donné que dans le spectre de l'étincelle grenue, je n'ai observé que les raies de l'air et les bandes de l'azote de l'intensité sensible, cette supposition doit être écartée. Et même, si on l'admettait, l'explication des concentrations locales de ces oxydes resterait à trouver.

De même, il me semble difficile d'admettre que ces concentrations locales d'ions seraient produites sous l'action de forces attractives s'exerçant entre les ions et les molécules neutres. En effet, comme l'a montré A. Becker (¹), les ions ne s'entourent que d'un nombre fort limité de molécules; un ion chargé de cinq à dix molécules n'a plus donc une action suffisamment énergique pour en attirer d'autres et, par conséquent, ces forces ne peuvent pas former de concentrations moléculaires dans des régions de l'ordre de $^1/_2$ millimètre cube. D'une façon analogue, l'effet calorifique ou mécanique de la décharge contribuent à l'établissement d'un état déterminé du milieu, mais directement ils ne peuvent pas être les causes déterminantes dans la formation des « grains ». L'examen d'autres interprétations conduit à cette conclusion qu'il semble qu'on puisse se rendre compte de la façon la plus plausible de cette formation en attribuant les variations locales de concentration aux fluctuations dues à l'agitation moléculaire; j'entends les fluctuations de concentration ionique, car les fluctuations de température sont trop petites pour qu'il soit permis de les invoquer ici.

Après le passage d'une étincelle, l'air se trouve fortement ionisé. Mais le nombre des ions présents diminue avec le temps par suite de leur recombinaison. Si la deuxième décharge passe très peu de temps après la première, l'air est suffisamment ionisé dans tout le parcours de l'étincelle et cette dernière est rose. Si l'intervalle de temps séparant les deux étincelles consécutives est grand, la recombinaison a neutralisé la plus grande

---

(¹) A. Becker, *Ann. d. Phys.*, 36, 1911, pp. 209-280.

partie des ions et la deuxième étincelle passe dans l'air pauvre en ions : ce sera l'étincelle blanche. Soit n_0 la concentration ionique moyenne minimum nécessaire pour que la décharge donne l'étincelle blanche. Pendant tout le temps, l'agitation moléculaire produit des fluctuations, et, au moment où la concentration ionique moyenne n est voisine de n_0, il y aura des régions à concentration $n > n_0$ et d'autres à concentration $n < n_0$. La décharge va exciter dans les premières le spectre de bandes, dans les secondes le spectre de raies; on décèle par la photographie ces inégalités de concentration sous la forme des grains parsemés sur le chemin de l'étincelle.

Bien entendu, les domaines atteints par les fluctuations de concentration ne sont pas aussi grands que les grains; il faudrait plutôt envisager ces derniers comme produits par les fluctuations, mais non pas comme indiquant et délimitant directement les régions des densités ioniques différentes.

Conclusions :

1° Une nouvelle forme de l'étincelle a été mise en évidence; cette étincelle peut être obtenue en faisant passer la décharge dans un gaz convenablement ionisé;

2° La formation de cette étincelle semble pouvoir s'expliquer le mieux par les fluctuations de concentration ionique dans le gaz.

Institut de physique de l'Université de Liége.

◆

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Baekelman (*Dr W.-A.*) et *Noyons* (*Dr A.-K.*). Het verloop van zoutzuur en pepsinescretie onder invloed van proefbouillon als functioneel diagnosticum. Utrecht, 1908; extr. in-8° (27 p., fig.).

Bourquelot (*Ém.*). Exposé des titres et des travaux scientifiques I et II. Lons-le-Saunier et Paris, 1911, 1917; in-4° (50-159 pp.).

— Influence de la glycérine sur l'activité de l'invertine. Paris, 1918; extr. in-8° (11 p.).

— Sur la nomenclature des glucosides cyanhydriques du groupe de l'amygdaline. Paris, 1918; extr. in-8° (3 p.).

— La synthèse biochimique des glucosides d'alcools. III. Monoglucosides d'alcools polyvalents. Paris, 1915; extr. in-8° (310-379 pp.).

— La synthèse biochimique des glucosides d'alcools. IV. Galactosides d'alcools. Paris, 1917; extr. in-8° (153-226 pp.).

— Synthèse biochimique des glucosides et des polysaccharides. Réversibilité des actions fermentaires. Paris, 1914; extr. in-8° (361-393 pp.)

— La synthèse biochimique des *d* glucosides d'alcools monovalents. II. Alcool *d.* glucosides α. Paris, s. d.; extr. in-8° (51 p.).

— La synthèse des glucosides à l'aide des ferments. Reversibilité des actions fermentaires. Paris, 1913; extr. in-8° (28 p.).

— La synthèse des glucosides à l'aide de l'émulsine. Paris, 1912; extr. in-8° (27 pp.).

Bourquelot (*Ém.*) et *Bridel* (*M.*). Synthèse des glucosides d'alcools à l'aide de l'émulsine et réversibilité des actions fermentaires. I. Glucosides B d'alcools monovalents. Paris, 1910; extr. in-8° (76 p.).

— Synthèse biochimique à l'aide de l'émulsine, du glucoside β, de l'alcool naphtylique α. Paris, 1919; extr. in-8° (3 p.).

Bourquelot (*Ém.*), *Bridel* (*M.*) et *Aubry* (*A.*). Essai de synthèse biochimique des diglucosides d'alcools. Diglucoside β du glycol. Paris, 1917; extr. in-8° (8 p.).

Grijns (*G.*) et *Noyons* (*A.-K.*). Sur la sensibilité absolue de l'œil pour la lumière. S. V., s. d.; extr. in-8° (61-71 pp., fig.).

— De absolute gevoeligheid van het menschelijk oog voor licht. Utrecht, 1904; extr. in-8° (8 p.).

Meuris (*Augustin.*). Le problème de l'électricité. Bruxelles, 1919; in-16 (45 pp., fig.).

Noyons (*Dr A.-K.-M.*). About the determination of hardnen in muscles. Amsterdam, s. d.; extr. gr. in-8° (43-53 pp., fig.).

— About observations on the electro-myogram and form-myogram under the influence of fatigue. Amsterdam, 1909; extr. gr. in-8° (723-929 pp., fig.).

— About the independance of the electrocandiogram with regard tho the form-cardiogram. Amsterdam, 1908; extr. gr. in-8° (273-277 pp., fig.).

— Communication about the electrogram of the atrium cordis. Amsterdam, 1910; extr. gr. in-8° (680-686 pp.).

— De Toxicologie van het electro-cardiogram. S. V., s. d.; extr. in-8° (15 p.).

— De Vertolking van het electrocardiogram. Bruxelles, 1909; extr. in-8° (315-322 pp.).

— Invloed van den alcohol op het centrale zenuwstelsel. S. V., 1911; extr. in-8° (7 p.).

— Mededeelingen omtrent het electrogram van het atrium cordis. Amsterdam, 1909; extr. gr. in-8° (450-455 pp., fig.).

— Over de Aktiestroomen van de Hartvoorkamer. Gand, 1911; extr. in-8° (240-243 pp.).

— Over den Autotonus der spieren. Utrecht. s. d.; in-8° (189 p., fig.).

— Over Sklerometrie. Utrecht, 1912; extr. in-8° (7 p.).

— Physiologische Sklerometrie communication 1 el 2. Amsterdam, 1910; extr. gr. in-8° (801-807 pp., 312-318 pp., fig.).

— Ueber den Autotonus der muskeln. Utrecht, 1910; extr. in-8° (319-391 pp., pl.).

— Über modifikationen unpolarisierbarer Elektroden. Strasbourg, 1909; extr. in-8° (265-267 pp., fig.).

Noyons (*D^r A.-K.-M.*) et *Uexküll* (*J.-V.*). Die Hirte der Muskeln. Munich, 1911; extr. in-8° (139-208 pp., fig.).

Noyons (*D^r A.-K.-M.*) et *Zwaardemaker* (*H.*). Das elektrogramm des isoliert pulsierenden aalventrikels. Florence, s. d.; extr, in-8° (369-387 pp., fig.).

Segre (*Corrado*). Commemorazione de Socio nationale Giuseppe Veronese. Rome, 1917; extr. gr. in-8° (249-258 pp.).

— Sui complessi lineari di schiere rigate o regoli. Rome, 1917; gr. in-8° (340-344 pp.).

— Sui complessi lineari di piani nello spazio a cinque dimensioni. Milan, 1917; extr. gr. in-8° (49 p.).

— Sulla geometria delle schiere rigate o regoli, e in particolare sui complessi lineari di tali enti. Milan, 1918; extr. gr. in-8° (31 p.).

Verschaffelt (*J.-E.*). Sur l'application de la théorie du potentiel aux conducteurs. Bruxelles, 1914; extr. in-8° (149-158 pp.).

Assemblée générale des trois Classes du 6 mai 1919.

M. Henri Pirenne, directeur de la Classe des lettres et des sciences morales et politiques et président de l'Académie;

M. L. Le Nain, membre de la Classe des beaux-arts, ff. de secrétaire perpétuel.

MM. Rutot, membre de la Classe des sciences, et Waltzing, membre de la Classe des lettres, ff. de secrétaires de séance.

Sont présents :

Classe des sciences. — MM. A. Gravis, *vice-directeur ;* J. Deruyts, L. Fredericq, J. Neuberg, P. Pelseneer, A. Lameere, Ch. de la Vallée Poussin, F. Swarts, J. Massart, A. Demoulin, A. de Hemptinne, V. Willem, P. Stroobant, Ch. Julin, *membres;* J. Verschaffelt, G. Lecointe, E. Marchal, M. Stuyvaert, *correspondants.*

Classe des lettres et des sciences morales et politiques. — MM. J. Lameere, *vice-directeur;* le comte Goblet d'Alviella, A. Prins, P. Fredericq, P. Thomas, J. Leclercq, M. Wilmotte, M. Vauthier, G. De Greef, E. Hubert, *membres;* dom Ursmer Berlière, Bidez, *correspondants.*

Classe des beaux-arts. — MM. S. Dupuis, *directeur;* J. Brunfaut, *vice-directeur;* G. De Groot, J. Winders, E. Mathieu, L. Frédéric, G. Hulin de Loo, F. Khnopff, L. Du Bois, A. Baertsoen, A. Dumont, P. Bergmans, A. Max, E. Verlant, K. Mesdagh, *membres;* J. Lagae, E. Wambach, *correspondants.*

L'assemblée discute la question des prérogatives à revendiquer par l'Académie; vote en seconde lecture le texte des modifications réglementaires dont l'approbation, par arrêté royal, doit être demandée au Gouvernement, et s'occupe du choix d'un éditeur pour les publications académiques.

A la demande de plus de trente membres une Assemblée générale extraordinaire sera provoquée en juillet, pour procéder à l'élection d'un secrétaire perpétuel, d'après les articles du Règlement modifié.

RAPPORT

SUR LES

travaux de la Commission de la Biographie nationale pendant les années 1914-1919,

par Paul BERGMANS,
Secrétaire adjoint de la Commission et membre
de la Classe des beaux-arts.

Messieurs,

Cinq années se sont écoulées depuis le dernier rapport présenté à l'Académie, au mois de mai 1914, au nom de la Commission de la *Biographie nationale*, les cinq années terribles de la conflagration mondiale où notre pays a été la victime de la plus odieuse des agressions, et où il a dû subir la plus épouvantable des occupations étrangères que relate son histoire.

Comme l'Académie elle-même, la Commission a subi la répercussion des événements, et son activité a été arrêtée à peu près complètement. Pendant ce laps de temps, elle a éprouvé des pertes considérables, car la mort s'est acharnée sur elle et lui a enlevé son vice-président, son secrétaire et cinq de ses membres. C'est par un long et douloureux nécrologe que je dois donc commencer ce rapport, en payant un tribut de regrets et de reconnaissance à nos confrères MM. Marchal, Lonchay, Francotte, Mansion, Gossart, Brants et Rooses.

M. le chevalier Edmond Marchal était entré dans la Commission, comme délégué de la Classe des sciences, le 5 mai 1891, au moment de son élection comme secrétaire perpétuel, et avait été nommé vice-président le 16 mars 1912. M. Henri Lonchay, élu délégué de la Classe des lettres le 11 octobre 1909, avait été nommé secrétaire le 22 mars 1913. MM. Charles Francotte et Paul Mansion, délégués de la Classe des sciences, avaient été désignés comme tels respectivement le 5 novembre 1910 et le 2 décembre 1905; MM. Ernest Gossart et Victor Brants, délégués de la Classe des lettres, le 5 décembre 1898 et le 6 janvier 1913; M. Max Rooses, délégué de la Classe des beaux-arts, le 11 mai 1887; ce dernier avait donc siégé plus d'un quart de siècle dans la Commission.

Tous nous avaient apporté le concours le plus dévoué et le plus éclairé, en assistant assidûment aux séances, et en nous prêtant l'appui de leur érudition et de leur expérience. Sauf M. Francotte, ils avaient aussi collaboré, la plupart d'une manière très active, à notre recueil (¹) et enrichi celui-ci de notices sur des personnalités scientifiques, historiques, littéraires ou artistiques, dont plusieurs sont de la plus grande importance. Il me suffira de vous rappeler les articles de M. Rooses sur Plantin et sur Rubens, et celui de M. Gossart

---

(¹) Voici la liste des notices qu'ils ont fournies à la *Biographie nationale :*

M. le chevalier EDMOND MARCHAL : J. De Kinder, J. De la Baerze, J. van Delen, Delsart, J. De Meyer, S. De Neve, P. De Sutter, J. De Vaere, M. De Vos, J.-B. De Vree, M. De Waeyer, G. Diez, N. Garmet, P. Lammekens, F. Laurent, P. Laviron, D. Le Fèvre, A. Lottmann, T. Maes, de Marsy, J. Martens, Ph. Martens, H. Marville, Matheys, Mathias d'Arras, B. Melo, J. van Milder, N. Millich, J. Mont, E. Neefs, J.-J. van der Neer, S.-J. van der Neer, C. van Nerven, de Nole, E.-A. Nys, Ph. Olivier, J. Ondermarck, C. Orpheus, E. Opstal, J. van Oudenaerde, H. Overstraeten, P. Overstraeten, G. Paludanus, R. Paludanus, W. Pans, A. Papenhoven, G. Papenhoven, L.-J. Parant, A. Parez, C. Pastenaicken, Pastorana, R. Pauli, J.-B. Pauw, H. van Pede, H. Peene, J. Peeten, J.-B. Pennekijn, P. Pepers, J. Perre, Petit, J.-J. Picavet, G. Picq, Pierre d'Aspere, J. Pipels, P. Plumier, D. Poelaert, J. Poelaert, A.-B.-F. Portois, C.-F. van Poucke, A. Prouveur, F. Pulaer, H. Pulinex, P. Puyenbroeck, Arn. Quellin (I), Arn. Quellin (II), Er. Quellin, L. Ramaut, C. de Rantere, A. Rasch, Ricquart, G. Rivière, G. Robin, J. Robin, Robionoy, G. Roefs, J. Roelants, A. Ronse, B. van Roye, Rubbens, Cl. Rulquin, J. Rutty, H.-J. Ruxthiel, Q. van der Saren, J. Sarteels, P. Schemaeckers, P.-G. Scheemaeckers, P. Schleiff.

M. HENRI LONCHAY : S. de La Ruelle, Louis de Bourbon, G. Male, E. de la Marck, E. de la Marck, G. de la Marck (le Sanglier), G. de la Marck, amiral, L. de la Marck, sur Philippe II, dont la scrupuleuse exactitude autant que la sobriété magistrale font un véritable modèle.

La disparition de ces éminents confrères est pour notre entreprise un coup des plus sensibles, et surtout celle de M. Lonchay, qui avait pris fort à cœur ses fonctions et les remplissait avec autant d'activité que de compétence. Les qualités du cœur étaient chez lui à la hauteur de celles de l'intelligence, et cet historien érudit se doublait d'un confrère affable et bon, dont le commerce était des plus agréables. Jeune encore, on pouvait espérer qu'il aurait eu l'honneur de terminer la publication du recueil auquel il vouait ses soins éclairés. En l'enlevant trop tôt à la science historique et à l'affection de ses confrères, une mort prématurée a privé la *Biographie nationale* d'un secrétaire d'élite.

Nous ressentons vivement aussi la perte d'autres membres de l'Académie, qui, sans appartenir à la Commission, avaient accordé à la *Biographie nationale* leur collaboration autorisée : MM. Ernest Discailles, Mesdach de ter Kiele, Émile Waxweiler,

---

Rob. de la Marck (I), Rob. de la Marck (II), Rob. de la Marck (III), Rob. de la Marck (IV), Fr. de Mean, G. de Neeff, L. Melart, R. Oliva, J. Pastur, J.-B. Philippe, Plenevaux, J. Romero, F.-D. Sevin.

M. PAUL MANSION : G.-M.-M. Pagani, M. Schaar.

M. E. GOSSART : C. Nothomb, P. Payen, F. Perrenot, T. Perrenot, Philippe II d'Espagne, O. Piccolomini, S. Renard, L. de Requesens y Zuniga, J.-J. Roy.

M. V. BRANTS : P.-H.-L. Paillot, P. Pecq (I), P. Pecq (II), C.-F.-J. Pieraerts, E. Poullet, Ph. Prats, N. de Prumea, I.-A.-J. Quirini, J. Ramus, F. Richardot, J. Richardot (I), J. Richardot (II), P. Richardot, Chr. Robert, Ch. Scribani.

M. MAX ROOSES : A. van Hasselt, Chr. Jegher, J.-C. Jegher, C. Kiel, J. Lambrecht, A. Van Leest, J. van Lerius, C. Liefrinck, G. Liefrinck, J. Liefrinck. J. Lies, E. Linnig, A.-L. Lion, A.-S. Lion, G. Maes, famille Moretus, Th. Moretus, Nauwens, J. Neefs, L. Neefs, P. Neefs (I et II), J. de Negker, A. Nicolaï, Nieuwelandt, A. Van Noort, L. Van Noort, M. Nutius, B. Ogier, G. Ogier, Ommeganck, G. Opstal, A. Overlaet, G. Panneels, B. Peeters (I), B. Peeters (II), G. Peeters, J. Peeters (II). M. Pepijn, Chr. Plantin, Th. Poelman, A. Poirters, E. Quellin (II), J. Quellin, F. Raphelengien, J. Regemorter, P. Regemorter, N. Rockox, Th. Rombouts, J. Ronsse, A. Rubens. A. Rubens, Ph. Rubens, P.-P. Rubens, Dav. Ryckaert (I), Dav. Ryckaert (II), Dav. Ryckaert (III), M. Ryckaert, J. van Ryswyck, J.-T. van Ryswyck, P. van Schuppen, C. Schut, D. Segers, G. Segers, A. Seghers, C.-J.-A. Seghers, H.-L.-C.-G. Seghers.

Godefroid Kurth, A.-J. Wauters, baron Émile de Borchgrave et Charles Van Bambeke (1). Parmi les collaborateurs étrangers à l'Académie que la mort nous a enlevés, nous citerons, sans être certain, hélas! de donner une énumération complète, le Dr E. Masoin, secrétaire de l'Académie royale de médecine, le chanoine Sylvain Balau, le R. P. bollandiste François Van Ortroy, le chanoine Van Caster, le R. P. A. Lallemand, Victor van der Haeghen, archiviste de la ville de Gand, le chanoine régulier Léon Goovaerts, à Averbode, Eugène Duchesne, professeur à l'Athénée royal de Liége (¹). A tous est acquis notre souvenir reconnaissant.

---

(1) Voici la liste de leurs notices :

M. Ernest Discailles : E. Pirmez, J. Praet, X.-H. Prinz, J.-D. Ritte, Ch. Rogier, F. Rogier, G.-Ch. Sabatier, F. Sacqueleu, Ch. Sainctelette, L. Sainctelette, H. Samuel, V. Savart, P.-J. Scailquin, F. Schollaert, J.-V.-C.-G. van Schoor, P.-J. Scourcon, L. Seghers, P.-G. Séron.

M. Mesdach de ter Kiele : Th. Noppenus, A. Orts, Ch.-Th. Pardon.

M. Émile Waxweiler : L.-A. Quetelet.

M. Godefroid Kurth : Heriger, J. de Holsen, saint Lambert, Lambert le Petit, sainte Landrade, Luc, Maurice, Notger, Pierre l'Ermite, Raoul de Léau, Rathier, Réginard, saint Remacle, Renier de Huy, Résignatus, évêque, Richer, évêque.

M. A.-J. Wauters : Juste de Gand, H. Memling, B. van Orley, J. van Orley, P. van Orley, R. van Orley, V. van Orley, J. Rave, J. Roome, L. Ryck-Aertzoon, Corn. Schernier, dit van Coninxloo, P. Schernier, dit van Royaulme, J. Schoef.

M. le baron Émile de Borchgrave : D. de Borchgrave, E. de Bavière, Errembault, A. de Espinosa, F.-X. de Feller, Ferry de Clugny, Louis de Flandre, Simon de Formelles, J.-H. de Franckenberg, les sires de Gavre, Ch.-Ém.-J. de Gavre, J.-J.-R. de Gavre, Ch.-A -Fr -R. de Gavre, J. Gerardi, Th. Gherbode, Gilles de Léau, Fr. Goubau, G. de Glymes de Grimberghe, G. de Grysperre, G.-A. de Grysperre, Guillaume d'Ypres, J. Kleerhaghe, A. de Maldeghem, J. de Maldeghem, Ph. de Maldeghem, R. de Maldeghem, S. de Maldeghem, Marie d'Autriche, Marie de Bourgogne, Marie de Brabant (II), Marie de Brabant (III), Ch. de Marnix, Mathilde de Hainaut, F. Montigny, E. de Nassau, Jean de Naves (I), Jean de Naves (II), N. de Naves, J. Navigheer, E. de Neuforge, J. de Neyen, J. de Noircarmes, Ph. de Noircarmes, J.-B Nothomb, A.-O. Oexmelin, A. O'Sullivan, J. O'Sullivan, Ch.-N.-A. d'Oultremont, E. Pamele, Pépin le Vieux, Pépin le Gros, Pépin le Bref, E. Perret, Philippe d'Espagne (IV), Philippe d'Espagne (V), Philippe de Namur (I), Philippe de Namur (II), Philippe de Namur (III), Philippe de Saint-Pol, Pierre de Gand (II), Pierre de Gand (III), P.-M. Picquet, G. de Plaines, T. de Plaines, H.-E. Van Poel, J. Reingout, René de Nassau, René de Trith, Th. Reul, Robert de Courtenay, Robert de Liége, Ph. Roose, B. Rottiers, A. Saravia, A. Sasbout, Albert III de Saxe, L. de Schore, Schouteete de Tervarent, Sibylle d'Anjou.

M. Ch. Van Bambeke : Roosbroeck, J.-C. van Rotterdam, Jean Sanders (II), J. Sanders, M.-J.-F. Scheidweiler, E. Schrevens, J.-C. Segers, E.-L.-V. Selade, Fr. Semal, Fr.-X.-Jos. Servais, M. van Sevendonck.

Vous voyez quelle est l'importance des vides à combler. Déjà il a été pourvu au remplacement de plusieurs membres de la Commission : en remplacement de MM. Marchal et Francotte, la Classe des sciences a choisi comme délégués, le 8 février dernier, MM. Gilkinet et Neuberg ; la Classe des lettres a nommé, le 3 février, dom Ursmer Berlière pour remplacer

---

(¹) Voici la liste de leurs notices :

M. le Dr E. MASOIN : J. Parigot.

M. le chanoine S. BALAU : Quaneux, J. Quercu, Radulphe de Rivo, X. Rampen, Ravengère, D. Raymond, Renier de Saint-Jacques, Renier de Saint-Laurent, Richair, Richer, moine, Robert de Stavelot, Rodolphe de Saint-Trond, Rodolphe de Stavelot, C. Roefs, M. Rorive, C.-F. Rossius de Libay, H. Russelius.

Le R. P. FRANÇOIS VAN ORTROY : Sainte Aldegonde, B. de Saive, Philippe de Scouville.

M. le chanoine VAN CASTER : Pierre de Malines.

Le R. P. LALLEMAND : J. Sébastien, J. Settegast.

M. VICTOR VAN DER HAEGHEN : P. Haschaert, J. Lambrecht, A. van Lokeren, L. Makeblyde, S. Manilius, Manilius, imprimeurs, L. Maroten, G. Martins, J. Martins, N. Martins, E. van Mylbeke, J. Olislaegher (I), J. Olislaegher (II), Ch. Parmentier, P. Pauwels, P. Pieters, J.-B. Pisson, L. Plumion, E. Poliyt, Liévin Pottelsberghe, Joachim Pijn, Liévin Pijn, G. van den Rade, D. Raverick, les Reynax, A. van Reysschoot, E. van Reysschoot, J. van Reysschoot, P.-J. van Reysschoot, P.-N. van Reysschoot, G. de Rike, G. de Ritsere, J. Rivière, M. van Roden, E. de Rudder, D. Rutaert, P. Ryckaert, J. Rycquaerd, D. de Rycke, J. Rijm, Th. van Saceghem, A. Salaert, J. Salaert, G. Salenson, J. Salenson, B. Sammelins, Sammelins, J. Sammelins, R. Sanders, N. Sauvage, famille Sauvage, J. Scaloet, famille Schamp, L. vander Schelden, P. vander Schelden, Th. Schellinck, J. Schoorman, J.-L. Serlippens, J. Sicleer, I.-L. van Siclers.

M. le chanoine L. GOOVAERTS : H.-J. Seerwart, B. Segers.

M. EUGÈNE DUCHESNE : L.-J.-L. Jamme, Jean Sans Peur, A. Maigret, G. Maigret, Maximilien d'Autriche, A. de Mercy-Argenteau, Ch. de Mercy-Argenteau, E. de Mercy-Argenteau, Fl. de Mercy-Argenteau, Fr. de Mercy-Argenteau, Ch. de Mérode, E. de Mérode, Fél. de Mérode, Fl. de Mérode, Fr. de Mérode, Ph. de Mérode, R. de Mérode, W. de Mérode, Miébais, Napoléon, H. van der Noot, Ongnies, D. Pradt, J.-A. de Roquelaure, E. Sauvage, J.-D.-A. Scockart, L.-A. Scockart, M.-L. Selys.

M. Lonchay, et, le 7 avril, MM. Hubert et Vercoullie en remplacement de MM. Brants et Gossart.

Quoique le corps de nos collaborateurs soit resté nombreux, il importera de s'assurer encore le concours de forces fraîches et jeunes pour reprendre la lourde succession de tous nos chers disparus.

Au moment de la déclaration de guerre, l'impression du tome XXII, consacré à la suite de la lettre S, était en cours ; elle se poursuivit malgré les difficultés des communications entre le secrétariat et l'imprimeur, d'une part, et les auteurs, de l'autre, difficultés résultant du fait que la Commission n'avait voulu avoir aucune espèce de rapports avec l'occupant. Au mois d'avril 1915, l'impression fut arrêtée, après la terminaison du premier fascicule dont les exemplaires, datés de 1914, furent conservés par l'imprimeur-éditeur et ne furent distribués qu'en février 1919. Ce fascicule contient 162 notices, parmi lesquelles nous relèverons celles consacrées aux personnages suivants, cités dans l'ordre alphabétique : le P. André Schott, philologue anversois qui résida longtemps en Espagne à la fin du XVI^e^ siècle ; l'architecte Auguste Schoy ; le professeur Johannes-Matthias Schrant, une des premières illustrations de l'Université de Gand ; le baron de Schroeder, un des généraux les plus activement mêlés aux événements de la fin du régime autrichien dans notre pays ; le peintre anversois Corneille Schut ; le biologiste Théodore Schwann, le fondateur de la théorie cellulaire et une des illustrations de la science belge du XIX^e^ siècle ; le P. Charles Scribani, historien et écrivain religieux de l'époque des Archiducs ; Sedulius, écrivain irlandais fixé à Liége au IX^e^ siècle, personnalité intéressante des débuts de notre histoire littéraire ; la famille des peintres anversois Segers ; Mgr Charles-Jean Seghers, qui continua de nos jours la tradition des grands missionnaires belges et fut l'apôtre de l'Alaska ; le membre du Congrès national Michel de Selys, et son fils, le naturaliste et homme politique Michel-Édouard, baron de Selys Longchamps ; les bourgmestres liégeois du XV^{e} siècle, Alexandre, Gilbert et Jean de Seraing ; le député Pierre-Guillaume Seron ; les historiens et numismates Serrure ; saint Servais, le premier titulaire de l'évêché de Tongres au IV^{e} siècle ; le chirurgien baron Louis-Joseph Seutin; le cartographe Chrétien Sgrooten, qui produisit au XVI^{e} siècle une œuvre importante ; Sigefroid, le fondateur de la maison de Luxembourg au X^{e} siècle et l'auteur de la famille des comtes de Salm ; Siger de Brabant, le grand philosophe averroïste du XIII^{e} siècle, auquel sa destinée tragique a valu d'être immortalisé par le Dante dans son *Paradiso.*

Le manuscrit de la suite du tome XXII est prêt pour l'impression, qui sera reprise aussitôt qu'auront pu être réglées certaines questions matérielles résultant du renchérissement du prix du papier et de la main-d'œuvre. Il ne manque plus beaucoup de notices pour que la lettre S soit terminée, et la Commission espère que ses collaborateurs lui transmettront sans tarder les biographies qu'ils doivent encore traiter dans cette lettre.

Les notices des lettres T et U ont été attribuées au mois de juin 1914, et notification en a été faite aux collaborateurs. Il serait utile que ceux-ci veuillent bien songer à s'en occuper. Le secrétariat a arrêté la liste provisoire de la lettre V, qui pourra être imprimée dès cette année, si les ressources budgétaires le permettent.

Pendant la durée de la guerre, le secrétariat a préparé aussi, dans la mesure du possible, la suite de la publication, soit en réclamant des manuscrits aux auteurs qu'il pouvait toucher, soit en soumettant les articles livrés aux membres du Comité de revision avec lesquels il restait en communication, c'est-à-dire MM. Pirenne et Hulin de Loo. Mais bientôt celui-ci resta seul pour continuer le travail, l'éminent président de la Commission ayant été brutalement déporté en Allemagne le 18 mars 1916.

Une autre épreuve était réservée à la *Biographie nationale.* Depuis sa création, son bureau est établi à la bibliothèque de l'Université de Gand, que dirigèrent et son premier président, le baron Jules de Saint-Genois, et celui qui fut pendant vingt-cinq ans son parfait secrétaire, Ferdinand van der Haeghen. Lors de la transformation de l'Université gantoise en une institution de guerre allemande, camouflée en *Vlaamsche Hoogeschool*, son secrétaire adjoint, qui y était alors bibliothécaire, refusa de s'associer à cette trahison. Il quitta l'établissement au début de juillet 1916, emportant avec lui les archives de la *Biographie nationale*. Celles-ci furent hospitalisées par la Commission des monuments de la ville de Gand. Il y a lieu de remercier cette Commission, et en particulier son président, M. Joseph Casier, de l'assistance qu'elle a voulu prêter en cette occurrence à la Commission de la *Biographie nationale*, et par conséquent à l'Académie. Nous lui devons d'avoir pu assurer la continuation du service du secrétariat, ainsi que la conservation de ses archives et de ses collections qui ont repris depuis leur place à la bibliothèque de l'Université, lorsque le Gouvernement en confia la direction à l'auteur de ce rapport.

Ce nous est un devoir de consigner ici notre spéciale gratitude pour la haute et bienveillante sollicitude que M. le Directeur général de l'Enseignement supérieur, des Sciences et des Lettres n'a cessé de témoigner à l'égard de la *Biographie nationale*.

Aussitôt que la Commission comptera tous ses membres, elle pourra compléter son Bureau et reprendre, avec un nouveau zèle, sa tâche patriotique. Comme vous avez pu le constater, nous nous rapprochons de la fin de l'alphabet, et il est permis d'espérer que d'ici à quelques années l'entreprise sera terminée, si nous pouvons compter sur un peu d'empressement de la part de nos collaborateurs. Nous leur adressons donc un pressant appel. Plus que jamais l'utilité de notre dictionnaire apparaît au lendemain de la mêlée où la Belgique a pris davantage encore conscience de son unité, de son existence historique, et de son importance européenne.

Liste des travaux publiés par l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique, de mai 1914 à mai 1919, dressée par le Secrétaire perpétuel ff.

BULLETINS.

Classe des sciences, 1914, nos 5 à 12.

Classe des lettres et des sciences morales et politiques et Classe des beaux-arts, 1914, nos 5 à 12.

Depuis janvier 1899, les *Bulletins* (gr. in-8° depuis 1911) sont publiés par numéros mensuels formant deux volumes par année, dont l'un renferme les travaux de la *Classe des sciences* (1914, 391 pages, 58 figures et 4 planches) et l'autre les travaux de la *Classe des lettres et des sciences morales et politiques* et de la *Classe des beaux-arts* (1914, 498 pages). Chacun de ces volumes se termine par une Table onomastique et une Table analytique.

Depuis le mois de janvier 1919, les publications des Classes des lettres et des beaux-arts sont séparées, et il a été publié les nos 1 à 4 des *Bulletins* de chaque Classe.

Il a été publié en outre :

Tables générales des Bulletins de la Classe des sciences, 4e série, années 1899 à 1910, par Félicien Leuridant et José Perrée (in-8°, VIII-178 pages).

Tables générales des Bulletins de la Classe des lettres et des sciences morales et politiques et de la Classe des beaux-arts, 4e série, 1899 à 1910, par Félicien Leuridant et José Perrée (in-8°, VIII-158 pages).

Tables générales des Bulletins de la Classe des sciences, 5e série, 1911-1914, par Félicien Leuridant (grand in-8°, VIII-34 pages).

Tables générales des Bulletins de la Classe des lettres et des sciences morales et politiques et de la Classe des beaux-arts, 5e série, 1911-1914, par Félicien Leuridant (grand in-8°, VIII-35 pages).

Tables générales des Mémoires, supplément 1898-1914, par Félicien Leuridant (in-8°, IV-33 pages).

Tables des notices biographiques publiées dans l'Annuaire, 1845-1914, par Félicien Leuridant (in-16, IV-51 pages).

Catalogues onomastiques des accroissements de la bibliothèque. Sciences (1883-1914); Lettres (1887-1914); Beaux-Arts (1890-1914), par Félicien Leuridant et José Perrée, (3 vol. in-8°).

Fondations académiques. Règlements et documents. Nouvelle édition, par Félicien Leuridant (in-8°) (VIII-131 pages).

ANNUAIRE.

L'*Annuaire* de 1915-1919 constitue un fort volume de près de 500 pages in-18, comprenant, outre les renseignements ordinaires, la table des notices biographiques publiées depuis 1845, la liste des sociétés, établissements et recueils périodiques avec lesquels l'Académie était en relation en 1914, et les notices biographiques (avec portraits gravés) de Louis Gallait, par Lucien Solvay; Ernest Slingeneyer, par le même; Joseph Stallaert, par le même; Édouard de Biefve, par le même; Édouard Van Even, par le même; Gustave Huberti, par le même; Gédéon Bordiau, par Jules Brunfaut; Henri Maquet, par le même; Julien-Gabriel Leclercq, par Paul Bergmans; Adolphe-Édouard-Théodore Pauli, par le même; Florimond Van Duyse, par le même; le baron de Borchgraeve, par Jules Leclercq.

MÉMOIRES.

Dans sa séance générale du 10 mai 1904, l'Académie a pris la résolution (approuvée par arrêté royal du 3 juin 1904) de publier une deuxième série de ses mémoires en deux parties distinctes, savoir :

A. — *Mémoires de la Classe des sciences* (collections in-4° et in-8°).

B. — *Mémoires de la Classe des lettres et des sciences morales et politiques et de la Classe des beaux-arts* (collections in-4° et in-8°).

Il a été publié cette année :

Classe des sciences.

COLLECTION IN-4°, TOME IV, FASCICULE 3.

Sur les cas d'intégrabilité de l'équation $\frac{d^ny}{dx^n} = x^ny$; par **Jean Beaupain** (45 pages).

FASCICULE 4.

Sur les fonctions de Bessel d'ordre supérieur ; par **Jean Beaupain** (31 pages).

Classe des lettres et des sciences morales et politiques.

COLLECTION IN-4°, TOME VII, FASCICULE 1.

Le comte de Mercy-Argenteau et Blumendorf. Dépêches inédites tirées des Archives impériales de Vienne (5 janvier-23 septembre 1792); par **Eugène Hubert** (219 pages).

Traduction française de l'Abhidarmakósabhasya. Chapitre III : Cosmologie. D'après la version tibétaine; par **Louis de la Vallée Poussin.**

COLLECTION IN-8°, TOME XI, FASCICULE 2.

Bio-bibliographie de Gemma Frisius, fondateur de l'École belge de géographie, de son fils Corneille et de ses neveux les Arsénius; par **Fernand Van Ortroy.**

Classe des beaux-arts.

COLLECTION IN-4°.

Un essai de reconstitution plastique des races humaines primitives; par **Aimé Rutot** (172 pages, 24 gravures, 32 planches).

TRAVAUX A IMPRIMER.

CLASSE DES SCIENCES.

Le calcul des variations depuis 1850; par **Maurice Lecat** (Mémoire couronné).

Observations au sujet du tracé de la carte géologique de la région sud-ouest du massif de Stavelot; par **Léopold de Dorlodot** (Mémoire couronné).

La tectonique du Brabant et des régions voisines; par **Fourmarier** (Mémoire couronné).

Sur la multiplication des déterminants à plusieurs dimensions; par **Maurice Lecat.**

Congruences de cubiques gauches; par **Modeste Stuyvaert** (Mémoire couronné).

Les variations et leur hérédité chez les Mollusques; par **Paul Pelseneer.**

Contribution à l'étude des calcites belges; par **H. Buttgenbach.**

Contribution à l'étude des minéraux du Vésuve et du Monte Somma : Les minéraux du groupe de la néphéline; par **G. Cesàro.**

Recherches sur les variations numériques des chromosomes dans la série végétale; par **Émile Marchal** (Mémoire couronné).

Sur quelques relations numériques pouvant être utiles dans l'interprétation des analyses des beurres falsifiés; par **G. Cesàro.**

Sur la reviviscence chez les végétaux; par **Jeanne Terby** (Mémoire couronné).

CLASSE DES LETTRES.

Histoire du paganisme dans l'Empire d'Orient depuis le règne de Théodose le Grand jusqu'à l'invasion arabe; par **A. Kugener** (Prix Gantrelle).

Zuster Hadewijck; par le R. P. **Van Mierlo J**r, S. J. (Mémoire couronné).

Le Condroz. — Het Hageland; par **Émile Vliebergh** et **Robert Ulens** (Mémoire couronné).

La Lorraine belge; par **Louis Verhulst** (Mémoire couronné).

CLASSE DES BEAUX-ARTS.

Histoire de la création et du développement du drame musical; par **Ludovic Blareau** (Mémoire couronné).

Les origines de la parure; par **Georges Van Wetter.**

TABLE DES MATIÈRES

CLASSE DES SCIENCES. — *Séance du 6 mai 1919.*

Éloge de M. Paul Mansion 327
Coût des impressions 327
CORRESPONDANCE : Condoléances pour le décès de M. Mansion. — Création d'un Institut international d'anthropologie. — Hommages d'ouvrages . . 328
TRAVAUX A L'EXAMEN. 328
RAPPORTS 328
CONCOURS DE 1913 : Sixième question (lauréat : Mlle J. Terby); rapports . 330
PRÉROGATIVES ACADÉMIQUES. 332
CONSEILS DE RECHERCHES 332

Communications et Lectures.

MATHÉMATIQUES. — *Quelques problèmes de probabilité,* par J. Neuberg . . . 333
GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE. — *Sur les congruences de sphères cycliques et sur les systèmes triples orthogonaux à lignes de courbure planes ou sphériques dans un système,* par A. Demoulin 339
PHYSIQUE. — *Volumes de ménisques de mercure* (1 figure), par Ch. Nicaise . 361
PHYSIQUE. — *Sur une propriété commune aux systèmes thermodynamiques les plus simples,* par E. Henriot. 371
CHIMIE BIOLOGIQUE. — *La stérilisation de la farine en vue de la fermentation panaire* (deuxième note), par A.-J.-J. Vandevelde 383

Assemblée générale des trois Classes du 6 mai 1919.

BERGMANS (Paul) : *Rapport sur les travaux de la Commission de la Biographie nationale pendant les années 1914-1919* 405
Liste des travaux publiés par l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique, de mai 1914 à mai 1919, dressée par le Secrétaire perpétuel ff. 413

Le fonds des publications académiques ayant été systématiquement pillé par les Allemands, il ne sera plus possible de donner suite aux demandes de combler les lacunes antérieures à 1919.

31-8-19.

ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

BULLETIN

DE LA

CLASSE DES SCIENCES

1919 — N^{os} 6-8

L'UNION FAIT LA FORCE

SMITHSONIAN I
OCT 1 - 19
NATIONAL MU

BRUXELLES
HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE
112, Rue de Louvain, 112

1919

Séance du 14 juin 1919.

M. A. Gravis, vice-directeur, occupe le fauteuil.

M. L. Le Nain, secrétaire de la Commission administrative, ff. de secrétaire perpétuel.

M. A. Rutot, secrétaire de séance.

Sont présents : MM. C. le Paige, J. Deruyts, Léon Fredericq, J. Neuberg, P. Pelseneer, M. Delacre, A. Lameere, Ch.-J. de la Vallée Poussin, M. Lohest, F. Swarts, J. Massart, A. de Hemptinne, V. Willem, P. Stroobant, Ch. Julin, *membres ;* J. Verschaffelt, G. Lecointe, E. Marchal, M. Stuyvaert, *correspondants.*

ÉLECTIONS.

La Classe se réunit en comité secret pour la nomination des nouveaux membres titulaires, associés et correspondants.

Sont élus :

Section des sciences mathématiques et physiques : MM. J. Verschaffelt, G. Lecointe, *membres;* MM. Henri Deslandres, G. Hale, Paul Appel, Haller, N. Lockyer, J.-J. Thomson, Viti Volterra, Lorentz, Charles Moureu, G. Urbain, Claude Guichard, *associés.*

Section des sciences naturelles : MM. Émile Marchal, Jules Cornet, Pierre Nolf, Jules Bordet, *membres ;* M. Albert Brachet, *correspondant;* MM. Paul Marchal, E. de Margerie, Davenport, Sauvageau, Goodrich, Henry Fairfield Osborn, F. Mesnil, Guignard, Termier, Maurice Caullery, Charles Richet, Grassi, *associés.*

Le procès-verbal de la dernière séance est lu et approuvé.

M. le Président de l'Académie annonce la présentation de deux candidatures pour la place de secrétaire perpétuel.

CORRESPONDANCE.

M^lle^ Jeanne Terby, docteur en sciences à Louvain, remercie pour le prix qui lui a été décerné pour son mémoire soumis au concours annuel de 1913.

— M. Vande Sande Bakhuysen adresse des condoléances au sujet de la mort de M. Paul Mansion.

— M. le docteur De Meyer offre de contribuer à la publication des planches de son mémoire. Après discussion, la demande est rejetée et l'auteur sera prié de réduire les planches au strict nécessaire.

— M. L. Spelkens fait une communication relative à la *Quadrature du cercle.* — Dépôt aux archives.

— M. C. le Paige dépose un pli cacheté : *Détermination de l'orbite d'une planète par trois observations.*

— M. Henri Wilmotte, de Dampremy, communique une annexe à son mémoire sur l'*Énergie dans son essence.* — Dépôt aux archives.

— M. Lucien Godeaux soumet à l'examen un travail intitulé : *Les surfaces bicanoniques doubles ayant un nombre fini de points de dération.* — Commissaires : MM. Neuberg et Stuyvaert.

— Un travail de M. Pienkowski : *La mesure des mobilités des ions par la méthode du compensateur plan* est renvoyé à l'examen de MM. Verschaffelt et de Hemptinne.

HOMMAGES D'OUVRAGES.

M. Léon Fredericq offre, de la part de M. le professeur Constantino Gorini, directeur du laboratoire de bactériologie de l'École supérieure d'agriculture de Milan, six brochures sur les ferments du lait. L'auteur y poursuit ses recherches sur la différenciation physiologique des ferments lactiques, notamment sur le groupe de ces ferments producteurs d'acidité et de présure; il étudie leurs conditions de vie, leur activité protéolytique, leur stabilité et leur localisation dans la mamelle.

FONDATION DE POTTER.

— M. Paul Pelseneer demande où en est la question de la Fondation de Potter.

M. le ff. de Secrétaire perpétuel répond que tout sera bientôt en ordre. Les renseignements définitifs pourront être fournis à la prochaine séance.

PRIX DERUYTS.

M. Stuyvaert lit son rapport relatif à l'attribution du Prix Deruyts pour le concours 1910-1914. MM. Neuberg et Le Paige se rallient aux conclusions de M. Stuyvaert. M. Deruyts s'abstient.

Le prix est attribué à M. Godeaux, mais à titre d'encouragement, étant donné que son mémoire n'a pas apporté de faits nouveaux à la science.

Après proposition de ne pas accorder le prix dans ces conditions, la Classe se rallie aux conclusions des rapporteurs. Notification sera faite à M. Godeaux.

CHOIX D'UNE LECTURE POUR LA SÉANCE PUBLIQUE.

M. Julin accepte de préparer cette lecture.

CHOIX D'UN ÉDITEUR POUR LES PUBLICATIONS.

Sur la proposition de M. le Secrétaire perpétuel ff., la Classe accepte de laisser à la Commission administrative, dans laquelle toutes les Classes sont représentées, le soin de choisir et de proposer un éditeur offrant les garanties nécessaires. Néanmoins, comme la Classe des lettres, celle des sciences pourrait nommer une commission de deux ou trois membres pour présenter préalablement un ou plusieurs éditeurs à la Commission administrative.

PRÉPARATIFS POUR LA RÉUNION DES ACADÉMIES INTERALLIÉES.

M. le Secrétaire perpétuel ff. donne lecture de la correspondance. M. Lecointe fournit à la Classe les explications nécessaires et insiste pour compléter les délégations.

Les délégations sont complétées. Il est entendu que c'est l'Académie qui nomme les délégués. Il y aura lieu d'annoncer aux délégués leur nomination.

PRIX DERUYTS.

3e période (1910-1914.)

Rapport de M. Stuyvaert.

Les dix brochures soumises par M. Lucien Godeaux ne constituent pas toutes ses publications dans la période 1910-1914. Nous pouvons admettre que le total de ces travaux ne contient pas une contribution de qualité moindre que la partie qui nous est présentée, et que l'auteur aura trouvé préférable de n'envoyer que les publications jugées par lui les plus importantes.

Sauf une, ces notices sont des articles parus dans des bulletins d'académies ou de sociétés savantes de Paris, Rome, Porto, Bucarest, Cracovie, Turin et Bruxelles. Deux, en effet, ont été présentées à notre Compagnie par notre savant confrère M. Neuberg.

De tels patronages font bien augurer de la valeur des travaux soumis. Toutefois il ne suffit pas de s'en référer à ces hautes autorités; un examen direct s'impose toujours, surtout quand il s'agit de l'attribution d'un prix. Car des travaux pourraient mériter les honneurs de la publication et ne pas suffire à conférer à leurs auteurs le titre de lauréat.

Que stipule, en effet, le règlement du Prix Deruyts? Qu'il est destiné à récompenser des écrits apportant quelque contribution à la géométrie analytique ou synthétique.

D'abord les écrits de M. L. Godeaux sont assurément de la géométrie analytique et s'occupent de parties élevées, nouvelles et difficiles de la théorie générale des surfaces algébriques.

Une des brochures s'occupe de la surface du quatrième ordre contenant une sextique gauche de genre trois et, prenant pour guide un travail apparenté de M. Severi, étudie les transformations birationnelles de cette surface en elle-même.

Les autres notices étudient, sur des surfaces algébriques de genres déterminés, des involutions ou des transformations rationnelles d'une surface à une autre. Toutes ces recherches se ressemblent entre elles quant aux questions résolues et au mode de démonstration. Dans deux de ces neuf articles de M. L. Godeaux, les résultats sont simplement énoncés. Dans les sept restants, on a un raisonnement suivi qui procède presque toujours à l'instar de recherches antérieures et citées par M. L. Godeaux.

Pour donner une idée du genre de résultats obtenus, citons ce théorème :

« Si une involution appartenant à une surface algébrique ne possède qu'un nombre fini de points unis, cette involution est engendrée par un groupe de transformations birationnelles de la surface en elle-même. »

La géométrie sur une surface algébrique est d'une grande richesse de résultats; les premiers chercheurs ont introduit des notions nouvelles et utilisé toutes les ressources de l'analyse.

Si l'ensemble de ces théories présente un aspect majestueux, par contre un résultat isolé donne l'impression de quelque chose de bien spécial.

Malgré tout le mérite qu'il y a pour M. L. Godeaux à s'être assimilé ces belles recherches et à y travailler, comme il n'a pas ouvert de voie nouvelle, sa contribution consiste uniquement en quelques théorèmes isolés, donc très spéciaux.

Le progrès réalisé par la géométrie algébrique dans l'œuvre de M. L. Godeaux, sans être tout à fait négligeable, est cependant assez mince pour que nous ayons hésité à le proposer pour le Prix Deruyts.

Ce qui nous a décidé, c'est que les académies ont pour mission de travailler aux progrès futurs de la science, que les prix décernés servent donc moins à récompenser qu'à encourager. Dès lors, les patientes études de M. L. Godeaux, dans un domaine où il est seul en Belgique à avoir publié, méritent, selon nous, cet encouragement. La Classe des sciences, si elle se rallie à notre avis, voudra affirmer son désir de voir M. L. Godeaux s'occuper encore de cette intéressante géométrie des surfaces algébriques, s'y perfectionner par un redoublement de soin apporté à ses recherches, y découvrir des méthodes et des propositions multiples, en un mot y conquérir la maîtrise.

Nous avons l'honneur de proposer à la Classe des sciences l'attribution du Prix Deruyts à l'ensemble des publications de M. L. Godeaux pendant la période 1910-1914.

Avis de MM. J. Neuberg et C. le Paige.

Nous nous rallions aux conclusions du rapport de M. Stuyvaert.

14 juin 1919.

COMMUNICATIONS ET LECTURES

GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE. — **Sur les transformations de Ribaucour,**

par M. A. DEMOULIN, membre de l'Académie.

1. Supposons qu'un cercle variable C, dépendant d'un paramètre, ait une enveloppe qu'il touche en deux points A et B. Nous dirons que les courbes (A) et (B) décrites par ces points se correspondent dans une *transformation de Ribaucour*, A et B étant des points correspondants.

2. Supposons que la ligne (A) ne soit ni une droite ni un cercle. Désignons par S la sphère qui passe par le cercle C et par le cercle osculateur de (A) en A.

Lorsque la courbe (A) est gauche, la sphère S ne se réduit pas à un plan. En effet, si le contraire avait lieu, S coïnciderait avec le plan osculateur de (A) et admettrait, par suite, comme caractéristique la tangente à cette courbe; d'autre part, elle admettrait comme caractéristique la droite AB. On serait donc conduit à une impossibilité.

Si la courbe (A) est gauche, ou bien elle n'est pas sphérique, ou bien elle l'est.

Dans le premier cas, la sphère S est variable et admet le cercle C comme caractéristique. En effet : 1° la caractéristique de S est un cercle passant par les points A et B; 2° le plan de cette caractéristique touche la courbe (A) en A, car il est perpendiculaire à la tangente à la trajectoire du centre O de la sphère S et ladite tangente appartient au plan normal à (A) en A, attendu que le point O est situé sur l'axe du cercle osculateur de (A).

Si la courbe (A) appartient à une sphère Σ, la sphère S peut être variable ou fixe. Dans le premier cas, elle admet le cercle C comme caractéristique. Dans le second, elle coïncide avec Σ, et la courbe (B) est tracée sur cette sphère.

Examinons enfin le cas où la courbe (A) appartient à un plan π. Si la sphère S ne se réduit pas à un plan, elle est nécessairement variable et admet le cercle C comme caractéristique. Si elle se réduit à un plan, elle coïncide avec le plan π, et la courbe (B) est tracée sur ce plan.

Lorsque la ligne (A) est une droite ou un cercle, la ligne (B) appartient nécessairement à un plan ou à une sphère passant par (A).

3. Une ligne quelconque (A), lieu d'un point A, étant donnée, soit à déterminer les lignes qui lui correspondent dans des transformations de Ribaucour. En s'appuyant sur les considérations précédentes, on est conduit aux résultats suivants.

Il y a trois cas à distinguer. *Premier cas :* La ligne (A) n'est ni plane ni sphérique. *Deuxième cas :* La ligne (A) est plane ou sphérique, mais n'est ni une droite ni une courbe. *Troisième cas :* La ligne (A) est une droite ou un cercle.

Premier cas. Faisons passer par le cercle osculateur de (A) en A une sphère définie pour chaque position de ce point. Le cercle caractéristique de cette sphère est tangent à la courbe (A) en A, et son enveloppe se compose de la courbe (A) et d'une seconde courbe. Celle-ci correspond à la courbe (A) dans la transformation de Ribaucour la plus générale.

Deuxième cas. La solution que nous venons d'indiquer subsiste dans ce cas, mais il y a d'autres courbes qui correspondent à la courbe (A) dans des transformations de Ribaucour; ce sont celles qui appartiennent au plan ou à la sphère sur laquelle la courbe (A) est tracée.

Troisième cas. La ligne qui correspond à la ligne (A) dans la transformation de Ribaucour la plus générale est la ligne la plus générale tracée sur un plan ou une sphère quelconque passant par (A).

4. Les transformations de Ribaucour des courbes, celles des surfaces (*) et celles des systèmes triples orthogonaux (**) jouissent de propriétés susceptibles du même énoncé, à condition de désigner par le mot figure une courbe, une surface ou un système orthogonal. Pour abréger, au lieu de dire *transformation de Ribaucour,* nous dirons *transformation* R.

Si deux figures (M_1) *et* (M_2) *correspondent à une figure* (M_0) *dans des transformations* R, *il y a une figure* (M), *dépendant d'un paramètre, qui correspond à* (M_1) *et à* (M_2) *dans des transformations* R. *Désignons respectivement par* M_0, M_1, M_2, M *des points correspondants des figures* (M_0), (M_1), (M_2), (M). *Les points* M *appartiennent au cercle* Γ *qui passe par les points* M_0, M_1, M_2. *Le rapport anharmonique de quatre quelconques de ces points est constant. Le cercle* Γ *porte une seconde infinité simple de points* M' *décrivant des figures* (M') *qui correspondent aux figures* (M) *dans des transformations* R. *Le rapport anharmonique de quatre points* M' *est constant. Parmi les points* M *figure le point* M_0 *et parmi les points* M', *les points* M_1 *et* M_2.

Désignons par les lettres A, B, C les trois théorèmes que comprend cet énoncé : le théorème A concernant les courbes, le théorème B, les surfaces, et le théorème C, les systèmes orthogonaux.

Nous avons énoncé partiellement le théorème A et démontré

(*) Pour la définition de la transformation de Ribaucour des surfaces, voir notre note *Sur les surfaces dont les lignes de courbure d'un système sont planes ou sphériques et sur les familles de Lamé dont les trajectoires orthogonales sont planes ou sphériques* (ce BULLETIN, séance du 1er mars 1919).

(**) Pour la définition de la transformation de Ribaucour des systèmes orthogonaux, voir G. DARBOUX, *Leçons sur les systèmes orthogonaux,* 2e édition, n° 215.

le théorème C dans le mémoire auquel l'Académie des sciences de Paris a décerné le Prix Bordin en 1911 (*). Nous avons établi le théorème B dans les *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris* (séances des 3 et 17 janvier 1910).

5. Voici un résumé de la démonstration du théorème C à laquelle nous venons de faire allusion.

Soit (M_0) un système triple orthogonal quelconque. Désignons par u_1, u_2, u_3 les paramètres des trois familles de Lamé qui le composent. Soit (M_1) un quelconque des systèmes triples orthogonaux que la transformation de Ribaucour permet de déduire du système (M_0). Par hypothèse, par deux points correspondants M_0 et M_1 des systèmes (M_0) et (M_1) passent trois sphères S_1, S_2, S_3 respectivement tangentes aux surfaces de paramètres u_1, u_2, u_3 décrites par ces points. Désignons par S_4 et S_5 deux sphères orthogonales entre elles et aux précédentes. Rapportons les sphères $S_1, S_2, \ldots, S_5$ à un système de coordonnées pentasphériques. Le pentasphère (**) P formé de ces sphères admet, lorsque $u_i (i = 1, 2, 3)$ varie seul, les rotations p_i, q_i, r_i, ξ_i, η_i, ζ_i, λ_i, μ_i, ν_i, ρ_i (***).

Par suite du choix des sphères S_1, S_2, S_3, les rotations p_1, q_2, r_3, ξ_2, ξ_3, η_3, η_1, ζ_1, ζ_2, λ_2, λ_3, μ_3, μ_1, ν_1, ν_2 sont nulles.

Soit *ikl* une permutation quelconque des nombres 1, 2, 3.

(*) Dans une note insérée dans les *Comptes rendus*, le 7 novembre 1910, nous avions déjà démontré qu'à tout couple de systèmes orthogonaux (P), (Q) se correspondant dans une transformation de Ribaucour, on peut attacher un couple de systèmes orthogonaux (P'), (Q') ayant entre eux la même relation, de manière que les systèmes (P), (P') se correspondent dans une transformation de Ribaucour et qu'il en soit de même des systèmes (Q), (Q').

(**) Nous appelons *pentasphère* tout système de cinq sphères deux à deux orthogonales, les cinq coordonnées de chacune de ces sphères (choisies de manière que la somme de leurs carrés soit égale à 1) étant données en grandeur et en signe.

(***) Voir, pour la définition de ces quantités, dans les *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, notre note du 5 juin 1905. Nous avons remplacé ici σ par ρ.

Il est toujours possible de choisir la sphère S_4 de manière que lorsque u_i $(i = 1, 2, 3)$ est constant les points caractéristiques de cette sphère appartiennent au cercle d'intersection des sphères S_k, S_l. On a alors $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 0$.

Les rotations non nulles sont liées par 21 relations. Si l'on pose

$$\begin{array}{lll} p_2 = -\beta_{32}, & q_3 = -\beta_{13}, & r_1 = -\beta_{21}, \\ p_3 = \beta_{23}, & q_1 = \beta_{31}, & r_2 = \beta_{12}, \\ \xi_1 + i\lambda_1 = H_1, & \eta_2 + i\mu_2 = H_2, & \zeta_3 + i\nu_3 = H_3, \\ \xi_1 - i\lambda_1 = H'_1, & \eta_2 - i\mu_2 = H'_2, & \zeta_3 - i\nu_3 = H'_3, \end{array}$$

ces relations s'écrivent

$$(\mathrm{A}) \qquad \left\{ \begin{array}{c} \beta_{ik} = \dfrac{1}{H_k}\dfrac{\partial H_i}{\partial u_k} = \dfrac{1}{H'_k}\dfrac{\partial H'_i}{\partial u_k}, \\[2ex] \dfrac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l} = \beta_{il}\beta_{lk}, \\[2ex] \dfrac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + \dfrac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} + \beta_{li}\beta_{lk} + \dfrac{1}{2}(H_iH'_k + H_kH'_i) = 0, \\[1ex] (i, k, l = 1, 2, 3; \quad i \neq k \neq l). \end{array} \right.$$

Soient $0, 0, 0, 1, i$ les coordonnées du point M_0 et $0, 0, 0, 1, -i$ celles du point M_1 (*).

En vertu des équations (A), chacun des systèmes

$$(1) \qquad \frac{\partial^2\alpha}{\partial u_i \partial u_k} = \frac{\partial \log H_i}{\partial u_k}\frac{\partial \alpha}{\partial u_i} + \frac{\partial \log H_k}{\partial u_i}\frac{\partial \alpha}{\partial u_k},$$

$$(2) \qquad \frac{\partial^2\alpha'}{\partial u_i \partial u_k} = \frac{\partial \log H'_i}{\partial u_k}\frac{\partial \alpha'}{\partial u_i} + \frac{\partial \log H'_k}{\partial u_i}\frac{\partial \alpha'}{\partial u_k},$$

$$(i, k = 1.\ 2, 3; \quad i \neq k),$$

admet une solution dépendant de trois fonctions d'une variable.

(*) Ici et plus bas, on entend par coordonnées d'un point les coordonnées de ce point prises par rapport au pentasphère P.

α désignant une solution quelconque du système (1), posons

$$(3)\qquad x_1=\frac{\dfrac{\partial\alpha}{\partial u_1}}{H_1},\quad x_2=\frac{\dfrac{\partial\alpha}{\partial u_2}}{H_2},\quad x_3=\frac{\dfrac{\partial\alpha}{\partial u_3}}{H_3},\quad x_4+ix_5=\alpha,\quad x_4-ix_5=\theta,$$

θ étant défini par l'égalité

$$\left(\frac{\dfrac{\partial\alpha}{\partial u_1}}{H_1}\right)^2+\left(\frac{\dfrac{\partial\alpha}{\partial u_2}}{H_2}\right)^2+\left(\frac{\dfrac{\partial\alpha}{\partial u_3}}{H_3}\right)^2+\alpha\theta=0.$$

Le point M_2 dont les coordonnées sont $x_1, x_2, \ldots, x_5$ décrit un système triple orthogonal (M_2) qui correspond au système (M_0) dans la transformation de Ribaucour la plus générale.

On peut définir pareillement les systèmes triples orthogonaux qui correspondent au système (M_1) dans des transformations de Ribaucour.

Un tel système, que nous désignerons par (M_3), est décrit par un point M_3 dont les coordonnées $x'_1, x'_2, \ldots, x'_5$ sont données par les égalités

$$(4)\qquad x'_1=\frac{\dfrac{\partial\alpha'}{\partial u_1}}{H'_1},\quad x'_2=\frac{\dfrac{\partial\alpha'}{\partial u_2}}{H'_2},\quad x'_3=\frac{\dfrac{\partial\alpha'}{\partial u_3}}{H'_3},\quad x'_4-ix'_5=\alpha',\quad x'_4+ix'_5=\theta'.$$

α' est une solution quelconque du système (2) et θ' est définie par l'égalité

$$\left(\frac{\dfrac{\partial\alpha'}{\partial u_1}}{H'_1}\right)^2+\left(\frac{\dfrac{\partial\alpha'}{\partial u_2}}{H'_2}\right)^2+\left(\frac{\dfrac{\partial\alpha'}{\partial u_3}}{H'_3}\right)^2+\alpha'\theta'=0.$$

Le système (M_2) étant choisi, prenons pour (M_3) le système correspondant à la fonction α' qui satisfait aux relations

$$(5)\qquad \frac{\dfrac{\partial\alpha'}{\partial u_1}}{H'_1}=\frac{\dfrac{\partial\alpha}{\partial u_1}}{H_1},\qquad \frac{\dfrac{\partial\alpha'}{\partial u_2}}{H'_2}=\frac{\dfrac{\partial\alpha}{\partial u_2}}{H_2},\qquad \frac{\dfrac{\partial\alpha'}{\partial u_3}}{H'_3}=\frac{\dfrac{\partial\alpha}{\partial u_3}}{H_3}.$$

Cette fonction existe, car, si l'on écrit les conditions d'intégrabilité pour α', on obtient le système (1); et elle vérifie le système (2), car, si l'on écrit les conditions d'intégrabilité pour α, on obtient ledit système.

En vertu des égalités (3), (4), (5), on a

$$x'_1 = x_1, \qquad x'_2 = x_2, \qquad x'_3 = x_3.$$

Par suite, les points M_0, M_1, M_2, M_3 sont concycliques. Il suffit à présent d'appliquer un théorème de géométrie que nous avons énoncé ailleurs (*) pour reconnaître que les systèmes (M_2) et (M_3) se correspondent dans une transformation de Ribaucour. Comme α' n'est définie qu'à une constante additive près, on peut énoncer une partie du théorème C : Si deux systèmes orthogonaux (M_1), (M_2) correspondent à un système orthogonal (M_0) dans des transformations de Ribaucour, il y a une infinité simple de systèmes orthogonaux (M_3) qui correspondent aux systèmes (M_1) et (M_2) dans des transformations de Ribaucour. Les points M_3 qui décrivent les systèmes (M_3) sont distribués sur le cercle Γ qui passe par les points générateurs M_0, M_1, M_2 des systèmes (M_0), (M_1), (M_2).

Désignons par (M_3) celui des systèmes (M_3) qui correspond à une valeur arbitraire mais déterminée α'_0 de α', et par (M) le système (M_3) qui correspond à la valeur $\alpha'_0 + w'$ de α'; la variation du paramètre w' donnera tous les systèmes (M_3). Le rapport anharmonique des points M_2, M, M_0, M_1 a pour valeur $\frac{\alpha'_0 + w'}{\theta}$. Par suite : 1° le rapport anharmonique de quatre points M est constant; 2° si w' tend vers l'infini, M tend vers M_0.

Les systèmes (M_0) et (M_3) correspondent à (M_1) dans des transformations de Ribaucour; donc, d'après un résultat établi plus haut, il existe une infinité simple de systèmes orthogonaux qui correspondent à (M_0) et à (M_3) dans des transformations de

---

(*) *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris,* séance du 3 janvier 1910.

Ribaucour. Un quelconque (M′) de ces systèmes est décrit par le point M′ dont les coordonnées $y_1, y_2, \ldots, y_5$ sont données par les égalités

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = x_3, \quad y_4 + iy_5 = \alpha + w, \quad y_4 - iy_5 = \theta''.$$

w désigne un paramètre arbitraire et θ'' est définie par l'égalité

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + (\alpha + w)\theta'' = 0.$$

Si w est nul, M′ est en M_2; si w tend vers l'infini, M′ tend vers M_1.

Le cercle Γ porte donc deux séries simplement infinies de points décrivant des systèmes orthogonaux dont les familles de Lamé ont u_1, u_2, u_3 pour paramètres : les points M et les points M′. Deux systèmes décrits par des points appartenant à deux séries différentes se correspondent dans une transformation de Ribaucour. On le démontre en s'appuyant sur le théorème de géométrie invoqué plus haut.

Le théorème C est à présent complètement démontré.

6. Lorsque $u_i =$ const. ($i = 1, 2, 3$), le cercle Γ engendre un système K (*). Cette remarque conduit à un grand nombre de propriétés de la figure considérée ici. Celles-ci peuvent être généralisées. Soit Γ une conique dépendant de trois paramètres. Nous dirons qu'elle engendre un complexe Θ si elle porte une infinité simple de points M et une infinité simple de points M′ donnant lieu aux propriétés suivantes. u_1, u_2, u_3 désignant des paramètres convenablement choisis : 1° les points M et les points M′ décrivent des systèmes à lignes conjuguées, les paramètres des familles de surfaces qui composent chacun d'eux étant u_1, u_2, u_3; 2° les tangentes aux lignes (M_{u_i}) et les tangentes

---

(*) Pour ce qui concerne les systèmes K, le lecteur pourra consulter les deux notes des *Comptes rendus* citées dans le n° 4, notre note du 7 février 1910, insérée dans le même recueil, et le travail cité dans la troisième des notes du n° 10.

aux lignes (M'_{u_i}) $(i = 1, 2, 3)$ sont les génératrices de deux demi-quadriques complémentaires. Il est clair que le complexe des cercles Γ est un complexe Θ particulier. Si $u_i = \text{const.}$ $(i = 1, 2, 3)$, la conique Γ engendre un des systèmes que nous avons étudiés dans notre note *Sur les systèmes* Θ *et sur les systèmes* R (ce *Bulletin,* séance du 1$^{\text{er}}$ mars 1919). De là résultent de nombreuses propriétés des complexes Θ. Parmi ces propriétés, nous n'indiquerons ici que la suivante. Soient u_1, u_2, u_3 les paramètres des familles de surfaces qui composent un système à lignes conjuguées décrit par un point P. Si u_k varie seul, la tangente à la ligne (P_{u_i}) $(i, k = 1, 2, 3;\ i \neq k)$ a une enveloppe qu'elle touche en un point que nous désignerons par P_{ik}. Cela posé, les points M_{ik} et les points M'_{ik} $(i, k = 1, 2, 3;\ i \neq k)$ sont distribués sur une conique Γ_{ik} et celle-ci engendre un complexe Θ. Par suite, de tout complexe Θ, on peut déduire six complexes de même nature.

7. Voici une application du théorème B à la théorie des surfaces à lignes de courbure sphériques dans un système. Désignons par (M_1) une telle surface, par (M_0) un des périsphères qui lui correspondent dans des transformations R (*), et par (M_2) un des périsphères qui correspondent à (M_0) dans des transformations R; ces périsphères dépendent d'une fonction arbitraire. Il y a une infinité simple de surfaces (M) qui correspondent à (M_1) et à (M_2) dans des transformations R. (M_2) étant un périsphère, les surfaces (M) ont leurs lignes de courbure sphériques dans un système. On peut donc énoncer le théorème suivant : Une surface à lignes de courbure sphériques dans un système étant donnée, il y a une surface de même nature (dépendant d'une fonction arbitraire et de constantes arbitraires) qui lui correspond dans une transformation R.

(*) Nous nous appuyons ici et plus bas sur des résultats que nous avons établis dans le travail cité dans la première des notes du n° 4.

Soient respectivement M_0, M_1, M_2, M des points correspondants des surfaces (M_0), (M_1), (M_2), (M). Les points M sont distribués sur le cercle Γ passant par M_0, M_1, M_2. Ce cercle porte une seconde infinité simple de points M' décrivant des surfaces (M') qui correspondent aux surfaces (M) dans des transformations R. Or, une des surfaces (M) est le périsphère (M_0) ; donc les surfaces (M') ont leurs lignes de courbure sphériques dans un système.

On peut, en se servant du théorème C, établir, à l'égard des systèmes orthogonaux à lignes de courbure sphériques dans un système, des propriétés analogues aux précédentes.

8. Supposons que deux courbes (m), (m') se correspondent point par point et désignons par m, m' deux points correspondants. Nous dirons qu'elles se correspondent dans une *transformation* G si les plans osculateurs des courbes (m), (m') aux points m, m' passent respectivement par les points m', m. Les courbes (m), (m') sont évidemment des asymptotiques de la surface réglée, lieu de la droite mm'. Si l'on fait usage de la transformation de Lie L, qui change les droites en sphères, à cette surface correspondra un périsphère et aux lignes (m), (m') correspondront des lignes de courbure (M), (M') de ce périsphère. Les lignes (M), (M') se correspondent visiblement dans une transformation R. Tout couple de courbes (M), (M') se correspondant dans une transformation R peut être obtenu de cette manière, car ces courbes appartiennent à une infinité simple de périsphères dont elles sont lignes de courbure. Soient M, M' deux points correspondants des lignes (M), (M'). Par définition, il y a un cercle C tangent à ces lignes aux points M, M'. Faisons passer par ce cercle une sphère Σ de centre O. Cette sphère enveloppera un quelconque P des périsphères en question si on la choisit de manière que la droite MO engendre une développable. En effet, la caractéristique Γ de Σ passe par les points M, M' ; par suite, les lignes (M), (M') sont tracées sur P. (M) est une ligne de courbure de P, car MO engendre une normalie développable. (M_1) est aussi une ligne de courbure de P, car elle est orthogonale aux différentes positions de Γ ; en effet, elle touche en M' le cercle C et celui-ci est orthogonal à Γ en ce point, attendu qu'il coupe orthogonalement le cercle Γ en M.

9. Supposons que n courbes (M_1), (M_2), ..., (M_n) correspondent à une courbe (M_0) dans des transformations R. Soient M_1, M_2, ..., M_n, M_0 des points correspondants de ces courbes et C_i le cercle tangent aux courbes (M_0) et (M_i) $(i = 1, 2, \ldots, n)$ aux points M_0 et M_i. Menons, par le point M_0, une normale M_0N_0 telle qu'elle engendre une développable lorsque M_0 varie. D'après ce qu'on vient de voir, la sphère qui passe par C_i et dont le centre est sur M_0N_0 engendre un périsphère P_i admettant (M_0) et (M_i) comme lignes de courbure. Il est clair que les n périsphères P_1, P_2, ..., P_n se touchent deux à deux tout le long de (M_0). Par suite, si l'on fait usage de la transformation L^{-1}, inverse de L, les lignes (m_1), (m_2), ..., (m_n), transformées des lignes (M_1), (M_2), ..., (M_n), correspondront, dans des transformations G, à la ligne (m_0), transformée de (M_0).

10. On doit à M. Bianchi (*) le théorème suivant : Si deux courbes (m_1), (m_2) correspondent à une courbe (m_0) dans des transformations G, il y a une infinité simple de courbes (m) qui correspondent aux courbes (m_1), (m_2) dans des transformations G. Désignons respectivement par m_0, m_1, m_2, m des points correspondants des courbes (m_0), (m_1), (m_2), (m). Les points m sont évidemment distribués sur la droite d d'intersection des plans osculateurs des courbes (m_1), (m_2) et les plans osculateurs des courbes (m) passent par la droite m_1m_2 ou d'.

(*) Bianchi, *Sulla configurazioni mobile di Möbius nelle transformazioni asintotiche delle curve et delle superficie.* (Rendiconti de Palerme, 1908.)

Soit (m_3) une quelconque des courbes (m). Les courbes (m_0) et (m_3) correspondent à (m_2) dans des transformations G; donc, en vertu du théorème de M. Bianchi, il y a une infinité simple de courbes (m') qui correspondent aux courbes (m_0) et (m_3) dans des transformations G. Les points générateurs m' des courbes (m') sont distribués sur la droite d' et les plans osculateurs de ces courbes passent par d. Il est clair qu'une quelconque des courbes (m) et une quelconque des courbes (m') se correspondent dans une transformation G. Ce complément au théorème de M. Bianchi, que nous avions établi, en 1909, par la méthode précédente, mais qui était resté inédit, a été signalé, en 1913, par M. Tortorici (*) qui l'a démontré par l'analyse. Ajoutons les propriétés suivantes : Les tangentes aux courbes $(m$, aux points m, et les tangentes aux courbes (m'), aux points m', engendrent la même demi-quadrique. Les surfaces engendrées par les droites d et d' constituent le couple le plus général de surfaces réglées qui se correspondent dans une transformation G (**), la correspondance entre les deux surfaces ayant lieu avec conservation des génératrices rectilignes.

11. Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème A. Supposons que deux courbes (M_1), (M_2) correspondent, dans des transformations R, à une courbe (M_0). En vertu du résultat établi au n° 9, au moyen de la transformation L^{-1}, on peut faire correspondre aux courbes (M_1), (M_2), $M_0)$ des courbes (m_1), (m_2), (m_0) telles que les deux premières correspondent à la dernière dans des transformations G. Les développements du n° 10 permettent de joindre à ces courbes ∞^1 courbes (m) et ∞^1 courbes (m'). Pour établir le théorème A,

---

(*) Tortorici, *Sulle deformazioni infinitesime delle superficie et sul teorema di permutabilità.* (Rendiconti de Palerme, 1913.)

(**) Pour la définition des transformations G des surfaces, voir notre note *Sur la transformation de Guichard et sur les systèmes* K (ce Bulletin, séance du 8 février 1919).

il suffit d'appliquer la transformation L à la figure ainsi obtenue et de faire usage de propriétés de ladite transformation que nous avons fait connaître au n° 8 du travail cité dans la troisième des notes du n° 10.

12. Les transformations G des courbes et celles des surfaces jouissent de propriétés remarquables dues à M. Bianchi (*loc. cit.*). Nous les énoncerons, en abrégé, comme il suit (le mot figure désignant une courbe ou une surface) :

Si n *figures* $(\mathrm{m}_1), (\mathrm{m}_2), \ldots, (\mathrm{m}_\mathrm{n})$ *correspondent à une figure* (m_0) *dans des transformations* G, *on peut joindre aux* $\mathrm{n}+1$ *figures* $(\mathrm{m}_0), (\mathrm{m}_1), (\mathrm{m}_2), \ldots, (\mathrm{m}_\mathrm{n})$, $2^\mathrm{n}-\mathrm{n}-1$ *figures de manière à obtenir un système de* 2^n *figures jouissant de la propriété suivante : une quelconque des figures du système correspond, dans des transformations* G, *à* n *figures de ce système.*

Nous désignerons par les lettres D et E les deux théorèmes que comporte cet énoncé, le théorème D concernant les courbes et le théorème E, les surfaces.

13. *Si* n *figures* $(\mathrm{M}_1), (\mathrm{M}_2), \ldots, (\mathrm{M}_\mathrm{n})$ *correspondent à une figure* (M_0) *dans des transformations* R, *on peut joindre aux* $\mathrm{n}+1$ *figures* $(\mathrm{M}_0), (\mathrm{M}_1), (\mathrm{M}_2), \ldots, (\mathrm{M}_\mathrm{n})$, $2^\mathrm{n}-\mathrm{n}-1$ *figures de manière à obtenir un système de* 2^n *figures jouissant de la propriété suivante : une quelconque des figures du système correspond, dans des transformations* R, *à* n *figures de ce système.*

Cet énoncé comporte trois théorèmes, à condition d'y remplacer le mot figure par courbe, surface ou système orthogonal. Nous les désignerons par les lettres F, G, H : le théorème F concernant les courbes, le théorème G, les surfaces, et le théorème H, les systèmes orthogonaux.

14. Établissons d'abord le théorème F. Par hypothèse, n courbes $(\mathrm{M}_1), (\mathrm{M}_2), \ldots, (\mathrm{M}_n)$ correspondent à une courbe (M_0) dans des transformations R. La transformation L^{-1} permet de faire correspondre à ces courbes des courbes $(m_1), (m_2), \ldots, (m_n)$, (m_0) telles que les n premières correspondent à la dernière dans des transformations G (nº 9). En vertu du théorème D, on peut joindre aux $n+1$ courbes (m_0), (m_1), (m_2), ..., (m_n), $2^n - n - 1$ courbes de manière à obtenir un système de 2^n courbes jouissant de la propriété suivante : une quelconque des courbes du système correspond, dans des transformations G, à n courbes de ce système. On déduit de là le théorème F en faisant usage de la transformation L (nº 8).

15. Démontrons le théorème H dans le cas où $n = 3$. Soit (M_0) un système orthogonal quelconque. Désignons par u_1, u_2, u_3 les paramètres des trois familles de surfaces qui le composent. Supposons que trois systèmes orthogonaux (M_1), (M_2), (M_3) correspondent à ce système dans des transformations R. Soient (M_4), (M_5), (M_6) trois systèmes orthogonaux correspondant, dans des transformations R, respectivement aux systèmes (M_2) et (M_3), (M_3) et (M_1), (M_1) et (M_2). En vertu du théorème C, de tels systèmes existent et chacun d'eux dépend d'une constante arbitraire. Il s'agit de démontrer qu'il y a un système orthogonal qui correspond, dans des transformations R, aux systèmes (M_4), (M_5), (M_6). En vertu du théorème F, on peut adjoindre aux courbes (M_{0u_s}), (M_{1u_s}), ..., (M_{6u_s}) $(s = 1, 2, 3)$ une huitième courbe (P_s) qui correspond aux courbes (M_{4u_s}), (M_{5u_s}), (M_{6u_s}) dans des transformations R. Les points P_1, P_2, P_3 sont confondus, car ils coïncident avec le point M_7 commun aux cercles $M_4M_5M_6$, $M_2M_6M_4$, $M_3M_4M_5$. Or, on le démontre aisément, les courbes (M_{7u_1}), (M_{7u_2}), (M_{7u_3}) sont deux à deux orthogonales ; par suite, le système triple (u_1, u_2, u_3) décrit par lepoint M_7 est orthogonal et ce système correspond visiblement aux systèmes (M_4), (M_5), (M_6) dans des transformations R. Le théorème H est donc établi pour $n = 3$.

En partant de là, nous allons établir le théorème H pour $n = 4$. Supposons que quatre systèmes orthogonaux (M_1), (M_2),

(M_3), (M_4) correspondent au système (M_0) dans des transformatiens R. Désignons par (M_{ij}) ou (M_{ji}) $(i, j = 1, 2, 3, 4$; $i \neq j)$ (*) un système orthogonal qui correspond aux systèmes (M_i), (M_j) dans des transformations R. En vertu du théorème H pour $n = 3$, on peut adjoindre aux systèmes (M_0), (M_1), (M_2), (M_3), (M_{12}), (M_{23}), (M_{31}) un huitième système orthogonal (M_{123}) qui correspond aux trois derniers dans des transformations R. On peut, de même, adjoindre aux systèmes (M_0), (M_i), (M_j), (M_4), (M_{ij}), (M_{i4}), (M_{j4}) $(i, j = 1, 2, 3$; $i \neq j)$ un système orthogonal (M_{ij4}) qui correspond aux trois derniers dans des transformations R. On obtient ainsi quatre systèmes orthogonaux (M_{123}), (M_{124}), (M_{234}), (M_{314}). Chacun d'eux correspond, dans des transformations R, à trois des systèmes (M_{ij}) $(i, j = 1, 2, 3, 4$; $i \neq j)$. Nous allons démontrer que ces quatre systèmes correspondent, dans des transformations R, à un même système orthogonal. En vertu du théorème F, on peut adjoindre aux quinze courbes (M_{0u_s}), (M_{iu_s}), (M_{iju_s}), (M_{ijku_s}) $(i, j, k = 1, 2, 3, 4$; $i \neq j \neq k$; $s = 1, 2, 3)$ une seizième courbe (P_s) qui correspond aux courbes (M_{ijku_s}) dans des transformations R. Les points P_1, P_2, P_3 sont confondus, car ils coïncident avec le point M_{1234} commun aux six cercles $M_{ij}M_{ijk}M_{ijl}$ $(i, j, k, l = 1, 2, 3, 4$; $i \neq j \neq k \neq l)$. Les courbes (M_{1234u_1}), (M_{1234u_2}), (M_{1234u_3}) sont deux à deux orthogonales, donc le système triple (u_1, u_2, u_3) décrit par le point M_{1234} est orthogonal et ce système correspond évidemment aux systèmes (M_{ijk}) dans des transformations R. Le théorème H est donc démontré pour $n = 4$. Par un raisonnement tout semblable à celui que nous venons

---

(*) D'une manière générale, lorsque nous serons conduit à désigner un système orthogonal par la notation $(M_{\alpha_1 \dots \alpha_k})$, nous le désignerons aussi par $(M_{\beta_1 \dots \beta_k})$, $\beta_1 \dots \beta_k$ désignant une permutation quelconque des lettres $\alpha_1, \dots, \alpha_k$.

d'exposer, on établira que s'il est vrai pour p valeurs consécutives de n ($p = 2, 3, \ldots$), à partir de $n = 3$, il est vrai pour $n = p + 3$. Le théorème H est donc vrai pour toutes les valeurs de n.

16. On pourra établir le théorème G, soit par une méthode identique à celle du n° 15, soit en le déduisant du théorème E au moyen de la transformation L.

Bruxelles, octobre 1918.

Physique. — **Les différences de potentiel anodique et cathodique dans le transport de l'électricité par un électrolyte,**

par J.-E. VERSCHAFFELT, membre de la Classe.

1. En lisant ce qu'ont écrit à ce sujet les divers auteurs qui se sont occupés de cette question (*), j'ai été étonné de voir avec quelle facilité ces auteurs ont commis ou répété des erreurs de raisonnement même grossières (**) et fait des hypothèses contradictoires avec les principes fondamentaux de l'électricité (***). Je ne discuterai pas leurs façons manifestement fausses de traiter le problème.

Sans vouloir expliquer dans tous ses détails le phénomène compliqué de l'électrolyse, dont je suis d'ailleurs loin de connaître toutes les particularités, je me propose simplement de montrer, en considérant les cas les plus simples, comment il faut, à mon avis, résoudre logiquement la question, sans qu'il soit nécessaire de faire des hypothèses accessoires, — sans même qu'on puisse en faire, le problème étant complètement défini, — en partant de l'hypothèse de la « tension de dissolution ». Je

---

(*) Voyez par exemple A.-H.-W. Aten : Over enkele bijzondere gevallen van stroomspanningslijnen. (*Versl. Kon. Akad. v. Wetensch.* Amsterdam, 25, 325, 1916.)

(**) Ainsi par exemple dans le travail précité on lit : « Le mouvement des ions métalliques avec le courant peut être pratiquement exclu par l'addition d'un excès d'un second électrolyte. Dans ce cas la *conduction* a lieu principalement par les ions de l'électrolyte ajouté et l'on n'a qu'à tenir compte de la *diffusion* de l'ion qui se décharge. » L'auteur calcule alors la quantité d'ions qui diffuse par seconde à travers 1 cm^2 et dit : « La même quantité d'ions doit se décharger par seconde sur 1 cm^2 de surface de la cathode. La charge de ces ions est donc égale à la densité de courant. » L'inconséquence est flagrante.

(***) Telle par exemple l'hypothèse que dans la couche voisine des électrodes la chute de concentration des ions est uniforme (voyez § 6).

n'ai pas non plus l'intention, pour le moment, de défendre cette hypothèse ou de la combattre : je désire uniquement en déduire des conséquences que je crois être nécessaires ; elle me paraît être suffisamment intéressante et importante pour cela.

Pour expliquer l'établissement d'une différence de potentiel entre une lame d'un métal et une solution aqueuse d'un sel de ce métal, on admet, comme on sait, que le métal est en équilibre avec une certaine concentration C des cations (nous admettrons que le métal n'en forme que d'une seule espèce). Cela n'exige pas que dans la solution où le métal est plongé la concentration c_0 des cations ait cette valeur pour qu'il y ait équilibre ; cette solution peut avoir une concentration c_0 quelconque (*), car il n'est pas nécessaire que la concentration c des cations soit la même partout, parce que le champ électrique qui existe à un endroit où il y a un gradient de concentration de ces ions peut s'opposer à la diffusion qui résulterait de ce gradient. Aussi la concentration C n'est-elle réalisée qu'au voisinage immédiat du métal ; partout ailleurs la concentration c est différente et varie très rapidement, mais continûment, de C à c_0, dans une couche qui pratiquement est très mince, mais est théoriquement indéfinie, l'approche de c_0 ayant lieu asymptotiquement (**).

(*) Si $c_0 > C$, la solution est à proprement parler sursaturée de cations, mais il n'y a là rien d'inadmissible, comme on le conçoit, la sursaturation n'étant impossible qu'au contact du métal.

(**) Il semble assez logique de supposer que du côté du métal aussi la concentration tend asymptotiquement à la valeur limite C ; cela reviendrait à attribuer à C la signification d'une concentration que les cations auraient dans le métal même. Dans ce même ordre d'idées, il semble également logique de supposer que la charge de ces cations *libres* dans le métal est neutralisée par celle des électrons libres, dont le nombre N par unité de volume serait ainsi déterminé par la relation $Ne = C\varepsilon$, e étant la charge d'un électron, ε celle des cations par unité de concentration. Or, d'après la théorie des électrons, la différence de potentiel au contact de deux métaux I et II est proportionnelle à $\log N_I - \log N_{II}$; elle devrait donc être proportionnelle aussi à $\log C_I - \log C_{II}$. Si tel est le cas, il doit y avoir une grande

2. Dans la région où la concentration des cations change de point en point, le potentiel V change aussi, d'une façon continue et rapide, de V_1, la valeur qu'il a dans le métal, à V_0, le potentiel de la solution à une distance mesurable de la lame. Il est aisé de trouver la relation entre le potentiel et la concentration en chaque point, c'est-à-dire dans chaque tranche de la couche de passage du métal à la solution ; car, vu la faible épaisseur (pratique) de cette couche vis-à-vis de l'étendue de la plaque de métal, le problème est à une seule dimension : le potentiel V et la concentration c ne dépendent que de x, la distance de la tranche considérée à la surface de la lame.

En exprimant que la force électrique s'oppose à la diffusion des cations, on trouve, du moins dans le cas où la concentration (que nous exprimerons en équivalents-grammes) reste très faible :

$$\frac{dV}{dx} = -\frac{RT}{n\varepsilon}\frac{d\log c}{dx}, \tag{1}$$

ε étant la charge des cations par équivalent-gramme, n la valence de ces ions. Il s'ensuit qu'en chaque point le potentiel est lié à la concentration des cations par la relation

$$V - V_0 = \frac{RT}{n\varepsilon}\log\frac{c_0}{c}, \tag{2}$$

---

analogie entre la série des métaux classés d'après leur électrisation de contact mutuel (série de Volta) et celle des métaux classés d'après leur électrisation au contact d'une solution d'un de leurs sels ; or cette analogie paraît exister réellement.

De plus, il faut alors qu'un métal ayant un N, donc un C élevé. se charge positivement (par diffusion des électrons) par rapport à un autre ayant un N ou un C plus bas, alors qu'au contact d'une solution il doit (par diffusion des cations) prendre, au contraire, un potentiel plus bas que l'autre. Les deux séries doivent donc être inverses, et il semble, en effet, que tel soit le cas.

et entre le métal et la solution il existe une différence de potentiel

$$\Phi = V_1 - V_0 = \frac{RT}{n\varepsilon} \log \frac{c_0}{C} = \frac{RT}{n\varepsilon} \log c_0 - \varphi, \tag{3}$$

où

$$\varphi = \frac{RT}{n\varepsilon} \log C \tag{3'}$$

est la différence de potentiel qui s'établit entre une solution de concentration 1 et le métal (*).

3. Considérons maintenant l'anion. Au sein de la solution, la concentration c' de l'anion est équivalente à celle du cation; si les concentrations sont exprimées en équivalents-grammes, on a donc

$$c'_0 = c_0. \tag{4}$$

Mais, dans la couche de transition, où règne un champ électrique, l'égalité des concentrations n'existe plus : à cause de l'action antagoniste du champ électrique, le gradient de concentration des anions doit être opposé à celui des cations. D'ailleurs, l'équation d'équilibre des anions est de même forme que celle pour les cations; on a, en effet :

$$\frac{dV}{dx} = \frac{RT}{n'\varepsilon} \frac{d \log c'}{dx}, \tag{5}$$

(*) Le métal est dit positif ou négatif suivant que φ est positif (exemple : zinc, fer) ou négatif (exemple : cuivre, platine).

On a reproché à cette théorie osmotique des différences de potentiel de contact de conduire pour les métaux positifs à des valeurs de C inadmissibles. Le reproche n'atteint toutefois que le développement mathématique de la théorie, dans lequel on applique les lois des solutions diluées.

La théorie mathématique suppose en effet que toutes les concentrations C, c, c_0 soient très faibles; son domaine d'applicabilité pratique est donc très restreint; il se peut toutefois que, même dans le cas de concentrations élevées, elle donne encore des indications qualitativement exactes.

n' étant la valence des anions, de sorte que

$$V - V_0 = -\frac{RT}{n'\varepsilon}\log\frac{c'_0}{c'} = -\frac{RT}{n'\varepsilon}\log\frac{c_0}{c'} \tag{6}$$

et

$$\Phi = V_1 - V_0 = -\frac{RT}{n'\varepsilon}\log\frac{c_0}{c'_1}, \tag{7}$$

c'_1 étant la concentration des anions tout contre la lame métallique.

D'après les formules (2) et (6), il existe donc en tout point entre les concentrations c et c' des cations et des anions la relation suivante :

$$c^{\frac{1}{n}} . c'^{\frac{1}{n'}} = c_0^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n'}} \tag{8}$$

et la concentration c'_1 des anions sur la lame est déterminée par

$$C^{\frac{1}{n}} . c_1'^{\frac{1}{n'}} = c_0^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n'}}. \tag{9}$$

On voit que c'_1 augmente avec c_0; lorsque la solution devient saturée (par rapport au sel, $c_0 = c_s$), c'_1 atteint une valeur c'_s. On admet d'ailleurs que pour les anions aussi il y a une concentration d'équilibre C' (comme C fonction de la pression et de la température), donc un potentiel $\varphi' = -\frac{RT}{n'\varepsilon}\log C'$ entre une solution de concentration 1 et une lame sur laquelle se déposent des anions (électrode à anions); cette concentration C' correspond à une concentration maximum $c_0 = c_m$ telle que

$$C^{\frac{1}{n}} . C'^{\frac{1}{n'}} = c_m^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n'}} \tag{10}$$

ou

$$\frac{RT}{\varepsilon}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n'}\right)\log c_m = \varphi - \varphi'. \text{ (*)} \tag{11}$$

(*) Si c_s était plus grand que c_m, il faudrait donc qu'en plongeant une lame du métal dans la solution saturée de sel des anions se précipitent, ce qui entraînerait

4. Bien que la solution soit portée au potentiel V_0 par le contact avec le métal, elle est électriquement neutre (comme le métal d'ailleurs), c'est-à-dire que la densité cubique ρ de la charge électrique y est partout nulle. Les charges ne se trouvent qu'à la surface de contact, où il y a une couche double électrique. Dans la couche de transition entre le métal et la solution, la densité cubique de la charge est

$$\rho = (c - c')\varepsilon, \qquad (12)$$

et, comme en vertu du théorème de Poisson

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{4\pi}{K}\rho, \qquad (13)$$

K étant la constante diélectrique de la solution (*), on a en tout point :

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{4\pi}{K}(c - c')\varepsilon. \quad (**) \qquad (13')$$

évidemment la précipitation d'une quantité équivalente de métal et la concentration s'abaisserait à c_m.

On a constaté toutefois que φ' a toujours une valeur négative relativement élevée, de sorte que la condition $c_m < c_s$, c'est-à-dire c_m relativement petit, ne saurait être réalisée que dans les cas où φ aussi a une valeur négative élevée (métaux fortement négatifs, comme le platine); mais il semble que même dans ces cas-là le phénomène du dépôt d'anions ne se présente pas. Il semble, par contre, que le phénomène puisse se présenter avec des solutions mixtes de sels de plusieurs métaux; il se présente, en particulier, dans l'électrolyse (voir § 22).

(*) En supposant, bien entendu, que K reste constant, ce qui est admissible, puisque les solutions sont supposées très diluées; K est donc la constante diélectrique du solvant.

(**) La charge de la solution dans le voisinage de la lame métallique induit dans cette lame une charge égale et contraire, produisant un champ dans le voisinage de la lame et attirant la charge de la solution. On peut encore interpréter cela comme suit : chaque ion placé dans le voisinage de la lame, en influençant cette lame y développe une charge dont l'effet équivaut à celui d'un ion complémentaire situé dans la lame (image électrique); toutes ces images forment une charge égale

Les équations (1), (5) et (13′), jointes aux conditions limites $c = C$ pour $x = 0$ et $c = c_0$ pour $x = \infty$, font connaître c, c' et V comme fonctions de x; l'un des potentiels V_0 ou V_1 est arbitraire.

5. Si l'on plonge dans la solution une seconde plaque du même métal, toutes les considérations précédentes s'appliquent encore à cette seconde plaque, qui présente vis-à-vis de la solution la même différence de potentiel Φ que la première; entre les deux lames il n'y a donc pas de différence de potentiel. Ce n'est que dans le cas où la seconde lame métallique se trouverait dans un état différent de la première (*) qu'elle pourrait offrir, dans les mêmes conditions de température et de pression, une autre solubilité C des cations (autre potentiel φ), et alors il s'établirait entre les deux lames une différence de potentiel

$$V_1 - V_2 = \Phi_1 - \Phi_2 = \frac{RT}{n\varepsilon} \log \frac{C_2}{C_1} = \varphi_2 - \varphi_1, \qquad (14)$$

ainsi que cela a été constaté effectivement.

---

et contraire à celle de la solution et qui est précisément la charge réelle de la lame. La densité superficielle de cette charge est

$$\sigma = \varepsilon \int_0^\infty (c - c')\, dx$$

et, comme l'intensité du champ produit par cette charge est

$$h = \frac{4\pi}{K} \sigma,$$

on voit qu'à la surface de la lame

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)_1 = - h = - \frac{4\pi}{K} \int_\sigma^\infty (c - c')\, dx,$$

ce qui est d'accord avec l'équation (13′).

(*) Par un travail mécanique, par exemple, ou dans un autre état allotropique (phénomènes de passivité).

6. Mais supposons qu'entre les deux lames on établisse artificiellement une différence de potentiel

$$E = V_1 - V_2; \tag{15}$$

que va-t-il arriver? Évidemment, les différences de potentiel Φ_1 et Φ_2 ($\Phi_1 = \Phi_2$) n'ayant pas changé, les parties de la solution voisines des électrodes vont être portées à des potentiels différents V_{01} et V_{02} tels que

$$V_{01} - V_{02} = E. \tag{15'}$$

Sous l'influence du champ d'intensité $\frac{E}{l}$, l étant la distance des électrodes, que nous supposerons parallèles, de même surface s et très grandes par rapport à leur distance, les ions sont mis en mouvement et il se produit un courant électrique.

Si δ est la densité du courant des cations, on a en général, en représentant par u la mobilité des cations :

$$\delta = cu\varepsilon \left[-\frac{dV}{dx} - \frac{RT}{n\varepsilon} \frac{d \log c}{dx} \right]; \tag{16}$$

on a de même pour les anions

$$\delta' = c'u'\varepsilon \left[-\frac{dV}{dx} + \frac{RT}{n'\varepsilon} \frac{d \log c'}{dx} \right] \tag{16'}$$

et la densité totale du courant est

$$\Delta = \delta + \delta' \quad (^*). \tag{17}$$

7. Au début du phénomène, on a dans la solution $c = c' = c_0$ et $\frac{dV}{dx} = \frac{E}{l}$, de sorte que dans la solution

$$\Delta = c_0\varepsilon(u + u') \frac{E}{l}. \tag{18}$$

(*) Ici encore, du moment que E et les conditions limites sont données, le problème est complètement déterminé et il n'est plus permis de faire sur la chute de concentration des ions des hypothèses particulières, comme certains auteurs l'ont fait. On verra d'ailleurs que ce n'est pas necessaire.

ce qui est conforme aux lois d'Ohm et peut s'écrire :

$$\Delta = \gamma \frac{E}{l}, \tag{18'}$$

où γ est la conductivité de l'électrolyte, de sorte que

$$\gamma = c_0 \varepsilon (u + u'), \tag{18''}$$

conformément à une formule connue.

8. Mais cela ne dure guère. Les anions ne se précipitent pas, ils s'accumulent à l'anode ; il ne s'en forme pas de nouveaux, de sorte qu'ils se raréfient à la cathode (la solution est supposée tout à fait ionisée, de sorte que les ions ne sont pas régénérés). Au bout d'un temps plus ou moins long, il s'établit un état stationnaire, dans lequel les anions prennent une nouvelle distribution d'équilibre, où la concentration c diminue dans le liquide, de l'anode à la cathode, de c'_{01} à c'_{02}. En même temps le potentiel V_{01} s'élève, le potentiel V_{02} s'abaisse et l'on a, en vertu de (5) — ou encore de (16'), où l'on fait $\delta' = 0$ —

$$V_{01} - V_{02} = \frac{RT}{n'\varepsilon} \log \frac{c'_{01}}{c'_{02}} \tag{19}$$

Quant aux cations, du fait que le champ tend à les déplacer de l'anode vers la cathode il résulterait qu'ils se raréfient au premier endroit pour s'accumuler au second, mais, comme la concentration C aux électrodes ne peut pas changer, il faut qu'à l'anode le métal se dissolve et qu'il se précipite à la cathode. Il s'établit donc un transport de cations, qui seul détermine le courant électrique d'intensité $i = \delta s$.

De nouveau nous pouvons écrire que dans la solution $c = c'$, de sorte que (16) et (16′) donnent, avec $\delta' = 0$ et $\delta = \frac{i}{s}$,

$$\frac{dc}{dx} = -\frac{i}{\mathrm{RT}us\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'}\right)}, \tag{20}$$

d'où, en posant pour simplifier $\frac{dc}{dx} = -kc_0$,

$$c = c_0(1 - kx), \tag{20'}$$

où c_0 est la concentration uniforme primitive de la solution, si x est compté à partir du milieu entre les deux lames. Il s'ensuit que

$$c_{01} = c_0\left(1 + \frac{1}{2}kl\right), \qquad c_{02} = c_0\left(1 - \frac{1}{2}kl\right). \tag{21}$$

Si V_0 est le potentiel au milieu de la cuve, on a

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{V}_{01} - \mathrm{V}_0 &= \frac{\mathrm{RT}}{n'\varepsilon}\log\frac{c_{01}}{c_0} = \frac{\mathrm{RT}}{n'\varepsilon}\log\left(1 + \frac{1}{2}kl\right) \\ \mathrm{V}_0 - \mathrm{V}_{02} &= \frac{\mathrm{RT}}{n'\varepsilon}\log\frac{c_0}{c_{02}} = -\frac{\mathrm{RT}}{n'\varepsilon}\log\left(1 - \frac{1}{2}kl\right) \end{aligned}\right\}. \tag{22}$$

D'ailleurs, en négligeant une petite différence de potentiel ohmique, on trouve comme expressions des différences de potentiel anodique et cathodique :

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1 = \mathrm{V}_1 - \mathrm{V}_{01} &= \frac{\mathrm{RT}}{n\varepsilon}\log\frac{c_{01}}{\mathrm{C}} = -\varphi + \frac{\mathrm{RT}}{n\varepsilon}\log c_0 + \frac{\mathrm{RT}}{n\varepsilon}\log\left(1 + \frac{1}{2}kl\right) \\ \Phi_2 = \mathrm{V}_2 - \mathrm{V}_{02} &= \frac{\mathrm{RT}}{n\varepsilon}\log\frac{c_{02}}{\mathrm{C}} = -\varphi + \frac{\mathrm{RT}}{n\varepsilon}\log c_0 + \frac{\mathrm{RT}}{n\varepsilon}\log\left(1 - \frac{1}{2}kl\right) \end{aligned}\right\}, \tag{23}$$

de sorte que

$$\mathrm{E} = \mathrm{V}_1 - \mathrm{V}_2 = \frac{\mathrm{RT}}{\varepsilon}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'}\right)\log\frac{1 + \frac{1}{2}kl}{1 - \frac{1}{2}kl}. \tag{24}$$

Telle est l'équation qui, eu égard à la valeur de k, détermine i en fonction de E.

On voit d'après cela que i n'est plus proportionnel à E, c'est-à-dire que les lois d'Ohm ne sont plus satisfaites, à moins que i soit suffisamment petit (*), en quel cas

$$i = c_0 u \varepsilon \frac{s}{l} E, \tag{25}$$

c'est-à-dire que

$$\gamma = c_0 u E, \tag{26}$$

comme si u' était nul (form. 18″), ce qui est compréhensible.

On voit aussi que, à mesure que E augmente, i tend vers une limite

$$i = 2 \frac{RT}{l} c_0 u s \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'}\right), \tag{27}$$

donnée par $\frac{1}{2} kl = 1$. C'est ce qu'on appelle le *courant limite;* il correspond à $c_{02} = 0$ et $\Phi_2 = -\infty$. On a alors

$$(c_{01})_{\text{lim}} = 2c_0 \quad \text{et} \quad (\Phi_1)_{\text{lim}} = -\varphi + \frac{RT}{n\varepsilon} \log 2c_0. \tag{28}$$

9. Si c_0 est supérieur à $\frac{1}{2} c_s$, c_s étant la concentration correspondant à la saturation du sel, il arrive un moment où, E allant en croissant, la solution se sature à l'anode. La concentration dans le voisinage de la cathode est alors $c_{02} = 2c_0 - c_s$ et la force électromotrice a atteint la valeur

$$E_s = \frac{RT}{\varepsilon} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'}\right) \log \frac{c_s}{2c_0 - c_s}. \tag{29}$$

A partir de ce moment, si E augmente encore, du sel cristallise à l'anode, et cela continue jusqu'à ce que, pour $E = \infty$, la concentration c_0 soit descendue à $\frac{1}{2} c_s$; on a alors atteint le courant limite maximum.

(*) Il suffit que kl soit petit par rapport à 1.

Comme on a toujours $c_s < c_m$ (§ 3), il est impossible que l'on ait jamais $c_{01} = c_m$, c'est-à-dire que jamais des anions ne peuvent se précipiter sur l'anode métallique et par conséquent on ne produit jamais, entre électrodes d'un métal, l'électrolyse d'un sel de ce métal. La quantité de sel dissoute ne change pas et le transport d'électricité se fait uniquement par les cations.

Des considérations analogues à celles des §§ précédents peuvent être faites dans le cas d'électrodes à anions.

10. Qu'arrive-t-il lorsqu'on remue énergiquement la solution? Il s'établit évidemment un état stationnaire, dans lequel la concentration des ions reste constante dans tout le liquide, sauf dans une mince couche voisine des électrodes, qui échappe à l'agitation. On trouve alors que les équations (25) et (26) ont lieu pour toute valeur de E. Le champ électrique déplace bien les anions, mais ceux-ci sont continuellement ramenés par l'agitation; δ' est donc nul.

11. Mais tout cela suppose que la solution ne contienne que des ions et qu'il n'y ait pas de sel non dissocié. Dans le cas où il y a en solution des molécules neutres, les circonstances se compliquent par le fait que, là où la concentration des ions tend à diminuer, de nouveaux ions sont formés, tandis que là où la concentration des ions augmente ceux-ci régénèrent des molécules neutres. Si nous admettons que la vitesse avec laquelle les molécules neutres se dissocient et se reforment est très grande, il y a partout et continuellement équilibre entre les ions et les molécules non dissociées, c'est-à-dire qu'entre les concentrations c et c' des ions et la concentration Γ des molécules (*) on a, conformément à la loi des masses,

$$c^{\frac{1}{n}} \cdot c'^{\frac{1}{n'}} = \varkappa \Gamma^{\frac{1}{nn'}}, \tag{30}$$

$\varkappa$ étant une constante (constante de dissociation).

(*) C'est-à-dire la somme des concentrations des ions non libres.

Les équations (16), (16′), (13′) et (30) contiennent toute la solution du problème dans le cas où il y a des molécules non dissociées. Voici ce qui arrive dans ce cas. De nouveau le champ électrique produit à l'anode une accumulation d'anions et une raréfaction des cations; comme tantôt du métal se dissout, non seulement pour combler le vide des cations, mais encore pour neutraliser les anions en excès. De même, à la cathode il se produit une raréfaction des anions et une accumulation de cations, ce qui détermine une précipitation de ceux-ci. Il se produit d'ailleurs encore quelque chose de plus : l'augmentation de concentration des ions à l'anode a pour effet que l'équilibre avec les molécules non dissociées est rompu et une partie des ions se combine, de sorte que la concentration des molécules non dissociées va en augmentant à l'anode, et pour une raison analogue elle diminue à la cathode. Il ne peut donc pas s'établir maintenant un état d'équilibre dans la distribution des anions, parce qu'il va s'établir une diffusion des molécules neutres de l'anode vers la cathode, et par conséquent un courant d'anions de la cathode vers l'anode subsistera : ces anions ne se précipitent pas à l'anode, mais s'y combinent chaque fois avec des cations provenant de l'anode et à la cathode ils se séparent des cations qu'ils abandonnent. Contrairement à ce qui se produisait donc dans le cas de dissociation complète, les anions participent ici au transport du courant, mais cette participation est indirecte; en dernière analyse le courant est transporté par des cations, libres ou combinés.

Finalement il s'établit un état d'équilibre, qui est déterminé par cette condition, que la densité de courant δ' des anions libres dans la solution est précisément égale, au signe près, à la densité du courant des anions transportés par la diffusion des molécules non dissociées, et égale aussi, y compris le signe, à la densité du courant des cations transportés par cette diffusion ; la densité totale du courant est donnée par (17).

12. Si l'on agite la solution, les concentrations restent constantes ; les molécules neutres ne se transforment ni ne se régénèrent et tout se passe comme si tout était dissocié en ions (§ 10).

Un autre cas où Γ reste constant est celui où la solution est maintenue saturée par un excès de sel. Dans ce cas il s'établit un courant d'anions, qui sont enlevés au sel en excès à la cathode et déposés sous forme de sel à l'anode. Les cations libérés à la cathode se précipitent et une quantité équivalente se dissout à l'anode pour se combiner aux anions et constituer le sel précipité. Dans la solution, les considérations du § 7 sont applicables, non pas seulement au début du passage du courant, mais pendant toute la durée de ce passage ; les lois d'Ohm sont vérifiées et la conductivité est exprimée par la formule (18″).

13. Tout ce qui précède est encore applicable si la solution est un mélange de solutions de sels du même métal. L'équation (5) et toutes celles qui en résultent ont alors lieu pour toutes les espèces d'anions prises séparément et dans l'équation (13′) c' est à remplacer par la somme des concentrations de tous les anions.

14. Voyons encore ce qui se passe lorsque l'anode, au lieu d'être une lame de métal, est une électrode à anions, en équilibre avec une concentration C' de ces derniers. Il y a dans ce cas un courant d'anions (δ') vers l'anode, de cations (δ) vers la cathode, c'est-à-dire qu'il y a électrolyse. Si l'on agite, pour avoir un état à peu près stationnaire (*), il n'y a pas de gradients de concentration.

(*) L'électrolyse fait évidemment baisser la concentration, mais, pour obtenir un état rigoureusement stationnaire, on pourrait se figurer que la solution soit constamment renouvelée.

On a donc

$$V_{01} - V_{02} = \frac{\delta l}{c_0 u \varepsilon} = \frac{\delta' l}{c_0 u' \varepsilon} \tag{31}$$

et

$$\Delta = \delta + \delta' = \frac{(V_{01} - V_{02})}{l} c_0 \varepsilon (u + u'). \tag{32}$$

En outre

$$E = V_1 - V_2 = E_0 + \frac{\delta l}{c_0 u \varepsilon} = E_0 + \frac{\delta' l}{c_0 u' \varepsilon} = E_0 + \frac{\Delta l}{c_0 \varepsilon (u + u')}, \tag{33}$$

où

$$E_0 = \frac{RT}{n\varepsilon} \log \frac{C}{c_1} = \frac{RT}{n'\varepsilon} \log \frac{C'}{c'_2} = \varphi - \varphi' - \frac{RT}{\varepsilon}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'}\right) \log c_0, \tag{33'}$$

puisque

$$c^{\frac{1}{n}} . C'^{\frac{1}{n'}} = C^{\frac{1}{n}} . c_2'^{\frac{1}{n'}} = c_0^{\frac{1}{n} + \frac{1}{n'}}. \tag{34}$$

E_0 est la force contre-électromotrice de polarisation (*).

D'après la formule (33), les lois d'Ohm sont donc vérifiées : l'intensité du courant est proportionnelle à la force électromotrice effective $E - E_0$ et la conductivité est exprimée par la formule (18'').

D'ailleurs

$$E_0 = \Phi_1 - \Phi_2. \tag{33''}$$

Les différences de potentiel anodique et cathodique sont :

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1 &= V_1 - V_{01} = \frac{RT}{n'\varepsilon} \log \frac{C'}{c_0} = -\varphi' - \frac{RT}{n'\varepsilon} \log c_0 \\ \Phi_2 &= V_2 - V_{02} = \frac{RT}{n\varepsilon} \log \frac{c_0}{C} = -\varphi + \frac{RT}{n\varepsilon} \log c_0 \end{aligned}\right\}. \tag{35}$$

(*) E_0 est toujours positif, puisque $c'_2 < C'$ (§ 5). Si $E < E_0$, le système constitue un élément galvanique.

15. Supposons maintenant que nous plongions un métal dans une solution qui contient aussi un sel d'un autre métal. Nous admettrons encore que tout soit dissocié en ions ; représentons par c'' la concentration des cations de ce second métal. Si c''_0 est la concentration dans la solution, la concentration contre la lame sera c''_1, telle que, si n'' est la valence,

$$V_1 - V_0 = \frac{RT}{n\varepsilon}\log\frac{c_0}{C} = \frac{RT}{n''\varepsilon}\log\frac{c''_0}{c''_1}, \tag{36}$$

de sorte que

$$\left(\frac{c''_1}{c''_0}\right)^{\frac{1}{n''}} = \left(\frac{C}{c_0}\right)^{\frac{1}{n}}. \tag{36'}$$

Or, ce second métal a, tout comme le premier, une concentration d'équilibre C'', qui peut être atteinte par augmentation de c''_0 ou diminution de c_0 et sera en général dépassée si C est beaucoup plus grand que C'', par exemple si le premier métal est positif et le second négatif (fer et cuivre). Il y a alors sursaturation des cations du second métal (*) et il se peut, bien que ce ne soit pas nécessaire, que le second métal se précipite (**)

(*) Certains phénomènes de passivité font songer à une sursaturation des ions d'un métal au contact d'un autre, tel par exemple le fait qu'une plaque de fer plongée dans une solution d'un sel de cuivre peut se recouvrir de cuivre à la suite d'un choc.

(**) Cela explique, comme on sait, le fait que certains métaux en remplacent un autre dans sa solution et se recouvrent d'une couche de ce dernier. Cela explique aussi la dissolution d'un métal dans un acide, lorsque le C (ou le φ) de ce métal est de beaucoup supérieur à celui (φ'') de l'hydrogène mis en liberté. Comme le φ de l'hydrogène dépend de la température et de la pression, on conçoit qu'il puisse s'établir un équilibre (systèmes de valeurs de p et T) où le φ est le même pour le métal et l'hydrogène, ainsi que cela s'observe.

Si le dépôt dont se recouvre la lame métallique n'est pas adhérent, comme c'est le cas lorsque le dépôt est gazeux, la réaction (précipitation de cations II et dissolution de cations I) doit s'opérer jusqu'à ce que le métal et le dépôt soient en équilibre avec une même solution, c'est-à-dire jusqu'à ce que c_0 ait augmenté et c''_0 diminué ($c_0 + c''_0 = c'_0$ restant constant) au point que c''_1 (formule 36') $= C''$ (exemple : dissolution d'une lame de zinc dans un acide). Cette réaction est accompagnée d'un (moyennant la dissolution d'une quantité équivalente du premier métal) ; alors la différence de potentiel tombe à

$$V_1 - V_0 = \frac{RT}{n''\varepsilon} \log \frac{c_0''}{C''}, \tag{37}$$

comme si une lame du second métal était plongée dans la solution.

Quant aux anions, dans la solution leur concentration c_0' est telle que

$$c_0' = c_0 + c_0'' \tag{38}$$

et contre la lame ils ont une concentration c_1 telle que

$$C^{\frac{1}{n}} \cdot c_1'^{\frac{1}{n'}} = c_0^{\frac{1}{n}} \cdot c_0'^{\frac{1}{n'}}. \tag{39}$$

Une seconde lame du premier métal, plongée dans la solution, subit la même transformation que la première, à moins que, c_0'' ayant diminué et c_0 augmenté, la valeur de c_1'' ait remonté jusqu'à C'', en quel cas les deux métaux sont en équilibre avec la même solution (*) ; on a alors

$$\left(\frac{c_0}{C}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{c_0''}{C''}\right)^{\frac{1}{n''}}. \tag{40}$$

---

courant électrique entre le dépôt et les parties non recouvertes de la lame; ce courant s'établit sous l'action d'une force électromotrice (voir § 19)

$$E = \frac{RT}{n\varepsilon} \log C - \frac{RT}{n''\varepsilon} \log C'' - \frac{RT}{n\varepsilon} \log c_0 + \frac{RT}{n''\varepsilon} \log c_0'' =$$

$$= \varphi - \varphi'' - \frac{RT}{\varepsilon}\left(\frac{1}{n} \log c_0 - \frac{1}{n''} \log c_0''\right).$$

Le circuit étant très court, l'intensité du courant est très grande.

(*) Un pareil équilibre doit nécessairement s'établir avec une seule lame, si elle est d'étendue suffisamment grande ou la quantité de liquide suffisamment petite; alors la lame ne se recouvre que partiellement du second métal.

Un tel équilibre doit s'établir chaque fois qu'une lame d'un métal est plongée dans une solution pure d'un autre. Au début, d'après la relation (36), la différence de potentiel au contact doit être infiniment grande (négativement), mais la précipitation d'une quantité, peut-être même minime, du second métal, suffit pour abaisser le potentiel à celui du contact avec le second métal (*).

16. Voyons maintenant ce qui arrive lorsqu'on établit une différence de potentiel E entre deux lames du premier métal.

Partons d'une concentration c''_0 inférieure à la valeur fournie par l'équation (40), c_0 étant donné ; le second métal ne s'est donc pas précipité. Le problème est du même genre que celui des §§ 7 et 8, mais il est plus compliqué. Les anions comme les cations du second métal prennent une distribution d'équilibre, dans laquelle la chute de concentration est linéaire ; on a

$$\frac{dV}{dx} = \frac{RT}{n'\varepsilon}\frac{d\log c'}{dx} = -\frac{RT}{n''\varepsilon}\frac{d\log c''}{dx} \tag{41}$$

alors que pour les cations du premier métal

$$\frac{dV}{dx} = -\frac{RT}{n\varepsilon}\frac{d\log c}{dx} - \frac{\delta}{cu\varepsilon}. \tag{42}$$

Ces équations, avec $c_1 = c_2 = C$, contiennent toute la solution du problème.

(*) C'est ce qui doit arriver aussi lorsqu'on plonge une lame de métal (de platine par exemple) dans l'eau. Un petit peu d'hydrogène doit se déposer sur le platine, en étant remplacé par une quantité équivalente de platine en dissolution. Mais, comme la concentration des ions d'hydrogène dans l'eau est extrêmement faible et que la concentration d'équilibre du platine est beaucoup plus petite que celle de l'hydrogène, il suffit d'une trace — peut-être inappréciable par les moyens physiques — de platine pour abaisser (en valeur absolue) la différence de potentiel à celle du contact avec une électrode à hydrogène.

Les concentrations c et c' diminuent encore de l'anode à la cathode, mais c'' augmente dans le même sens. A mesure que $E = V_1 - V_2$ croît, c_{02} diminue et tend vers 0, de sorte que $V_2 - V_{02}$ va encore en augmentant et tend vers l'infini; mais, c'' ne tendant pas vers 0, la concentration des cations II contre la cathode va s'élever et notamment jusqu'à ce que la concentration d'équilibre C'' soit atteinte.

A partir de ce moment, E s'élevant encore, des cations II se précipitent sur la cathode et en même temps, la solution devant rester neutre, la concentration moyenne c_0 des cations I doit aller en augmentant, c'est-à-dire que du métal I se dissout à l'anode. A chaque valeur de E correspond un état stationnaire avec une certaine valeur de c_0; à mesure que E augmente, c_0 augmente, mais c_{02} diminue, et il en est de même de c'_{02} et c''_{02}. Finalement $c_{02} = c'_{02} = c''_{02} = 0$, et alors on est arrivé au même état limite qu'au § 8 ($E = \infty$); $c = c'$ dans toute la solution, de sorte qu'en élevant de plus en plus la valeur de E on finit par précipiter tout le métal II.

17. Lorsqu'on remue la solution, on se retrouve dans les conditions du § 10 : seuls les cations I transportent le courant pour toute valeur de E et les formules (25) et (26) sont applicables. Quant aux cations II et aux anions, ils sont bien déplacés par le champ électrique, mais continuellement ramenés par l'agitation.

18. Supposons maintenant que la concentration c''_0 ait une valeur supérieure à celle fournie par l'équation (40); les électrodes se recouvrent donc de métal II. Lorsqu'on applique une force électromotrice entre les électrodes, il se produit d'abord un courant qui dépose du métal II à la cathode et enlève de ce métal à l'anode; mais, dès que le métal I de l'anode se découvre, c'est ce métal-là qui va entrer en dissolution et remplacer le métal II (avec une densité de courant très grande sur la surface mise à nu) (*). La concentration c_0'' diminuera et c_0 augmentera, jusqu'à ce que, c_2 étant devenu égal à C, le courant soit de nouveau transporté par les cations I, et alors s'établira de nouveau l'état stationnaire correspondant à E (§ 16).

19. Si l'on parvenait à renouveler continuellement l'anode, — ou, ce qui revient au même, si le métal II ne se précipitait pas sur l'anode (sursaturation), — le problème serait déterminé par les équations

$$\frac{dV}{dx} = -\frac{RT}{n\varepsilon}\frac{d\log c}{dx} - \frac{\delta}{cu\varepsilon} = \frac{RT}{n'\varepsilon}\frac{d\log c'}{dx} = -\frac{RT}{n''\varepsilon}\frac{d\log c''}{dx} - \frac{\delta''}{c''u''\varepsilon}, \tag{43}$$

avec $c_1 = C$ et $c_2'' = C''$. Dans l'état stationnaire obtenu en agitant, on aurait alors

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{RT}{n\varepsilon}\log\frac{c_0}{C} = \frac{RT}{n''\varepsilon}\log\frac{c_0''}{c_1''} \\ \Phi_2 &= \frac{RT}{n''\varepsilon}\log\frac{c_0''}{C''} \end{aligned}\right\}, \tag{44}$$

$$V_{01} - V_{02} = \frac{\delta l}{c_0 u\varepsilon} = \frac{\delta'' l}{c_0'' u''\varepsilon}, \tag{45}$$

et

$$E = V_1 - V_2 = \frac{RT}{n''\varepsilon}\log\frac{C''}{c_1''} + \frac{\delta'' l}{c_0'' u''\varepsilon} = E' + \frac{\Delta l}{\varepsilon(c_0 u + c_0'' u'')}, \tag{46}$$

où

$$E' = -\frac{RT}{n\varepsilon}\log C + \frac{RT}{n''\varepsilon}\log C'' + \frac{RT}{n\varepsilon}\log c_0 - \frac{RT}{n''\varepsilon}\log c_0''. \tag{46'}$$

Or, si l'on compare les formules (36') et (40), on voit que c_1 est plus grand que C''; E' est donc négatif et représente une force électromotrice *favorisant* le courant; sous l'influence de la

---

(*) Encore une fois un courant électrique va s'établir entre la partie recouverte et la partie découverte de l'anode (voir § 15).

force électromotrice effective $E - E' > E$, il s'établit un courant d'intensité Δ, satisfaisant aux lois d'Ohm. La conductivité est d'ailleurs

$$\gamma = \varepsilon(c_0 u + c_0'' u''). \tag{47}$$

Le courant fait baisser c_0'' et augmenter c_0 d'une quantité équivalente ; E' augmente donc et remonte jusqu'à 0. Le phénomène peut d'ailleurs continuer dans le même sens au delà de ce point et alors E' devient positif, une force *contre*-électromotrice.

Même si $E = 0$ il faut que le courant continue, c'est-à-dire que le système doit fonctionner comme un élément galvanique, à moins évidemment que l'électrode positive ne se recouvre subitement de métal II, car l'état n'est pas stable.

20. Le problème se modifie lorsque c est très petit, ce qui arrive lorsque des électrodes du métal I sont plongées dans une solution d'un sel du métal II. Nous avons vu (§ 15) que dans ce cas, surtout si les cations du métal I sont très peu solubles (petite valeur de C, électrodes dites inattaquables, en platine, par exemple) et que ceux du métal II le sont beaucoup plus (par exemple, du cuivre), il se forme une concentration c_0 très faible. Dans ces conditions, c étant très petit par rapport à c'', on aura sensiblement $c'' = c_{01}'' = c_{02}'' \doteq c_0''$ et $c' = c''$; seul c variera relativement fort, de c_{01} près de l'anode à c_{02} près de la cathode, et l'on aura

$$\left(\frac{c_{02}}{C}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{c_0''}{C''}\right)^{\frac{1}{n''}} \tag{48}$$

et

$$\left(\frac{c_{01}}{C}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{c_0''}{c_1''}\right)^{\frac{1}{n''}}. \tag{49}$$

Il s'établit donc un état d'équilibre dans lequel $V_{01} - V_{02} = 0$ et où il y a aux électrodes les sauts de potentiel

$$\Phi_1 = \frac{RT}{n\varepsilon} \log \frac{c_{01}}{C} \quad \text{et} \quad \Phi_2 = \frac{RT}{n\varepsilon} \log \frac{c_{02}}{C} = \frac{RT}{n''\varepsilon} \log \frac{c_0''}{C''} \tag{50}$$

et entre les électrodes une force contre-électromotrice de polarisation :

$$\mathrm{E}_p = \Phi_1 - \Phi_2 = \frac{\mathrm{RT}}{n''\varepsilon} \log \frac{\mathrm{C}''}{c_1''} = \mathrm{E}.\ (^*) \tag{51}$$

Malgré que $\mathrm{V}_{01} - \mathrm{V}_{02} = 0$, il y a un courant, transporté notamment par les cations I par suite de la chute de concentration; on aura, en représentant par δ la densité de ce courant :

$$\frac{\mathrm{RT}}{n\varepsilon} \frac{d \log c}{dx} = - \frac{\delta}{cu\varepsilon}, \tag{52}$$

d'où

$$c = c_{02}(1 - kx), \tag{53}$$

avec

$$k = \frac{\delta n}{\mathrm{RT} c_{02} u}. \tag{53'}$$

Ce courant est, je pense, ce qu'on appelle le *courant résiduel;* il est lié à la force électromotrice appliquée (mais non effective) par la relation .

$$\mathrm{E} = \frac{\mathrm{RT}}{n\varepsilon} \log \frac{c_{01}}{c_{02}} = \frac{\mathrm{RT}}{n\varepsilon} \log (1 + kl), \tag{54}$$

qui, qualitativement du moins, s'accorde très bien avec les observations faites sur le courant résiduel.

(*) La concentration c_{02} reste constante; seul c_{01} varie, en augmentant notamment avec E. Il s'ensuit que la charge de l'anode seule est variable. On voit donc que la polarisation cathodique Φ_2 est indépendante de la force électromotrice qui produit la polarisation; seule la polarisation anodique $\Phi_1 = \mathrm{E} - \Phi_2$ varie avec cette force électromotrice. Cela n'est pas conforme à l'idée que l'on se fait généralement de la polarisation électrolytique, et semble même être en désaccord avec le fonctionnement de l'électromètre capillaire.

21. Si l'on agite le liquide, l'état stationnaire ci-dessus ne peut pas s'établir; alors les cations I prennent dans le liquide la concentration déterminée par la formule (40) et le courant est transporté par les cations sous l'action de la force électromotrice $V_1 - V_2 = E$ (*).

22. Revenons encore au cas du § 18. Lorsque c_0'' diminue et que c_0 augmente, la somme $c_0 + c_0'' = c_0'$ ne changeant d'ailleurs pas, la concentration c_1' des anions contre l'anode va en augmentant (voir formule 39), et il se peut qu'elle atteigne la valeur c' correspondant à une anode à anions (**). Si cela arrive, un nouveau régime s'établit, dans lequel les anions se précipitent à l'anode et les cations II à la cathode, tandis que les cations I restent passifs. A part la présence des cations I, on se retrouve dans les conditions du § 14, où il faut prendre comme métal le métal II.

23. Ce régime est nécessairement atteint, pour une force électromotrice suffisamment élevée, dans le cas du § 20, car, d'après la formule (55), c_{01} augmente avec E; or, comme la concentration c_1' des anions contre l'anode est déterminée par

$$\left(\frac{c_1'}{c_0'}\right)^{\frac{1}{n'}} = \left(\frac{c_{01}}{C}\right)^{\frac{1}{n}}, \tag{55}$$

c_1' va aussi croissant et finira par atteindre la valeur limite C', à partir de laquelle des anions vont se précipiter.

(*) Il semble qu'en remuant bien, ce régime doive subsister jusqu'aux forces électromotrices les plus élevées.

(**) Il est avantageux pour cela que C soit aussi petit que possible et c_0' le plus grand possible. Il semble donc qu'en dissolvant dans une solution concentrée du sel assez soluble d'un métal un sel d'un métal fortement négatif, on puisse observer une précipitation d'anions sur une lame de ce second métal, plongée dans la solution.

Les différences de potentiel anodique et cathodique sont alors

$$\left.\begin{aligned}
\Phi_1 &= \frac{\mathrm{RT}}{n'\varepsilon}\log\frac{C'}{c'_0} = -\varphi' - \frac{\mathrm{RT}}{n'\varepsilon}\log c'_0 \\
\Phi_2 &= \frac{\mathrm{RT}}{n\varepsilon}\log\frac{c_{02}}{C} = \frac{\mathrm{RT}}{n''\varepsilon}\log\frac{c'_0}{C''} = -\varphi'' + \frac{\mathrm{RT}}{n''\varepsilon}\log c'_0
\end{aligned}\right\} \tag{56}$$

et la force contre-électromotrice de polarisation est

$$\mathrm{E}_p = \Phi_1 - \Phi_2 = \varphi'' - \varphi' - \frac{\mathrm{RT}}{\varepsilon}\left(\frac{1}{n'} + \frac{1}{n''}\right)\log c'_0. \tag{57}$$

A partir du moment où $\mathrm{E} = \mathrm{E}_p$, l'électrolyse se produit, comme si l'anode était une anode à anions et la cathode une cathode à cations II. Les cations I restent passifs.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — **La Gravifique**

(*Troisième communication*) (*),

par TH. DE DONDER.

8. *Cas du champ gravifique stationnaire.* Quand les potentiels $g_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4)$ sont tous indépendants du temps x_4, nous dirons que le champ gravifique est *stationnaire.*

La fonction

$$W \equiv \sum_\sigma \frac{\partial V}{\partial v^\sigma} v^\sigma - V \tag{97}$$

est alors un *invariant* des équations différentielles du mouvement de la matière dépourvue de pression interne.

En effet, on a, en vertu des équations (93) :

$$\frac{dW}{dt} = \sum_\sigma \left[\frac{\partial V}{\partial x_\sigma} v^\sigma + \frac{\partial V}{\partial v^\sigma} \cdot \frac{dv^\sigma}{dt} - \frac{dV}{dt} \right] = - \frac{\partial V}{\partial t} \cdot \tag{98}$$

Or, V ne renferme pas le temps t explicitement, donc $\frac{dW}{dt} = 0$.

Considérons la dernière équation (73), c'est-à-dire celle qui est relative à $\alpha = 4$. On aura, dans cette équation, $g_{\gamma\beta,4} \equiv 0$, puisque le champ est stationnaire ; donc $\frac{du_4}{ds} = 0$, en vertu des équations différentielles du mouvement de la matière étudiée, dans l'espace-temps.

Il en résulte que (52)

$$u_4 \equiv \sum_\beta g_{4\beta} u^\beta \tag{99}$$

est un *invariant* des équations du mouvement du fluide.

(*) Présentée par M. Stroobant.

De même, de la dernière équation (91) on déduit immédiatement que

$$V^{-1}\sum_{\beta} g_{4\beta}v^{\beta} \tag{100}$$

est un *invariant,* dans l'espace et le temps, des équations (93) du mouvement du fluide étudié.

9. *Cas du champ gravifique à symétrie sphérique.* Quand la forme différentielle quadratique (1)

$$\delta s^2 = \sum_{\alpha}\sum_{\beta} g_{\alpha\beta}\,\delta x_{\alpha}\,\delta x_{\beta} \tag{101}$$

demeure *invariante* par toutes les transformations orthogonales de x_1, x_2, x_3 en x'_1, x'_2, x'_3, $(x_4 = x'_4)$, on dit que le champ gravifique possède la *symétrie sphérique,* par rapport à l'origine des coordonnées rectangulaires (x_1, x_2, x_3).

Pour qu'une transformation linéaire soit orthogonale, il faut et il suffit qu'on ait

$$r^2 \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 \equiv r'^2. \tag{102}$$

On aura donc les invariants différentiels :

$$\left.\begin{aligned} r\delta r = \sum_i x_i\delta x_i = \sum_i x'_i\delta x'_i = r'\delta r' \\ \sum_i(\delta x_i)^2 = \sum_i(\delta x'_i)^2 \end{aligned}\right\} \tag{103}$$
$$i = 1, 2, 3.$$

Il en résulte que

$$\delta s^2 \equiv A\sum_i(\delta x_i)^2 + B(r\delta r)^2 + Cr\delta r\delta x_4 + D\,\delta x_4^2, \tag{104}$$

où A, B, C, D sont des fonctions de r et de t seulement, est la forme générale du δs^2 des champs gravifiques à symétrie sphérique.

Lemme (*). — Au moyen des nouvelles variables X_1, X_2, X_3, définies par

$$x_i = \rho X_i \, , \tag{105}$$

où ρ est une fonction de $R \equiv \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_2^3}$ seulement, on peut transformer le δs^2 (104) en un δs^2 de la forme

$$\delta s^2 = - \sum_i (\delta X_i)^2 + \mathcal{B}(R \delta R)^2 + \mathcal{C} R \delta R \delta x_4 + \mathcal{D} \delta x_4 ; \tag{106}$$

où $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ ne dépendent que de R et de x_4.

On aura d'autre part

$$\rho^2 = - \frac{1}{A} \quad \text{ou} \quad R^2 = - A r^2 . \tag{107}$$

Nous avons supposé que A est toujours *négatif*.

Démonstration. — En vertu de (105), on aura

$$\begin{aligned} \sum_i (\delta x_i)^2 &= \sum_i (X_i \rho' \delta R + \rho \delta X_i)^2 \\ &= \rho'^2 R^2 (\delta R)^2 + \rho^2 \sum_i (\delta X_i)^2 + 2 \rho \rho' R (\delta R)^2 , \end{aligned}$$

où ρ' représente la dérivée de ρ par rapport à R. D'autre part, au moyen de $r^2 = \rho^2 R^2$, on voit que $r \delta r$ sera de la forme $E R \delta R$, où E représente une fonction de R seulement.

En substituant ces résultats dans (104), on obtient aisément le résultat annoncé dans (106) et (107).

10. *Cas du champ gravifique à symétrie sphérique pure.* La symétrie sphérique sera dite *pure* quand le coefficient C du terme en $r \delta r \delta x_4$ (104) est identiquement nul.

(*) Un lemme un peu moins général est énoncé et utilisé dans l'ouvrage de H. Weyl, *Raum. Zeit. Materie,* p. 200. Berlin, 1918.

On voit immédiatement que si $C = 0$ (104), on aura aussi $\mathcal{C} = 0$ (106).

Théorème. — Dans tout champ gravifique à symétrie sphérique pure (*), les trajectoires de la matière dépourvue de pression interne sont des *courbes planes*, dont les plans passent par l'origine.

Autrement dit, les coordonnées rectangulaires x_1, x_2, x_3 d'un quelconque de ces points matériels satisferont constamment à une équation du premier degré

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0. \tag{108}$$

Démonstration. — En vertu du lemme précédent, on pourra mettre le δs^2 de ce champ gravifique (104) sous la forme

$$\delta s^2 = -\sum_i (\delta X_i)^2 + \mathfrak{B}(R\delta R)^2 + \mathfrak{D}\delta X_4^2. \tag{109}$$

Si l'on applique la formule (78), on trouve après quelques calculs élémentaires :

$$\frac{\frac{d^2X_1}{ds^2}}{X_1} = \frac{\frac{d^2X_1}{ds^2}}{X_2} = \frac{\frac{d^2X_3}{ds^2}}{X_3}. \tag{110}$$

Il en résulte que

$$X_1\frac{dX_2}{ds} - X_2\frac{dX_1}{ds} \equiv \alpha_3 \tag{111}$$

et deux analogues que l'on déduirait de la première (111) par permutations tournantes, sont des *invariants* du mouvement dans l'espace-temps.

Ces trois invariants satisfont à l'identité (111)

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 = 0. \tag{112}$$

En vertu de (105), on aura donc :

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0,$$

(*) Il n'est pas nécessaire de supposer que le champ est stationnaire.

et comme α_1, α_2, α_3 sont aussi des invariants du mouvement dans l'espace et le temps (la variable indépendante étant x_4 ou t), on voit que les trajectoires sont planes et que leurs plans passent par l'origine.

11. *Cas du champ gravifique d'Einstein et de Schwarzschild.* (Problème du corps unique, en mécanique céleste.) Le champ gravifique est produit par un corps unique (le Soleil). Celui-ci est composé de couches sphériques homogènes. Prenons le centre de ce corps comme origine des coordonnées rectangulaires; les axes sont invariablement liés à ce corps. *Admettons* que le champ gravifique produit par ce corps, dans l'espace qui l'environne, possède la *symétrie sphérique pure* et qu'il soit *stationnaire.* Il en résulte que l'espace-temps sera défini par un δs^2 ayant la forme

$$\delta s^2 = \mathrm{A}\sum_i \delta x_i^2 + \mathrm{B}\sum_i (x_i \delta x_i)^2 + \mathrm{D}\delta t^2, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{113}$$

où A, B, D sont des fonctions de r seulement.

Passons aux coordonnées polaires, définies par les trois relations

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= r \sin\theta \cos\varphi \\ x_2 &= r \sin\theta \sin\varphi \\ x_3 &= r \cos\theta \end{aligned}\right\} \tag{114}$$

d'où

$$\delta s^2 \equiv (\mathrm{A} + \mathrm{B}r^2)\delta r^2 + \mathrm{A}r^2(\delta\theta^2 + \sin^2\theta\delta\varphi^2) + \mathrm{D}\delta t^2. \tag{115}$$

Posons encore :

$$\mathrm{R}^2 \equiv -\mathrm{A}r^2 \tag{116}$$

et utilisons la variable R, au lieu de la variable r; le δs^2 prendra ainsi la forme

$$\delta s^2 = -\mathrm{E}\delta\mathrm{R}^2 - \mathrm{R}^2(\delta\theta^2 + \sin^2\theta\delta\varphi^2) + \mathrm{D}\delta t^2, \tag{117}$$

où E et D sont des fonctions de R seulement.

Ces potentiels E et D doivent satisfaire aux équations différentielles de la gravifique (57), en dehors des masses pondérables agissantes (c'est-à-dire en dehors du Soleil) :

$$G_{\mu\nu} = 0. \tag{118}$$

Pour simplifier cette intégration, D. Hilbert (*) reprend le principe d'Hamilton (4). Il calcule d'abord la fonction l (3) attachée au δs^2 qui figure dans (117); il fait L identiquement nul (50) ; il trouve ainsi que

$$\left.\begin{aligned} E &= -\frac{R}{R-\alpha} \\ D &= c^2\frac{R-\alpha}{R} \end{aligned}\right\} \tag{119}$$

où α est une constante arbitraire.

Le δs^2 de l'espace-temps cherché pourra donc s'écrire :

$$\delta s^2 \equiv -\frac{R}{R-\alpha}(\delta R)^2 - R^2\left[(\delta\theta)^2 + \sin^2\theta(\delta\varphi)^2\right] + c^2\frac{R-\alpha}{R}(\delta t)^2 \tag{120}$$

Il est bon de remarquer que cette méthode ne dispense pas de la vérification des dix équations différentielles de la gravifique (57) ; en effet, dans l'application du principe d'Hamilton (4), *on doit faire varier tous les* $g_{\alpha\beta}$; or, dans le calcul de Hilbert, on ne fait varier que les $g_{\alpha\beta}$ non nuls qui figurent encore dans (117).

Il reste donc à s'assurer si toutes les équations de la gravifique (118) *sont satisfaites par les potentiels trouvés* (119). Cette vérification sera facilitée en prenant les variables

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{R^3}{3} \\ \xi_2 &= -\cos\theta \\ \xi_3 &= \varphi \end{aligned}\right\} \tag{121}$$

(*) *Göttinger Nachrichten,* 1917, Heft 1, p. 53.

Le δs^2 (120) pourra s'écrire :

$$\delta s^2 \equiv -\frac{1}{R^4}\frac{1}{R-\alpha}(\delta\xi_1)^2 - R^2\frac{(\delta\xi_2)^2}{1-\xi_2^2} - R^2(1-\xi_2^2)(\delta\xi_3)^2 + c^2\frac{R-\alpha}{R}(\delta t)^2 \qquad (122)$$

et l'on voit immédiatement que *le déterminant des potentiels qui figurent dans* (122) *se réduit à une constante* (c^2). Or, dans le cas où le déterminant g se réduit à une constante, les premiers membres des équations de la gravifique se simplifient considérablement; le lecteur pourra s'en rendre compte dans le paragraphe suivant. Toutes les équations de la gravifique sont vérifiées par les potentiels (122); il en est donc de même (*) pour les potentiels (120).

12. *Formulaire.* L'invariant de courbure totale peut s'écrire:

$$C \equiv \frac{1}{2}\sum_\alpha\sum_\beta\sum_\sigma\sum_\tau(\alpha\tau,\sigma\beta)g^{\alpha\beta}g^{\sigma\tau}. \qquad (123)$$

Nous avons déjà posé (15)

$$G_{\alpha\beta} \equiv \sum_\sigma\sum_\tau(\alpha\tau,\sigma\beta)g^{\sigma\tau}. \qquad (124)$$

Nous aurons donc

$$C \equiv \frac{1}{2}\sum_\alpha\sum_\beta g^{\alpha\beta}G_{\alpha\beta}. \qquad (125)$$

Remarquons encore que

$$G_{\alpha\beta} \equiv \sum_\sigma\sum_\tau\left[\frac{\partial\begin{Bmatrix}\alpha\sigma\\ \sigma\end{Bmatrix}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial\begin{Bmatrix}\alpha\beta\\ \sigma\end{Bmatrix}}{\partial x_\sigma} + \begin{Bmatrix}\beta\tau\\ \sigma\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha\sigma\\ \tau\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}\sigma\tau\\ \sigma\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha\beta\\ \tau\end{Bmatrix}\right] \qquad (126)$$

(*) Voir mon Mémoire II, p. 95.

Les symboles (126) peuvent se mettre sous une forme très remarquable; dans ce but, nous allons d'abord établir d'une manière élémentaire quelques relations.

Par définition, on a

$$\begin{bmatrix} \alpha\beta \\ \gamma \end{bmatrix} \equiv \frac{1}{2}(g_{\gamma\beta,\,\alpha} + g_{\gamma\alpha,\,\beta} - g_{\alpha\beta,\,\gamma}). \tag{127}$$

Il en résulte que

$$g_{\alpha\beta,\,\gamma} \equiv \begin{bmatrix} \gamma\alpha \\ \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma\beta \\ \alpha \end{bmatrix}. \tag{128}$$

Par définition, on a aussi

$$\begin{bmatrix} \alpha\beta \\ \lambda \end{bmatrix} \equiv \sum_\mu g_{\lambda\mu} \begin{Bmatrix} \alpha\beta \\ \mu \end{Bmatrix}. \tag{129}$$

En vertu de (128, 129), on aura donc

$$g_{\alpha\beta,\,\lambda} \equiv \sum_\mu \left(g_{\mu\beta} \begin{Bmatrix} \alpha\lambda \\ \mu \end{Bmatrix} + g_{\mu\alpha} \begin{Bmatrix} \beta\lambda \\ \mu \end{Bmatrix} \right), \tag{130}$$

On aura, en outre :

$$\begin{aligned} g^{ik,\,\lambda} &\equiv \frac{1}{2} \sum_\alpha \sum_\beta (1 + \varepsilon_{\alpha\beta}) \frac{dg^{ik}}{dg_{\alpha\beta}} g_{\alpha\beta,\,\lambda} \\ &\equiv -\frac{1}{2} \sum_\alpha \sum_\beta (1 + \varepsilon_{\alpha\beta})(1 - \varepsilon_\alpha\ )(g^{i\alpha}g^{k\beta} + g^{i\beta}g^{k\alpha}) g_{\alpha\beta,\,\lambda} \\ &\equiv -\sum_\alpha \left(g^{i\alpha} \begin{Bmatrix} \alpha\lambda \\ k \end{Bmatrix} + g^{k\alpha} \begin{Bmatrix} \alpha\lambda \\ i \end{Bmatrix} \right) \end{aligned} \tag{131}$$

En vertu des formules précédentes, on aura

$$\frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x_\lambda} = \sum_\alpha \sum_\beta g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta,\,\lambda} = 2 \sum_\alpha \begin{Bmatrix} \alpha\lambda \\ \alpha \end{Bmatrix} \tag{132}$$

ou

$$\sum_\alpha \begin{Bmatrix} \alpha\lambda \\ \alpha \end{Bmatrix} = \frac{\partial \log (-g)^{\frac{1}{2}}}{\partial x_\lambda}. \tag{133}$$

On aura de même

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial\left(\sqrt{g}\, g^{ik}\right)}{\partial x_\lambda} \equiv \sum_\alpha \left(g^{ik} \left\{ \begin{matrix} \alpha\lambda \\ \alpha \end{matrix} \right\} - g^{i\alpha} \left\{ \begin{matrix} \alpha\lambda \\ k \end{matrix} \right\} - g^{k\alpha} \left\{ \begin{matrix} \alpha\lambda \\ i \end{matrix} \right\} \right). \tag{134}$$

Dans le cas où $\lambda = k$, la formule (134) devient, en sommant :

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_k \frac{\partial\left(\sqrt{-g}\, g^{ik}\right)}{\partial x_k} \equiv - \sum_\alpha \sum_k g^{\alpha k} \left\{ \begin{matrix} \alpha k \\ i \end{matrix} \right\} \tag{135}$$

En vertu de (133), les symboles (126) deviennent

$$\begin{aligned} G_{\alpha,\beta} \equiv {} & \frac{\partial^2 \log(-g)^{\frac{1}{2}}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \sum_\tau \frac{\partial \log(-g)^{\frac{1}{2}}}{\partial x_\tau} \left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ \tau \end{matrix} \right\} \\ & + \sum_\sigma \left[\sum_\tau \left\{ \begin{matrix} \beta\tau \\ \sigma \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha\sigma \\ \tau \end{matrix} \right\} - \frac{\partial \left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ \sigma \end{matrix} \right\}}{\partial x_\sigma} \right] \equiv G_{\beta\alpha}. \end{aligned} \tag{136}$$

L'identité (135) permettrait de simplifier l'expression de C (125).

Dans le cas particulier où le déterminant g des potentiels se réduit identiquement à une constante, les expressions (136) se simplifient immédiatement par la disparition des termes qui figurent dans la première ligne du second membre.

13. *Les invariants du mouvement dans le champ gravifique d'Einstein et de Schwarzschild.*

Remarquons d'abord que le δs^2 (120) de ce champ gravifique ne dépend pas essentiellement de la valeur donnée à A qui figure dans (113) et (116). Nous prendrons, pour plus de simplicité,

$$A \equiv -1. \tag{137}$$

On aura (116)

$$R \equiv r \tag{138}$$

et (115, 120)

$$\left.\begin{aligned} B &\equiv -\frac{\alpha}{r^2(r-\alpha)} \\ D &\equiv c^2\frac{r-\alpha}{r} \end{aligned}\right\} \tag{139}$$

En coordonnées rectangulaires, le δs^2 du champ gravifique considéré pourra s'écrire :

$$\delta s^2 \equiv -\sum_i (\delta x_i)^2 - \frac{\alpha}{r^2(r-\alpha)}\sum_i (x_i \delta x_i)^2 + c^2\frac{r-\alpha}{r}(\delta t)^2$$
$$i = 1, 2, 3$$

où

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2. \tag{140}$$

Étudions les invariants des extrémales de ce champ (140). Celui-ci possédant la symétrie sphérique pure, nous avons vu que chacune de ces extrémales se trouve dans un plan fixe passant par l'origine. Prenons le plan de l'extrémale considérée comme plan des x_1, x_2 ; on aura donc $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Dans ce plan, le δs^2 s'écrira (120, 138) :

$$\delta s^2 \equiv -\frac{r}{r-\alpha}\delta r^2 - r^2\delta\varphi^2 + c^2\frac{r-\alpha}{r}\delta t^2. \tag{141}$$

De (141) il résulte qu'on aura le long de l'extrémale considérée :

$$1 \equiv -\frac{r}{r-\alpha}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - r^2\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 + c^2\frac{r-\alpha}{r}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2. \tag{142}$$

En vertu de (111) et de (114), on aura, dans ce plan $\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$, l'invariant du mouvement dans l'espace-temps

$$r^2 \frac{d\varphi}{ds} \equiv \beta, \qquad (143)$$

où β représente une constante encore arbitraire.

Enfin, le champ étudié étant stationnaire, par hypothèse, on aura l'invariant (99) qui se réduit ici (141) à

$$c^2 \frac{r - \alpha}{r} \frac{dt}{ds} \equiv \gamma, \qquad (144)$$

où γ représente une constante encore arbitraire.

Combinons les invariants (142, 143 et 144) afin de trouver une relation entre les éléments purement géométriques r et φ; éliminons ds et dt au moyen de (143) et (144) ; la relation (142) devient ainsi

$$\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{\beta^2}\left(-1 + \frac{\gamma^2}{c^2}\right) + \frac{\alpha}{\beta^2} \cdot \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} + \frac{\alpha}{r^3}. \qquad (145)$$

En vertu de (144), on a

$$c^2 \frac{r - \alpha}{r} \left[c^2 \frac{r - \alpha}{r} \left(\frac{dt}{ds}\right)^2\right] = \gamma^2,$$

ce qui donne, grâce à (142) :

$$-c^2 \frac{\alpha}{r} + c^2 \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + c^2 r (r - \alpha) \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = \gamma^2 - c^2. \qquad (146)$$

Comparons la relation (145) à celle qui relie le rayon vecteur r à l'anomalie vraie φ dans le mouvement planétaire suivant la loi de Newton (*) ; d'où

$$\frac{\alpha}{\beta^2} \sim \frac{2\mu}{C^2} \tag{147}$$

$$\frac{-c^2 + \gamma^2}{c^2\beta^2} \sim \frac{h}{C^2}. \tag{148}$$

De même, comparons la relation (146) à celle qui exprime la conservation de l'énergie dans le mouvement planétaire suivant la loi de Newton ; d'où

$$\alpha c^2 \sim 2\mu \tag{149}$$

$$\gamma^2 - c^2 \sim h. \tag{150}$$

De (147) à (150), il résulte que

$$\left.\begin{aligned} C &\sim c\beta \\ h &\sim \gamma^2 - c^2 \\ \mu \equiv Mf &\sim \frac{\alpha}{2} c^2 \end{aligned}\right\} \tag{151}$$

où M représente la masse du Soleil et où f représente la constante de l'attraction newtonienne.

Rappelons que

$$\mu = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2},$$

d'où

$$\alpha \sim \frac{8\pi^2 a^3}{c^2 T^2}. \tag{152}$$

(*) P. Appel, *Traité de mécanique rationnelle,* t. Ier, 1893, p. 365.

14. *Mouvement du périhélie.* — Reprenons l'équation (145) et posons

$$\sigma \equiv \frac{1}{r}. \tag{153}$$

Désignons par σ_0, σ_1, σ_2 les trois racines du second membre de (145) ; on aura

$$d\varphi = \frac{d\sigma}{\pm\sqrt{\alpha(\sigma - \sigma_0)(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)}}. \tag{154}$$

Dans le cas du système solaire, les racines σ_0, σ_1, σ_2 sont *positives*; l'une d'elles est très grande, à cause de la petitesse de α (152); posons $\sigma_0 > \sigma_1 > \sigma_2$, et (*)

$$\sigma \equiv \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos\theta, \tag{155}$$

où θ représente une nouvelle variable. De (155), il résulte que

$$\left.\begin{aligned} (\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2) &\equiv -\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2}{4} \sin^2\theta \\ d\sigma &\equiv -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin\theta\, d\theta \end{aligned}\right\} \tag{156}$$

Substituons dans (154), d'où

$$d\varphi = \frac{d\theta}{\pm\sqrt{\alpha\left(\sigma_0 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\cos\theta\right)}}. \tag{157}$$

Le σ varie entre σ_1 et σ_2, qui correspondent respectivement au périhélie et à l'aphélie; en vertu de (155), deux périhélies

---

(*) Weil, p. 204 de l'ouvrage cité plus haut.

successifs correspondent à $\theta = 0$ et $\theta = 2\pi$. Intégrons donc (157) entre 0 et 2π; d'où

$$\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\pm\sqrt{\alpha\left(\sigma_0 - \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\cos\theta\right)}} \tag{158}$$

Très approximativement on peut, sous le signe d'intégration, négliger $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\cos\theta$; d'où

$$\left.\begin{aligned}\varphi &= \frac{2\pi}{\pm\sqrt{\alpha\left(\sigma_0 - \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)}} = \frac{2\pi}{\pm\sqrt{1 - \frac{3\alpha}{a(1-e^2)}}} \\ &\sim \pm 2\pi\left[1 + \frac{3\alpha}{2a(1-e^2)}\right]\end{aligned}\right\} \tag{159}$$

à cause de (145) :

$$\alpha(\sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2) = 1$$

et de

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 2[a(1-e^2)]^{-1}.$$

En vertu de (159), on voit que *le périhélie avance d'un angle égal en valeur absolue à*

$$\frac{3\alpha}{2a(1-e^2)};$$

on a pris le tour complet comme unité d'angle.

Ce résultat a été vérifié numériquement pour Mercure.

Séance du 5 juillet 1919.

M. A. Gravis, vice-directeur, occupe le fauteuil.

M. L. Le Nain, secrétaire de la Commission administrative, ff. de secrétaire perpétuel.

M. A. Rutot, secrétaire de séance.

Sont présents : MM. Léon Fredericq, Paul Pelseneer, A. Lameere, Ch.-J. de la Vallée Poussin, Frédéric Swarts, Jean Massart, A. de Hemptinne, Victor Willem, Paul Stroobant, Ch. Julin, J. Verschaffelt, G. Lecointe, Emile Marchal et J. Cornet, *membres;* M. Stuyvaert et A. Brachet, *correspondants*.

Le procès-verbal de la dernière séance est lu et approuvé.

M. le Directeur exprime les félicitations de la Classe à M. Cesàro, lauréat du Prix Gegner de l'Institut de France, élu membre ordinaire de l'Académie des sciences physiques et mathématiques d'Italie, membre honoraire de la Société française de minéralogie, membre correspondant de l'Académie des sciences de Rouen, ainsi qu'à M. Paul Pelseneer, qui a obtenu le Prix Cuvier de l'Institut de France, et à M. Charles Julin, élu correspondant de la Société de biologie de Paris. *(Applaudissements.)*

M. Pelseneer demande où en est la question de la Fondation de Potter.

M. le Secrétaire perpétuel ff. répond que tout sera terminé pour octobre et que les fonds seront mis à la disposition de l'Académie.

CORRESPONDANCE.

M. le Ministre des Sciences et des Arts transmet une expédition de l'arrêté royal du 10 juin approuvant les modifications votées par l'assemblée générale aux articles 13 et 20 des statuts organiques.

— Les membres et associés élus à la séance de juin adressent leurs remerciements.

— M. Lucien Godeaux remercie pour le Prix Deruyts qui lui a été décerné.

— La Société chimique de Belgique fait connaître qu'elle a rayé de la liste de ses membres tous ceux appartenant aux nations ennemies.

— M. Henri Wilmotte demande à pouvoir prendre copie de son mémoire sur la *Nature de l'énergie*, qui a été déposé aux archives. — Accordé.

— M. Maurice Noblom, de Watermael, fait don de quelques lettres de J.-B. Van Mons, membre de l'Académie, et qui ont trait à des expériences de chimie. — Remerciements.

M. Cesàro adresse la lettre reproduite ci-après :

Aux Membres de la Classe des sciences
de l'Académie royale de Belgique.

Chers Confrères,

Je vous remercie pour la marque d'estime et de sympathie que vous m'avez donnée en me nommant Directeur de la Classe pour 1919. Cependant je me vois forcé à ne pas accepter ce mandat pour les raisons suivantes.

Les statuts organiques de notre Académie portent :

> Art. 10. — Chaque Classe nomme son directeur annuel. Le directeur n'est pas immédiatement rééligible.
>
> Art. 11. — Le Roi nomme pour *la présidence annuelle* un des trois directeurs.

Vous m'avez nommé Directeur de la Classe en 1915 et le Gouvernement m'a élu Président de l'Académie pour la même année; cette dernière nomination est parue au *Moniteur* assez tard et m'a été confirmée, sur ma demande, par le Ministre des Sciences et des Arts.

A présent une question se pose : Les mandats relatifs à l'année 1915 doivent-ils être considérés comme virtuellement remplis malgré que l'Académie n'ait pas fonctionné, ou bien l'année 1919 doit-elle être envisagée comme succédant à 1914 dans la réelle existence de l'Académie et, par conséquent, les mandats attribués pour 1915 ne doivent-ils pas tout simplement être exercés, après confirmation, pendant l'année 1919?

La Classe des sciences, par ma réélection, a opiné dans le second sens; le Gouvernement, en nommant un nouveau Président, s'est rallié à la première interprétation.

En ce qui me concerne, *ne pouvant évidemment avoir qu'une seule opinion,* pour éviter toute contestation pouvant faire penser que je veuille entrer en litige avec un confrère que j'honore hautement, et pour sa science, et pour le grand exemple de force morale qu'il vient de donner au monde, je me rallie à l'interprétation du Gouvernement.

Je vous présente encore une fois, chers Confrères, l'expression de toute ma gratitude.

G. Cesaro.

Liége, 21 juin 1919.

P. S. — Je demande à la Classe que cette lettre paraisse *en entier* dans le *Bulletin* de la séance.

Les regrets de la Classe seront exprimés à M. Cesàro.

Il est décidé de ne pas élire un Directeur en remplacement de M. Cesàro. Le vice-directeur M. Gravis sera éventuellement remplacé par le doyen d'âge. M. Gravis accepte en outre de présider les réunions du Conseil international de Recherches.

TRAVAUX A L'EXAMEN.

M. le docteur Léon Bertrand communique un mémoire intitulé : *Une maladie des plaques photographiques due à un bacille sporulé aéro-anaérobie.* Commissaires : MM. Bordet et Marchal.

RAPPORTS.

Sur un avis de M. Cesàro, deux lettres de M. Smekens relatives à la quadrature du cercle seront déposées aux archives.

— Sur un rapport de M. Bordet, un mémoire de M. Alfred Scholl : *De l'avortement épizootique des juments,* sera renvoyé à l'auteur pour qu'il continue ses recherches.

HOMMAGES D'OUVRAGES.

Contribution à l'étude des minéraux du Vésuve et du Monte-Somma (et onze autres brochures publiées à l'étranger de 1914 à 1918), par G. Cesàro ;

— *Élimination d'une inconnue entre plusieurs équations algébriques,* par Modeste Stuyvaert ;

— *La vie mode de mouvement,* par E. Préaubert (présenté par M. Rutot).

— Remerciements.

CHOIX D'UN ÉDITEUR.

La Commission administrative s'occupera de préparer un accord avec un éditeur et tiendra la Classe au courant.

LES LITTÉRATEURS A L'ACADÉMIE.

M. le Secrétaire perpétuel ff. demande à la Classe si elle serait désireuse d'entendre une communication d'un membre de la Classe des beaux-arts au sujet de l'entrée à l'Académie des littérateurs.

Après discussion, la Classe croit qu'il est préférable de ne pas aborder l'examen de questions ne figurant pas à l'ordre du jour.

DÉLÉGATION DE LA CLASSE AU COMITÉ DE RECHERCHES.

Sont nommés :

Physique, M. de Hemptinne;
Astronomie, M. Lecointe;
Géodésie et *cartographie*, M. Stroobant;
Sismologie, M. Lecointe;
Météorologie, M. Stroobant;
Mathématiques, M. de la Vallée Poussin;
Géologie, M. Max Lohest;
Chimie, M. Swarts;
Biologie, M. Massart;
Médecine, M. le Dr P. Heger;
Exploration de l'océan, M. Pelseneer;
Brevets, M. Lafontaine;
Télégraphie sans fil, M. Widier;
Art de l'ingénieur, MM. Trasenster, Habets;
Conseil international de recherches, M. Lecointe.

M. Stroobant propose à la Classe de tenir une séance pendant la réunion des Académies interalliées, afin de permettre à certains membres étrangers de faire des communications.

Après discussion et malgré l'avis favorable de plusieurs membres, la Classe décide de ne pas tenir de séance extraordinaire en présence des difficultés nombreuses de réalisation.

L'idée d'une réception du soir est également abandonnée pour les mêmes raisons.

COMMUNICATIONS ET LECTURES.

Physico-chimie. — **La loi de Faraday et l'action de l'effluve électrique sur les oxydes métalliques**

(*Deuxième communication*),

par A. de Hemptinne, membre de la Classe.

Les recherches décrites dans ce travail ont été effectuées durant le premier semestre de 1918 (sous l'occupation allemande); elles ont pour objet, d'une part, la mesure quantitative de l'hydrogène fixé sous forme d'eau lors de la réduction de l'oxyde de plomb par l'effluve électrique, et, d'autre part, la quantité d'énergie électrique nécessaire pour effectuer cette réduction.

Elles ont été accomplies dans des conditions très pénibles. Des officiers allemands, en effet, malgré mes protestations, avaient pris tous les moteurs électriques de mon laboratoire; heureusement il m'a été possible de me procurer en fraude un petit moteur de force suffisante pour actionner l'alternateur qui m'était resté. Caché dans la partie supérieure de mon laboratoire, j'ai pu me soustraire à d'autres réquisitions et visites domiciliaires, et continuer mes recherches.

L'obligation de parer par toutes sortes de moyens de fortune au manque d'appareils et d'objets d'usage courant qu'il était impossible de se procurer durant l'occupation allemande, ne m'a pas permis de faire les expériences aux pressions très réduites dans de bonnes conditions. Les autres résultats, fruit de nombreuses déterminations, sont d'une exactitude satisfaisante. D'ici peu, j'espère pouvoir achever ces recherches avec des instruments de mesure assez sensibles.

L'appareil à effluve se composait de deux plaques en verre très épais, de 52 centimètres de diamètre, maintenues à 12 millimètres l'une de l'autre par un joint. Elles étaient pourvues d'ouvertures pour l'introduction du gaz, pour un manomètre et l'amenée du courant. L'espace vide contenait une plaque de plomb oxydée de 3 millimètres d'épaisseur et de 31 centimètres de diamètre; elle constituait l'une des électrodes. Au-dessus d'elle, une plaque en verre de 37 centimètres de diamètre était maintenue à une distance fixe par des fragments de substance isolante. La face supérieure de cette plaque, garnie d'une feuille d'étain de 31 centimètres de diamètre, formait la seconde électrode. De petites nacelles contenaient de la potasse caustique anhydre et de l'anhydride phosphorique, et étaient disposées autour de la plaque en plomb.

La figure 1 représente une coupe de l'appareil.

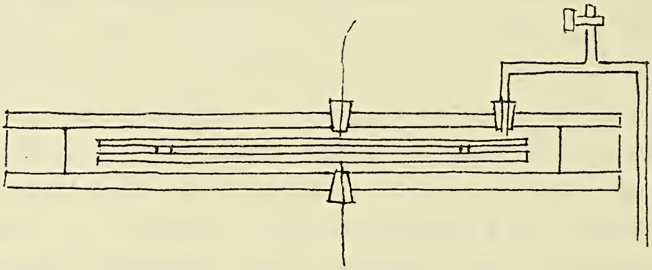


Fig. 1.

Comme source d'énergie électrique, j'ai utilisé un courant alternatif de 150 périodes, transformé à la tension convenable. Celle-ci était mesurée par un voltmètre électrostatique approprié, de très petite capacité. L'intensité du courant était mesurée au moyen d'un thermo-élément minuscule dont l'échauffement produit par le courant alternatif provoquait un courant et la déviation de l'aiguille d'un galvanomètre Deprez-d'Arsonval. L'intensité du courant alternatif était estimée par comparaison avec l'effet d'un courant continu.

De l'hydrogène pur et sec était introduit dans l'appareil à la pression choisie. L'observation cathétométrique du niveau du mercure du manomètre permettait de mesurer la diminution de la pression. Elle est due à la combinaison de l'hydrogène avec l'oxygène de l'oxyde métallique et à la fixation de l'eau formée par la potasse caustique.

De la connaissance du volume de l'appareil (850 centimètres cubes dans le cas actuel) et de la diminution de la pression, on peut déduire le nombre N de molécules d'hydrogène disparues, en admettant que 1 centimètre cube de gaz contient, à la pression de 760 millimètres et à 0°, 3.10^{19} molécules. D'autre part, il est aisé de calculer le nombre N' d'ions qui correspondent aux nombres de coulombs utilisés, à condition de leur attribuer la même charge que celle des ions électrolytiques.

J'admets provisoirement qu'ils sont formés par un électron négatif détaché de la molécule d'hydrogène; l'ion positif est alors constitué par la molécule privée de son électron.

Trois hypothèses sont possibles :

1° La réduction s'effectue par l'intervention des électrons négatifs; ils agiraient en abandonnant leur charge au métal et en provoquant la libération d'atomes d'oxygène dont l'état naissant favoriserait leur combinaison avec les molécules d'hydrogène;

2° La réduction s'effectue par les ions positifs ou molécules actives d'hydrogène;

3° Les deux effets décrits ci-dessus ont lieu en même temps. Dans cette hypothèse, le nombre de molécules d'hydrogène combinées sera égal au nombre d'ions positifs et négatifs qui viennent en contact avec l'électrode oxydée; le rapport $\frac{N}{N'}$ sera égal à l'unité. Dans le cas de l'une des deux premières hypothèses, ce rapport sera égal à 0.5, car le courant étant alternatif, l'activité des ions d'une espèce est limitée à la moitié d'une période.

Le tableau suivant résume les résultats d'un grand nombre d'expériences. En me basant sur des expériences antérieures, j'ai admis que l'effet de décalage aux pressions inférieures à 278 millimètres était négligeable; pour la pression de 577 millimètres dans le calcul de l'intensité du courant, j'ai tenu compte d'un décalage de $\cos \varphi = 0.5$.

Le voltage a été réglé de manière à opérer avec une tension aussi faible que possible. De cette façon, on réduit à un minimum les effets calorifiques ; la tension doit cependant être suffisante pour obtenir une bonne effluve, c'est-à-dire une luminescence bien uniforme.

On remarque qu'aux basses pressions les tensions nécessaires pour le passage de l'effluve croissent. Cet effet s'accentue surtout au voisinage de la pression critique ; pour maintenir l'intensité du courant constante dans ce voisinage, il faut constamment augmenter la tension. L'effluve tend de plus en plus à se concentrer au bord des électrodes. Ces effets rendent les observations délicates aux très basses pressions. Si l'expérience n'est pas de trop longue durée et l'intensité du courant assez faible, on peut admettre que la surface de l'électrode n'est que peu modifiée ; par suite, l'erreur commise en considérant l'action chimique comme constante pendant toute la durée de l'expérience est négligeable vis-à-vis des autres causes d'erreur. Il y a donc lieu de réoxyder fréquemment la surface de l'électrode.

Pressions en mm.	Distance d'électrodes en mm.	Tensions volts.	Intensités milli-ampères.	Durée de l'expérience en minutes.	$\frac{N}{10^{18}}$	$\frac{N'}{18^{18}}$	$\frac{N}{N'}$
2.8 3.5	1	300 250	0.50	60′	22	12.6	1.8
2.0 2.4	3	366 355	0.36	30′	12.6	4.5	2.8
10	1	237	0.35	60′	31.5	8.2	3.8
10	3	355	0.87	30′	37.8	10.8	3.5
10	3	262	0.83	20′	25.2	7.0	3.5
30	1	377	0.99	15′	31.5	6.2	5.5
30	1	287	0.45	15′	78.8	5.2	5.1
30	3	415	0.99	15′	54.6	6.2	5.4
278	3	1200	2.40	3′	36.5	3.0	19.7
577	1	1550	1.86	5′	80.5	3.8	21.7
577	3	1750	1.95	3′	50.9	2.4	24.0

On remarquera que le rapport $\frac{N}{N'}$ du nombre de molécules fixées au nombre total d'ions ou d'électrons est sensiblement constant pour les expériences faites à une même pression. Ceci prouve que les effets à une pression donnée sont proportionnels à l'intensité du courant et indépendants de la distance des électrodes et de la tension.

Ces résultats confirment ceux trouvés antérieurement par une autre méthode.

La valeur du rapport décroît à mesure que la pression diminue et tend vers l'unité. Au voisinage de la pression critique, l'effet chimique correspond au nombre de coulombs utilisés, en admettant que l'action des ions soit semblable à celle des électrons. Il semble étrange que des particules positives et négatives agissent de même; à première vue, cette hypothèse semble peu admissible. Cependant les recherches faites sur l'action chimique des rayons cathodiques et des rayons canaux rendent cette interprétation probable, si l'on admet que les particules négatives sont de même nature que celles qui constituent les rayons cathodiques et les ions positifs de même nature que les particules des rayons canaux. En effet, Schmidt, Villard et Bose ont mis en évidence les propriétés réductrices des rayons cathodiques. Suivant Schmidt, les électrons agissent en saturant l'atomicité positive du métal, ce qui a pour conséquence la libération des éléments négatifs. Schmidt a encore étudié l'action des rayons canaux; les particules positives qui les composent réduisent ou oxydent suivant la nature du gaz ; dans l'hydrogène il y a réduction, dans l'oxygène oxydation. Que se passe-t-il alors dans le cas de l'effluve électrique? Pendant une moitié de la période, l'oxyde métallique se trouve sous l'action des électrons, ceux-ci saturent les atomicités positives du métal et libèrent un atome d'oxygène qui se combine à une molécule d'hydrogène. Les particules positives ou ions agissent autrement : ce sont des molécules particulièrement actives à cause du départ d'un électron; elles s'emparent tout simplement d'un atome d'oxygène fixé au plomb.

Si l'identité des particules qui constituent les rayons cathodiques et les rayons canaux avec celles de l'effluve électrique semble probable, ces dernières sont certainement animées d'une vitesse beaucoup moins grande; elles sont, en effet, sollicitées par des différences de potentiel beaucoup plus faibles; leur chemin libre moyen est beaucoup plus petit. Leur énergie cinétique sera donc sensiblement moindre.

La différence d'énergie cinétique peut-elle avoir pour conséquence une différence dans les effets chimiques ? Cela est possible, car l'énergie cinétique produit des effets calorifiques. Il est donc désirable de tâcher de déterminer par des expériences directes l'activité chimique propre des ions et des électrons.

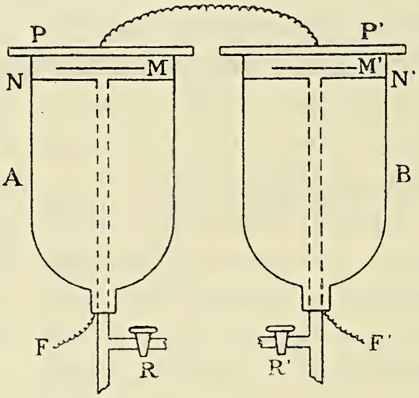


Fig. 2.

La première idée qui se présente à l'esprit est d'utiliser les appareils représentés figure 2 déjà décrits, mais en opérant avec un courant électrique continu de haute tension. Si l'électrode M est reliée au pôle positif et l'électrode M' au pôle négatif, la première subira l'action des électrons et la seconde celle des ions; si l'activité chimique de ces deux genres de particules n'est pas la même, les différences se manifesteront par une différence de la variation de pression du gaz dans les deux appareils. Malheureusement, si l'on tente de réaliser cette expérience, les diélectriques interposés se percent; ils ne peuvent résister à l'action continue d'une très forte tension toujours dirigée dans le même sens. Il faut donc procéder d'une autre manière.

L'utilisation d'un courant alternatif et l'interposition d'un tube-soupape dans le circuit donnent un courant pulsant plus ou moins dirigé. Les diélectriques ne se brisent pas dans ces conditions, mais ces dispositifs ont pour conséquence une dissymétrie notable dans les conditions du passage de l'énergie électrique dans les deux appareils disposés en série. Cette dissymétrie enlève toute valeur aux observations. Après de nombreux tâtonnements, j'ai finalement réalisé un dispositif qui, à première vue, semble réunir toutes les conditions désirables : courant dirigé à interruption rapide, de manière à éviter la rupture des diélectriques interposés, symétrie complète pour les deux appareils. Ce dispositif consistait en une sorte d'interrupteur rotatif constitué par un cylindre en matière isolante; des pièces métalliques en cuivre sont incrustées dans ce cylindre par couples séparés. Il y a autant de couples qu'il y a de pôles à l'alternateur. Quatre couples de balais frottent sur le cylindre, les circuits se ferment lorsque les charbons frottent sur les parties métalliques. Le cylindre rotatif est relié à l'axe de l'alternateur. Si tout est convenablement réglé et que les balais sont reliés d'une part aux pôles du secondaire du transformateur et d'autre part aux électrodes des appareils, les contacts s'établissent chaque fois que le courant est dirigé dans un sens déterminé. On place en outre dans les circuits des tubes en U contenant une solution alcaline, un indicateur et des voltamètres minuscules, capables de mettre en évidence la formation de quelques millimètres cubes d'hydrogène. Si l'on opère sans interposer les appareils à l'effluve, une expérience de contrôle démontre à l'évidence que le dispositif produit un courant dirigé. On constate rapidement une coloration à l'un des pôles des tubes en U. Les appareils à effluve ont ensuite été introduits dans le circuit; grâce au dispositif décrit ci-dessus, les électrodes M et M' étaient respectivement reliées aux pôles positif et négatif du transformateur, et cela à des intervalles très rapprochés. Le courant était réglé de manière à avoir une effluve bien uniforme.

Après une action prolongée pendant dix heures sur des électrodes recouvertes d'oxyde de plomb pulvérisé, et dans une atmosphère d'hydrogène à la pression de 10 millimètres, on a constaté une ascension de 1 millimètre dans chaque appareil. Dans l'une des branches de chaque tube en U, le liquide était faiblement coloré.

Peut-on conclure avec certitude de cette expérience que l'action des ions et des électrons est la même? Je ne le crois pas, car si d'une part la coloration du liquide atteste que le courant était dirigé dans un sens déterminé, d'autre part on n'a constaté aucune bulle dans les voltamètres. Il faudrait en conclure qu'il n'y a eu qu'une très minime fraction du courant dirigée, insuffisante pour déceler une différence d'activité des ions et des électrons, si elle existe.

Comment se fait-il que le dispositif dont le fonctionnement donnait toute satisfaction à circuit fermé, sans les appareils à effluve, semble fonctionner imparfaitement?

L'explication est peut-être la suivante :

Les appareils à effluve constituent plus ou moins des condensateurs; pour le courant dirigé, le diélectrique oppose une grande résistance, l'électricité s'accumule sur le diélectrique et se redécharge en partie par le collecteur. Cette décharge a sans doute lieu au moment où les balais cessent leur contact avec les parties métalliques du collecteur, car à ce moment la tension produite par le transformateur a déjà diminué. A ce moment, il se produit également des étincelles à chaque balai; il en résulte peut-être une décharge oscillante; les électrodes passeraient alors par une succession d'états positifs et négatifs.

On voit par ce qui précède combien il est difficile de réaliser une expérience absolument concluante; je dois avouer que malgré des mois de labeur je n'y suis pas encore parvenu d'une façon complète. Je me propose de reprendre des recherches avec des substances radioactives. Au mois d'avril 1918, j'ai fait une expérience qui semble démontrer que l'action du radium sur un oxyde métallique en présence d'hydrogène produit une réduction. Malheureusement je ne possédais qu'une très petite quantité de radium; un accident survenu à l'appareil m'en a privé complètement, ce qui m'a obligé à suspendre momentanément mes recherches.

En résumé, à mesure que l'on opère à une pression plus réduite, la relation entre l'intensité du courant de l'effluve électrique et l'effet chimique devient plus intime; la limite se trouve au voisinage de la pression critique. Les ions et les électrons semblent produire également des effets de réduction.

En terminant ce travail, je tiens à remercier mon assistant, M. L. Stappers, pour le concours patient et dévoué qu'il m'a donné pendant ces recherches, faites dans des conditions particulièrement difficiles.

BOTANIQUE. — **Les « Taraxacum » de graine sont-ils différents des « Taraxacum » de bouture?**

par JEANNE TERBY (¹).

En 1903, M. Raunkiaer a démontré que certains *Taraxacum* (Pissenlits) peuvent, sans fécondation, produire des graines capables de germer. Des expériences faites par l'auteur sur une douzaine d'espèces différentes de *Taraxacum*, l'ont amené à considérer ce genre comme habituellement parthénogénétique.

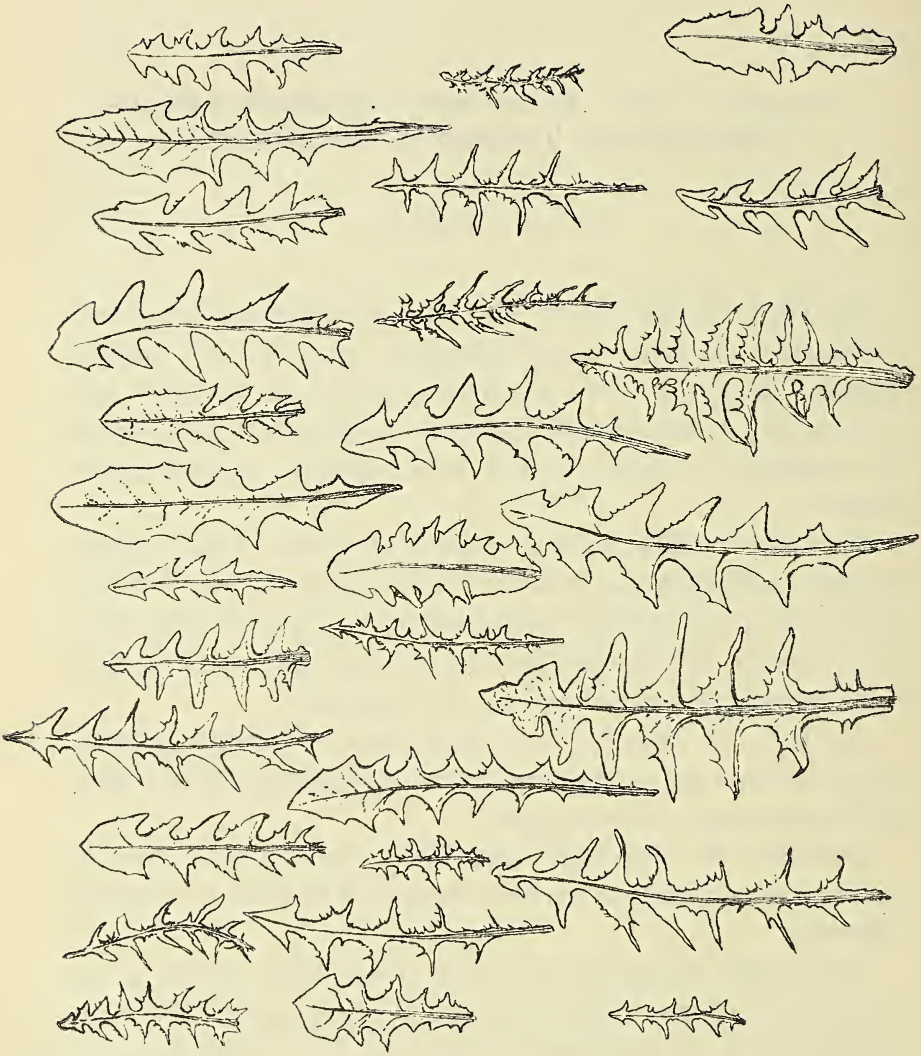
En 1904 et 1905, M. Juel, examinant de près ce qui se passe dans les cellules du sac embryonnaire, a découvert que ces dernières ne subissent pas la réduction chromatique ; c'est grâce à cette absence de réduction que *Taraxacum* peut se développer sans fécondation. C'est donc un cas d'apogamie.

En 1911, M. Hagedoorn a communiqué au Congrès de génétique de Paris des expériences d'où il résulte que, par le semis, les *Taraxacum* varient à peine.

Pourtant M. Raunkiaer, dès 1903, avait montré que le nombre des espèces (ou variétés stables) de Pissenlits est considérable.

Il est fort intéressant de savoir d'une façon précise si un organisme tel que *Taraxacum*, où il n'y a pas de réduction chromatique, se maintient constant ou s'il est tout de même capable de varier.

(¹) Présenté par M. J. Massart.



Variétés de *Taraxacum intermedium.*

Taraxacum se prête très bien à ce genre d'expérience puisque :

a) Les différences entre les individus se manifestent déjà dans le feuillage ;

b) Les plantes fleurissent dès la première année;

c) Elles sont pourtant vivaces, ce qui permet de les comparer entre elles pendant un grand nombre d'années de suite;

d) La plante se multiplie aisément par voie végétative, par simple fragmentation des racines.

Il est donc facile, avec le Pissenlit, d'avoir comparativement des plantes provenant du bouturage des racines et d'autres provenant de semences, c'est-à-dire ayant passé par un état de vie latente dans le fruit desséché.

Voici comment j'ai procédé :

Après avoir récolté un grand nombre d'individus de *Taraxacum*, dans des endroits aussi différents que possible : bois, prairies, dunes, bords des chemins, etc., je choisis parmi ces plantes une trentaine d'individus, ceux qui offraient entre eux les plus grandes différences de forme : les uns avaient des feuilles presque entières; d'autres, des feuilles fortement découpées, et il n'y avait pas deux plantes dont les découpures fussent semblables, comme le montre la série de reproductions de photographies de la planche ci contre.

Ces individus furent cultivés dans un jardin, et j'en récoltai les semences après avoir entouré chaque hampe, par surcroît de précaution, d'un sac de parchemin pendant que l'inflorescence était encore en bouton.

Les semences de chaque plante et de chaque inflorescence furent semées séparément, en pot, en terre stérile (prise à la profondeur de 60 centimètres).

Les racines des plantes mères furent bouturées, et les boutures placées d'abord en pot, en terre stérile, puis repiquées dans un terrain d'expérimentation exactement comme les plantes provenant de graines.

Je pris aussi un certain nombre d'individus provenant de boutures de racines d'une douzaine de plantes mères différentes et je divisai ces boutures de chaque plante en deux lots qui furent plantés, en vue d'une comparaison, l'un dans du limon, l'autre dans du sable.

L'expérience comportait donc les catégories suivantes de plantes :

1° Des individus provenant d'une même plante et d'un même capitule : ils étaient identiques entre eux et à la plante qui leur avait donné naissance;

2° Des individus provenant d'une même plante, mais de capitules différents : ils étaient identiques entre eux et à la plante dont ils tiraient leur origine:

3° Des individus provenant de boutures de racines d'une même plante : ils étaient identiques entre eux, identiques à la plante mère, et identiques aussi aux individus provenant de semences de la même plante mère.

Ces trois catégories de plantes étaient cultivées dans la même terre (limon);

4° Il y avait enfin des individus provenant de boutures de racines d'une même plante et cultivés, les uns dans du limon, les autres dans du sable : ils étaient identiques entre eux, mais un peu plus pâles dans le sable.

Dans le but de continuer une deuxième année les expériences, je choisis un individu de chaque type provenant de graines et j'en récoltai les semences exactement comme j'avais récolté celles de la plante mère.

Je choisis aussi un individu de chaque type provenant de racine et je le bouturai comme j'avais bouturé la plante mère.

Au moyen de ce matériel, je recommençai l'année suivante les mêmes expériences et obtins des résultats identiques à ceux de la première année.

De ces résultats nous pouvons tirer les conclusions suivantes :

Chez *Taraxacum,* la situation des semences sur l'un ou l'autre capitule n'amène aucune variabilité chez les individus provenant de ces semences (voir n° 2).

Les conditions auxquelles un embryon est soumis dans sa semence n'ont aucune importance au point de vue de la variabilité, puisqu'une bouture de racine donne un individu identique à celui provenant d'une semence de la même plante (voir n° 3).

Le milieu favorable ou défavorable (limon ou sable) dans lequel la plante est cultivée, n'a aucune influence sur sa variabilité (voir n° 4).

Comme les semences ont été récoltées sur les plantes mères à des époques de l'année aussi différentes que possible, nous pouvons encore ajouter cette conclusion :

La saison dans laquelle *Taraxacum* produit des semences n'a aucune influence au point de vue de la variabilité.

Ces résultats ne démontrent-ils pas, une fois de plus, que seule la réduction chromatique peut amener la variabilité?

Il reste cependant à expliquer les grandes différences de forme présentées par les plantes mères elles-mêmes chez les *Taraxacum;* la solution de cette question exigera l'emploi d'autres méthodes expérimentales.

J'ai déterminé mes *Taraxacum* au moyen du tableau des variétés stables de Raunhiaer. Tous appartenaient à *intermedium*. Cette variété a pour caractéristiques : écailles extérieures de l'involucre divariquées ou recourbées, et anthères avec pollen dont la germination ne se fait pas.

Si tous les individus que j'ai récoltés appartiennent bien à cette espèce (variété stable), elle est elle-même composée d'un grand nombre de sous-variétés stables, très différentes entre elles par la forme et la profondeur des découpures du feuillage.

Ces expériences ont été faites à Bruxelles, dans le jardin de M^{me} Leo Errera, à laquelle j'exprime tous mes remerciements.

Je remercie bien vivement aussi M. le professeur J. Massart des précieux conseils qu'il m'a donnés.

BIBLIOGRAPHIE

RAUNKIAER, C. *Kimdannelse uden Befrugtning hos Maelkebotte.* (BOTAN. TIDSSKR., Bd 25, 1903, pp. 109-140.)

JUEL. *Die Tetradenteilung in der Samenanlage von Taraxacum.* (V. M. ARKIV F. BOTANIK, Bd 2, n° 4, 1904.)

JUEL. *Die Tetradenteilungen bei Taraxacum und anderen Cichoriaceen.* (KGL. SVENSKA VET. AKAD. HANDLINGAR, Bd 39, n° 4, 1905.)

ROSENBERG, O. *Ueber die Chromosomenzahlen bei Taraxacum und Rosa.* (SVENSK BOTANISK TIDSKRIFT. 1909, Bd 3, H. 2, S. 150.)

HAGEDOORN. *Conférence internationale de génétique.* (Paris, 1911.)

Séance générale extraordinaire des trois Classes le mardi 8 juillet 1919.

—

M. H. Pirenne, Président de l'Académie.

MM. Gravis, Waltzing et Brunfaut remplissent les fonctions de secrétaires.

Sont présents : MM. Alfred Gilkinet, C. le Paige, J. Deruyts, Léon Fredericq, J. Neuberg, Paul Pelseneer, M. Delacre, Auguste Lameere, G. Cesàro, Charles-J. de la Vallée Poussin, Max Lohest, Frédéric Swarts, Jean Massart, A. Rutot, A. de Hemptinne, Victor Willem, Paul Stroobant, Ch. Julin, J. Verschaffelt, G. Lecointe, Émile Marchal, J. Cornet, membres de la Classe des sciences.

MM. le comte Goblet d'Alviella, A. Prins, Paul Fredericq, le baron Descamps, Paul Thomas, Jules Leclercq, Maurice Wilmotte, Ernest Nys, M^{gr} Mercier, Jules Lameere, Albéric Rolin, Maurice Vauthier, Franz Cumont, J. Vercoullie, G. De Greef, Eugène Hubert, Maurice De Wulf, Ernest Mahaim, L. de la Vallée Poussin, Léon Parmentier, le Père Delehaye, Dom Ursmer Berlière, J. Bidez, G. Cornil, Émile Vandervelde, membres de la Classe des lettres.

MM. G. De Groot, Th. Vinçotte, J. Winders, Ch. Hermans, Émile Mathieu, F. Courtens, Léon Frédéric, Juliaan De Vriendt, Victor Rousseau, Lucien Solvay, Égide Rombaux, G. Hulin de Loo, Fernand Khnopff, Léon Du Bois, Victor Horta, Paul Bergmans, Adolphe Max, Ernest Verlant, Karel Mestdagh, membres de la Classe des beaux-arts.

MM. Louis Le Nain et Paul Pelseneer, qui ont été présentés comme candidats à la place de Secrétaire perpétuel, se retirent.

L'ordre du jour appelle l'élection du Secrétaire perpétuel.

Sur 69 votants	M. Le Nain obtient . . .	24 voix.
	M. Pelseneer » . . .	44 »
	Bulletin blanc	1 »
		69 voix.

En conséquence, M. Paul Pelseneer est proclamé élu. Son élection sera soumise à l'approbation de S. M. le Roi.

M. le Président exprime à M. Le Nain la reconnaissance de l'Académie pour l'activité intelligente et l'énergie qu'il a déployées en remplissant les fonctions de Secrétaire perpétuel, par intérim, de 1914 à 1919, à une époque où ces fonctions étaient particulièrement difficiles et délicates. Il espère que M. Le Nain voudra bien continuer à gérer les affaires du Secrétariat jusqu'à l'entrée en fonctions du nouveau Secrétaire perpétuel.

L'assemblée discute une question soulevée par la Classe des beaux-arts : l'admission des littérateurs à l'Académie royale de Belgique. Elle ne peut être résolue que par une Assemblée générale, parce qu'elle exige une revision du règlement. Mais comme elle n'est pas à l'ordre du jour, il faut se borner à délibérer et remettre le vote à une assemblée ultérieure.

Il y a deux solutions en présence : 1° celle de la Classe des beaux-arts, qui offre une place chez elle aux littérateurs ; 2° celle de l'Association des écrivains belges, reprise par M. Wilmotte : création d'une Classe nouvelle de quinze membres et cinq correspondants.

Après un échange de vues, il est décidé qu'une assemblée générale sera convoquée pour cet objet à 11 heures, le jour de la séance publique de la Classe des beaux-arts.

Séance du 2 août 1919.

M. A. **Gravis**, vice-directeur, occupe le fauteuil.
M. A. **Rutot**, secrétaire de séance.

Sont présents : MM. C. le Paige, P. Pelseneer, A. Lameere, Ch.-J. de la Vallée Poussin, Max Lohest, F. Swarts, J. Massart, A. Demoulin, A. de Hemptinne, V. Willem, P. Stroobant, Ch. Julin, J. Verschaffelt, G. Lecointe, É. Marchal, P. Nolf, J. Bordet, *membres;* A. Brachet, *correspondant.*

Absences motivées : MM. L. Fredericq et Cesàro, membres de la Classe ; M. L. Le Nain, secrétaire de la Commission administrative.

M. le Directeur félicite M. Demoulin, qui a obtenu le prix décennal des sciences mathématiques pures (1902-1912), et MM. Marchal, nommé chevalier de l'Ordre de Léopold, et Brachet, chevalier de la Légion d'honneur. *(Applaudissements.)*

Le procès-verbal de la dernière séance est lu et approuvé.

CORRESPONDANCE.

— M. Ch. Davenport remercie pour son élection d'associé.

— M^{me} Victor Desguin fait part du décès de son mari, ancien Président de l'Académie royale de médecine.

— M. le Ministre des Sciences et des Arts transmet une ampliation de l'arrêté royal du 17 juin approuvant l'élection de MM. Verschaffelt, Lecointe, Marchal, Cornet, Nolf et Bordet, en qualité de membres titulaires.

— Le même Ministre fait parvenir une expédition de l'arrêté royal du 24 juin décernant à M. A. Demoulin le prix décennal de mathématiques pures.

— M. J. Vincent, directeur honoraire de l'Institut royal météorologique, proteste au sujet du fait que cet établissement scientifique n'ait point été invité à participer aux réunions du Conseil international de recherches. M. Lecointe fournit à la Classe les explications nécessaires.

— A la demande de M. Cesàro, une lettre explicative sera adressée à M. Spelkens au sujet de sa communication relative à la quadrature du cercle.

HOMMAGES D'OUVRAGES.

— *Sur l'éther bromfluorpropyléthylique et l'éther fluorallyléthylique,* par Fr. Swarts.

— *Action du bromure de phénylmagnésium sur les dérivés polyhalogénés de l'éthane,* par le même.

— *La théorie atomique*, par Sir J. J. Thomson, traduit par Ch. Moureu, associé. (Présenté par M. Swarts.)

— *Notes ptéridologiques*, par le prince Bonaparte.

— *Savants du jour : Albin Haller*, par Ernest Lebon.

— *Essais de Paléontologie expérimentale*, par Charles Fraipont.

— Remerciements.

CONCOURS DÉCENNAUX.

M. Pelseneer informe la Classe de ce que le 31 décembre 1918 expirait la troisième période des prix décennaux :

A. Botanique (1909-1918);

B. Chimie et Physique expérimentale (1909-1918).

D'autre part expirait le 31 décembre 1916 la troisième période du prix décennal des sciences minéralogiques (1907-1916).

M. Pelseneer estime qu'il y aurait lieu de rappeler au Gouvernement qu'il devrait prendre l'initiative d'instituer le jury chargé d'examiner les mémoires présentés, à nommer sur présentation de dix personnes désignées par l'Académie. — Adopté.

M. Stroobant rappelle qu'il y a également lieu de rappeler le concours des sciences mathématiques, resté en suspens.

M Swarts fait observer que le mémoire à examiner avait été confié à un professeur de l'Université de Gand qui a disparu. Il est à craindre que le travail qu'il avait à juger ne puisse être récupéré. Le jury aura à reprendre cette question.

RAPPORTS.

Sur rapport verbal de M. de Hemptinne, un mémoire de M. W. Mund, *Sur les tensions de vapeur de l'anhydride sulfureux,* sera imprimé dans le *Bulletin*.

La Classe examine une proposition de M. de Hemptinne portant sur l'augmentation du nombre de membres de la Classe des sciences ou, éventuellement, la création d'une Section des sciences techniques.

Sur la proposition de M. Swarts, la motion suivante est votée à l'unanimité des membres présents :

« Sans être hostile à l'entrée des littérateurs à l'Académie, la Classe des sciences émet un avis défavorable au sujet de la création d'une Classe indépendante de littérature au sein de l'Académie. »

— M. Pelseneer demande que le compte rendu des séances du Comité international des Recherches paraisse au *Bulletin*. — Adopté. — Le compte rendu sera annexé à celui de la présente séance.

Il y a lieu également de constituer le Comité belge de Recherches.

MM. Lecointe, Pelseneer et Swarts sont chargés de faire rapport à ce sujet.

— M. Stroobant demande où en est, au point de vue de la remise de nos vœux au Gouvernement, la question des prérogatives de l'Académie.

Il est répondu que MM. Pirenne et Swarts ont élaboré un rapport.

GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE. — Sur les surfaces réglées, les surfaces cerclées et les surfaces à lignes de courbure sphériques dans un système,

par M. A. DEMOULIN, membre de l'Académie.

Ce travail est divisé en deux parties. Nous faisons usage, dans la première partie, de la méthode du trièdre mobile et, dans la seconde, de la méthode du pentasphère mobile (*).

PREMIÈRE PARTIE.

1. Soit α un plan mobile dépendant d'un paramètre u. Attachons à ce plan un trièdre trirectangle $Oxyz$ ou T, admettant le plan α comme face xOy. Soit, d'autre part, $O'x'y'z'$ ou T' un second trièdre trirectangle dépendant aussi de u. Les translations et rotations de T étant désignées par ξ, η, ζ, p, q, r, et celles de T' par ξ', η', ζ', p', q', r', supposons que l'on ait $\xi' = \xi$, $\eta' = \eta$, $r' = r$. Soit D le déplacement en vertu duquel T vient en coïncidence avec T'.

2. *Si un point de* xOy *décrit une trajectoire orthogonale à ce plan, le point qui lui correspond dans* D *décrira une trajectoire orthogonale à* x'O'y', *si ce plan est mobile; il sera fixe, si ce plan est fixe.*

(*) Cinq sphères deux à deux orthogonales étant rapportées à un système de coordonnées pentasphériques, nous appelons *pentasphère* l'ensemble de ces cinq sphères, les coordonnées de chacune d'elles (choisies de manière que la somme de leurs carrés soit égale à 1) étant données en grandeur et en signe.

Ce théorème conduit à la détermination, sous forme explicite, du couple le plus général de trièdres trirectangles ayant entre eux les relations indiquées.

Soient PXYZ, P'X'Y'Z' deux trièdres trirectangles dépendant de u et tels que les droites PX, PY, P'X', P'Y' engendrent des développables. Ces trièdres peuvent être définis par des formules débarrassées de tout signe d'intégration, car on sait déterminer sans intégration une courbe quelconque et une de ses développantes. Pour les trièdres PXYZ, P'X'Y'Z', les quantités ξ, η, r sont nulles. Cela posé, soit $Oxyz$ ou T un trièdre trirectangle dont la face xOy coïncide avec XPY et $O'x'y'z'$ ou T' un trièdre trirectangle dont la situation par rapport à P'X'Y'Z' soit la même que celle de $Oxyz$ par rapport à PXYZ. Les trièdres T et T' sont les trièdres cherchés.

Si l'on veut que la face $x'O'y'$ de T' soit fixe (auquel cas on aura $p' = q' = \zeta' = 0$), il suffira de prendre pour P'X'Y'Z' un trièdre fixe.

3. Soient M $(x, y, 0)$ un point quelconque du plan xOy et M' le point qui lui correspond dans D. Si ds, ds' désignent les éléments des trajectoires décrites par ces points, on a

$$ds^2 - ds'^2 = [(\zeta + py - qx)^2 - (\zeta' + p'y - q'x)^2]du^2. \tag{1}$$

4. Supposons que ζ', p', q' ne soient pas proportionnelles à ζ, p, q.

Soient g, g_1 les droites du plan xOy qui sont respectivement définies par les équations

$$\zeta' - \zeta + (p' - p)y - (q' - q)x = 0, \quad \zeta' + \zeta + (p' + p)y - (q' + q)x = 0,$$

et g', g'_1 les droites qui leur correspondent respectivement dans D.

En vertu de la relation (1), les surfaces R, R' engendrées par les droites g, g' sont applicables l'une sur l'autre et il en est de même des surfaces R_1, R'_1 engendrées par les droites g_1, g'_1. Les surfaces R, R_1 se touchent tout le long de la ligne (A) décrite par le point d'intersection A des droites g, g_1. De même, les surfaces R', R'_1 se touchent tout le long de la ligne (A′) décrite par le point d'intersection A′ des droites g', g'_1.

Soient $\overline{R}'$, $\overline{R}'_1$ les surfaces qui correspondent aux surfaces R', R'_1 dans la transformation D^{-1}, inverse de D. Les surfaces $\overline{R}'$ et R se raccordent suivant g. La symétrique de $\overline{R}'_1$ par rapport au plan ω tangent en A à R_1 se raccorde à R_1 suivant g_1. Si u varie, $\overline{R}'$ roulera sur R et le mouvement de $\overline{R}'_1$ sera un cas particulier du roulement à deux paramètres d'une surface sur une surface applicable, le lieu du point de contact étant la courbe (A).

Les surfaces R et R' (ou R_1 et R'_1) constituent le couple le plus général de surfaces gauches applicables l'une sur l'autre avec correspondance des génératrices rectilignes. D'après le n° 2, ces quatre surfaces peuvent être obtenues sans intégration.

5. Supposons à présent qu'on ait $\zeta' = h\zeta$, $p' = hp$, $q' = hq$, h désignant une fonction quelconque. Soient c la caractéristique du plan xOy et c' la droite qui lui correspond dans D. Si h est $\neq 0$, les droites c, c' engendreront, en général, deux développables applicables l'une sur l'autre avec correspondance des génératrices rectilignes. Si $h = 0$, le plan $x'O'y'$ coïncidera avec un plan fixe φ et on pourra définir, par des formules débarrassées de tout signe d'intégration, l'application de la développable, lieu de c sur le plan φ.

6. Les quantités ζ', p', q' ayant des valeurs quelconques, désignons par K une courbe quelconque tracée sur xOy et définie pour chaque position de ce plan, et par K′ la courbe qui lui correspond dans la transformation D. Soient M un point quelconque de K et M′ le point qui lui correspond dans D. *Si la tra-*

jectoire du point M est orthogonale à K, la trajectoire du point M' sera orthogonale à K' et vice versa.

7. Voici une première application de ce théorème. Supposons que le plan $x'O'y'$ coïncide avec un plan fixe φ et que K soit un cercle. Alors K' sera un cercle qui se déplacera dans φ. Or, M. Rouquet a déterminé, de la manière la plus générale, une famille de cercles tracés dans un plan et leurs trajectoires orthogonales. D'autre part (n° 2), on peut définir sans intégration les trièdres T et T'. Dès lors, en vertu du théorème du n° 6, *on peut exprimer par des formules débarrassées de tout signe d'intégration les coordonnées d'un point d'une surface cerclée en fonction du paramètre des génératrices circulaires et de celui de leurs trajectoires orthogonales.*

8. Supposons que la courbe K' qui figure dans l'énoncé du théorème du n° 6 engendre une développable isotrope. Dans l'hypothèse où ζ', p', q' ne sont pas proportionnelles à ζ, p, q, on peut, en se servant des résultats du n° 4, énoncer comme il suit, dans le cas présent, ledit théorème : *Soit* K *l'intersection du plan* ω *et d'une développable isotrope* Δ, *invariablement liée à* $\overline{\mathrm{R}}'$. *Lors du roulement de* $\overline{\mathrm{R}}'$ *sur* R, *le point d'intersection de* K *et d'une génératrice quelconque de* Δ *décrira une trajectoire orthogonale à* K (*).

9. Si Δ est un cône, K engendrera la surface cerclée la plus générale. Or, on peut définir sans intégration le roulement de $\overline{\mathrm{R}}'$ sur R. On a donc une deuxième solution du problème résolu plus haut (n° 7).

(*) Pour chaque position de g, le plan ω peut être choisi arbitrairement parmi les plans qui passent par cette droite.

10. Soient π un plan isotrope quelconque invariablement lié à $\overline{R}'$ et d sa trace sur ω. Parmi les sphères passant par l'intersection du cône Δ et de π, il y en a une, U, qui est orthogonale à ω. Son centre appartient à K et sa caractéristique passe par les points d'intersection de K et de d. Le cercle K et la droite d sont dès lors inverses par rapport à U. *Si un point quelconque de* d *décrit une trajectoire orthogonale à cette droite, son inverse par rapport à* U *décrira une trajectoire orthogonale à* K. On peut, d'autre part, énoncer le théorème suivant : K *désignant une droite ou un cercle variable, soit* U *une sphère mobile, dont la caractéristique coupe* K *en deux points. Si un point quelconque de* K *décrit une trajectoire orthogonale à cette ligne, son inverse par rapport à* U *décrira une trajectoire orthogonale à l'inverse de* K *par rapport à* U. Ces propriétés conduisent à une nouvelle solution du problème résolu aux n^{os} 7 et 9. Il est possible de déterminer, sans intégration, et de la manière la plus générale, une surface engendrée par une droite d et les trajectoires orthogonales des différentes positions de cette droite, puis une sphère U dont la caractéristique coupe d en deux points. L'inverse K de d par rapport à U engendrera la surface cerclée la plus générale et deux points correspondants de d et de K décriront simultanément des trajectoires respectivement orthogonales à d et à K. Les trajectoires orthogonales des droites d étant définies sans signe d'intégration, il en sera de même des trajectoires orthogonales des cercles K. Le problème sera donc résolu.

11. Voici une quatrième solution du même problème. Imaginons une surface cerclée, lieu d'un cercle K de centre O et de rayon R. Soient ξ, η, ζ, p, q, r les translations et les rotations d'un trièdre trirectangle $Oxyz$ tel que sa face xOy coïncide avec le plan de K. Soit, d'autre part, $O'x'y'z'$ un trièdre parallèle à $Oxyz$; ses translations étant désignées par ξ', η', ζ', supposons qu'on ait $\xi' = h\xi$, $\eta' = h\eta$, h désignant une fonction arbitraire. Soit K' le cercle qui, tracé dans le plan $x'O'y'$, a pour centre O' et pour rayon hR. Nous dirons que les surfaces, lieux des cercles K, K′ sont *similaires*. Une surface cerclée étant donnée, on peut déterminer sans intégration toutes les surfaces qui lui sont similaires. Parmi les surfaces similaires d'une surface cerclée, il y en a une infinité qui sont engendrées par un cercle passant par un point fixe. De là résulte la solution du problème : on définira sans intégration une surface réglée et les trajectoires orthogonales de ses génératrices ; on soumettra cette surface à une inversion quelconque ; on déterminera enfin, de la manière la plus générale, la surface similaire de la surface obtenue.

DEUXIÈME PARTIE.

12. Soit S_3 une sphère dépendant d'un paramètre u. Désignons par S_1, S_2, S_4, S_5 quatre sphères orthogonales deux à deux et à S_3. Les cinq sphères S_1, S_2, …, S_5 forment un pentasphère P dont les rotations seront désignées par p, q, r, ξ, η, ζ, λ, μ, ν, ρ (*). Soit P′ un second pentasphère dépendant aussi de u. Désignons par S'_1, S'_2, …, S'_5 les sphères qui le composent. Les sphères S_i, S'_i $(i = 1, 2, \ldots, 5)$ étant supposées homologues, nous admettons que ce pentasphère ait mêmes rotations r, ξ, η, λ, μ, ρ que le premier et d'autres rotations p, q, ζ, ν que nous désignerons par p', q', ζ', ν'.

Appelons T la transformation conforme en vertu de laquelle les sphères S'_1, S'_2, …, S'_5 correspondent respectivement aux sphères S_1, S_2, …, S_5.

13. *Si un point de* S_3 *décrit une trajectoire orthogonale à cette sphère, le point qui lui correspond dans* T *décrira une*

(*) Voir, pour la définition de ces quantités, dans les *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris,* notre note du 5 juin 1905. Nous avons remplacé ici σ par ρ.

trajectoire orthogonale à S'_3, si cette sphère est mobile; il sera fixe, si cette sphère est fixe.

Ce théorème conduit à la détermination, sous forme explicite, du couple le plus général de pentasphères ayant entre eux les relations indiquées.

14. Soient M $(x_1, x_2, 0, x_4, x_5)$ un point quelconque de S_3 et M′ le point qui lui correspond dans T. Si ds, ds' sont les éléments des trajectoires respectivement décrites par ces points, on a, a_i et a'_i désignant les inverses des rayons des sphères S_i et S'_i $(i = 1, 2, \ldots, 5)$:

$$\left\{\begin{aligned} &\left(\sum_1^5 a_i x_i\right)^2 ds^2 - \left(\sum_1^5 a'_i x'_i\right)^2 ds'^2 \\ &= [(\nu x_5 + \zeta x_4 + p x_2 - q x_1)^2 - (\nu' x_5 + \zeta' x_4 + p' x_2 - q' x_1)^2] du^2. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

15. Supposons que p', q', ζ', ν' ne soient pas proportionnelles à p, q, ζ, ν.

Soient g, g_1 les cercles de S_3 qui sont respectivement définis par les équations

$$(\nu' - \nu)x_5 + (\zeta' - \zeta)x_4 + (p' - p)x_2 - (q' - q)x_1 = 0,$$
$$(\nu' + \nu)x_5 + (\zeta' + \zeta)x_4 + (p' + p)x_2 - (q' + q)x_1 = 0,$$

et g', g'_1 les cercles qui leur correspondent dans T. Désignons par Ω, Ω', Ω_1, Ω'_1 les surfaces respectivement engendrées par les cercles g, g', g_1, g'_1. Au moyen de la transformation T, faisons correspondre à tout point de g un point de g' et à tout point de g_1 un point de g'_1. Ainsi se trouve établie une correspondance ponctuelle entre Ω et Ω' et une autre entre Ω_1 et Ω'_1. En vertu de l'égalité (2), *ces correspondances sont conformes.*

Les surfaces Ω et Ω_1 se touchent tout le long de la ligne décrite par les points d'intersection des cercles g et g_1. De même, les surfaces Ω' et Ω'_1 se touchent tout le long de la ligne décrite par les points d'intersection des cercles g' et g'_1.

Soient $\overline{\Omega}'$, $\overline{\Omega}_1$ les surfaces qui correspondent respectivement aux surfaces Ω', Ω_1' dans la transformation T^{-1}, inverse de T. Les surfaces $\overline{\Omega}'$ et Ω se raccordent le long de g. L'inverse de $\overline{\Omega}_1'$ par rapport à S_3 se raccorde à Ω_1 le long de g_1.

D'après le n° 13, les surfaces Ω, Ω', Ω_1, Ω_1' peuvent être définies par des formules débarrassées de tout signe d'intégration.

16. Les rotations p', q', ζ', ν' ayant des valeurs quelconques, désignons par Σ la surface engendrée par une courbe quelconque K tracée sur S_3 et définie pour chaque position de cette sphère, et par Σ' la surface engendrée par la courbe K' qui correspond à K dans la transformation T. Soient M un point quelconque de K et M' le point qui lui correspond dans T. *Si la trajectoire de* M *est orthogonale à* K, *la trajectoire de* M' *sera orthogonale à* K *et vice versa.*

17. Désignons par σ l'angle que Σ fait avec S_3 en un point quelconque M $(x_1, x_2, 0, x_4, x_5)$ de K et par σ' l'angle que Σ' fait avec S_3' au point M' qui correspond au point M dans T. Cela posé, on a

$$\frac{\operatorname{tg}\sigma}{\nu x_5 + \zeta x_4 + p x_2 - q x_3} = \frac{\operatorname{tg}\sigma'}{\nu' x_5 + \zeta' x_4 + p' x_2 - q' x_3}. \tag{3}$$

18. Si Σ' est une développable isotrope, les trajectoires orthogonales des courbes K' sont les génératrices rectilignes de cette surface. Donc les points de K qui décrivent les trajectoires orthogonales des différentes positions de cette courbe sont ceux qui, dans la transformation T^{-1}, correspondent aux points d'intersection de K' et des différentes génératrices rectilignes de Σ'.

19. Supposons que l'on ait, h désignant une fonction quelconque :

$$p' = hp, \qquad q' = hq, \qquad \zeta' = h\zeta, \qquad \nu' = h\nu. \tag{4}$$

La famille des sphères S'_3 ne dépend que de celle des sphères S_3 et de h, et non du choix des sphères S_1, S_2, S_4, S_5. Nous dirons que chacune des deux familles se déduit de l'autre en soumettant celle-ci à une *flexion*, et nous nous exprimerons de même à l'égard des périsphères Π et Π', enveloppes des sphères S_3 et S'_3.

Soient c et c' les caractéristiques de ces sphères. A tout point de c correspond, dans T, un point de c'. Ainsi se trouve établie, entre les périsphères Π et Π', une correspondance ponctuelle. En vertu de l'égalité (2), *cette correspondance est conforme.*

20. Reprenons les surfaces Σ, Σ' envisagées au n° 16. Dans le cas où les égalités (4) sont vérifiées, la formule (3) s'écrit :

$$\operatorname{tg}\sigma' = h \operatorname{tg}\sigma. \tag{5}$$

21. Si la courbe K est ligne de courbure de Σ, $\operatorname{tg}\sigma$ sera une fonction de u et, d'après l'égalité (5), il en sera de même de $\operatorname{tg}\sigma'$; donc K' sera ligne de courbure de Σ'. En outre (n° 16), si un point de K décrit une ligne de courbure L de Σ, le point qui lui correspond dans T décrira une ligne de courbure L' de Σ'. Ces propriétés constituent l'extension aux surfaces à lignes de courbure sphériques dans un système du théorème de Ribaucour relatif aux surfaces à lignes de courbure planes dans un système.

Les sphères de courbure géodésique des lignes de courbure L aux points où elles sont coupées par une courbe K sont orthogonales à la caractéristique c de S_3. De là ce théorème : *Les sphères de courbure géodésique de deux lignes de courbure correspondantes* L, L', *en deux points correspondants, se correspondent dans la transformation* T.

22. La surface Σ étant donnée, la surface Σ' dépend de la fonction arbitraire h. Si $h = 0$, la famille des sphères S'_3 se réduira à une sphère et Σ' coïncidera avec cette sphère. Dans cette hypothèse, il y a deux cas à distinguer : 1° $\sigma \neq \frac{\pi}{2}$, 2° $\sigma = \frac{\pi}{2}$. Si σ est $\neq \frac{\pi}{2}$, le réseau formé des lignes K' et des lignes L' est caractérisé par la propriété suivante : Les cercles osculateurs des lignes L$'$, en leurs points d'intersection avec une ligne K$'$, sont orthogonaux au cercle c' qui correspond à c dans la transformation T. Si $\sigma = \frac{\pi}{2}$, les courbes K$'$ coïncident.

23. Soit $\sigma \neq \frac{\pi}{2}$. Au lieu d'annuler h, faisons $h = i \cot \sigma$; alors la formule (5) donnera tg $\sigma' = i$ et, par suite, la surface Σ' sera une développable isotrope. En vertu du théorème démontré au n° 18, les points qui décrivent les lignes de courbure L correspondront dans T^{-1} aux intersections de K$'$ et des génératrices rectilignes de Σ'.

24. Reportons-nous au n° 20 et supposons que Σ soit une développable isotrope. On a alors tg $\sigma = \pm i$ et la formule (5) donne tg $\sigma' = \pm i h$. La courbe K$'$ est donc ligne de courbure de Σ'. D'après le n° 23, Σ' est la surface la plus générale à lignes de courbure sphériques dans un système. Le théorème que M. Darboux a fait connaître au n° 1031 de ses *Leçons sur la théorie des surfaces*, est donc établi. En outre, la flexion dont il est question dans l'énoncé de ce théorème est analytiquement définie. Nous avons donné la présente démonstration dans le mémoire auquel l'Académie des sciences de Paris a décerné le Prix Bordin, en 1911.

25. Le théorème de M Darboux conduit à la génération suivante des surfaces à lignes de courbure sphériques dans un système. *On tracera sur une sphère dépendant d'un paramètre une infinité simple de cercles tels que leurs lieux soient des périsphères coupant la sphère sous des angles égaux. Chacune des branches de l'enveloppe de ces cercles engendrera la surface la plus générale jouissant de la propriété indiquée et les deux surfaces se correspondront dans une transformation de Ribaucour.*

Ce théorème permet de définir les surfaces considérées au moyen de formules débarrassées de tout signe d'intégration.

Physico-chimie. — **La loi de Faraday et l'action de l'effluve électrique sur les gaz,**

par M. A. de HEMPTINNE, membre de l'Académie.

Il existe une relation intime entre l'intensité du courant de l'effluve électrique et les quantités d'oxydes métalliques et de sels réduits par ce courant. Ces phénomènes ont une grande analogie avec ceux de l'électrolyse soumis aux lois de Faraday. Il est à remarquer que les réactions auxquelles je fais allusion sont localisées aux électrodes. La même analogie subsiste-t-elle encore lorsque la réaction a lieu dans toute la masse gazeuse?

Les recherches qui font l'objet de ce travail ont pour but d'élucider cette question. Les premières expériences ont été faites à la fin de l'année 1917. Elles sont basées sur l'emploi d'appareils disposés en série. Je crois inutile de revenir sur les avantages et les inconvénients de cette méthode dont j'ai parlé dans un autre travail (*).

Les mesures directes ont été effectuées dans le courant de l'année 1918. Par suite de diverses circonstances, conséquence de la guerre, la publication en a été différée à plusieurs reprises.

Recherches en série.

J'ai utilisé deux appareils du type de l'ozonateur de Berthelot (fig. 1), composés de deux tubes concentriques en verre, de 12 centimètres de longueur. Le tube extérieur avait 3 centi-

---

(*) *Bull. Acad. roy. de Belgique,* 1919, n^os 2-3, p. 167, et n° 4, p. 249.

mètres de diamètre; le tube intérieur, une dimension telle que l'espace gazeux entre les deux tubes réalisait une effluve de 3 millimètres d'épaisseur. Les tubes intérieurs qui constituent l'une des électrodes de chaque appareil étaient remplis d'eau acidulée et reliés entre eux. Les tubes extérieurs, garnis de feuilles d'étain, étaient reliés à la source d'énergie électrique, alternateur de 150 périodes et transformateur.

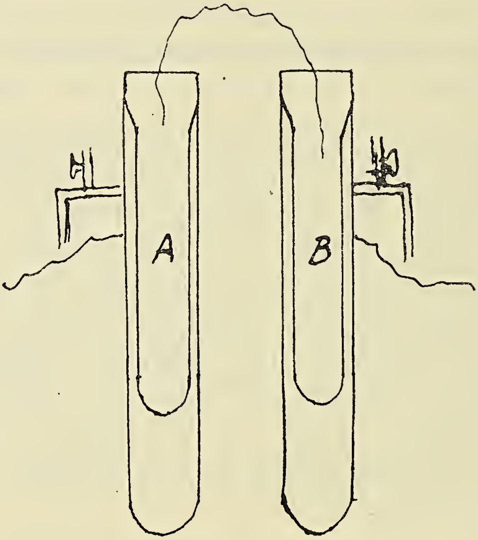


Fig. 1.

Les dimensions des armatures métalliques étaient différentes pour chaque appareil. Il en résulte que, dans certaines limites, on peut admettre que les gaz étaient ainsi soumis dans chaque tube à un courant de même intensité, mais de densité différente.

Toutes les expériences ont été faites à pression réduite et avec un courant aussi faible que possible, mais suffisant cependant pour provoquer une luminescence bien nette dans chaque appareil.

L'observation cathétométrique du niveau du mercure des manomètres permet de se rendre compte de la marche des expé-

Tube A. — Surface de l'électrode en 66 centimètres carrés.			**Tube B**. — 33 centimètres carrés et 14 cent. carrés.	
Durée de l'expérience.	Pression du gaz.	Surface des électrodes en centimètres carrés.	Variation des niveaux du mercure.	
Mélange $2H_2 + O_2$.				
Minutes.	Millimètres.			
150	15	66 A.	3.6	Effluve faible.
		33 B.	3.6	
8	11.6	66 A.	5.0	Effluve forte.
		33 B.	2.4	
90	15	66 A.	4.3	Effluve faible.
		14 B.	4.3	
30	10.7	66 A.	2.9	Effluve plus forte.
		14 B.	3.9	
Mélange $N_2 + 3H_2$.				
Minutes.	Millimètres.			
150	15	66 A.	0.5	Effluve faible.
		33 B.	0.5	
150	14.5	66 A.	3.3	Effluve plus forte.
		33 B.	4.4	
150	15	66 A.	1.9	Effluve faible.
		14 B.	1.9	
Décomposition de NH_3.				
Minutes.	Millimètres.			
60	15	66 A.	3.4	Effluve faible.
		14 B.	3.4	

riences, si l'on a soin de mettre, dans la partie inférieure des appareils, des substances capables de fixer les produits formés par la réaction chimique.

Les tableaux ci-contre résument les résultats des expériences.

On remarquera que pour des expériences faites avec une effluve assez faible, l'ascension du mercure est la même dans les deux appareils disposés en série, et cela malgré une différence notable de la surface des électrodes. Les effets dépendent donc, dans certaines limites, de l'intensité du courant et non de sa densité. Pour une effluve plus forte, les résultats sont irréguliers; lorsque la densité du courant devient trop grande, les effets calorifiques se superposent probablement aux effets électriques.

DÉTERMINATIONS QUANTITATIVES.

J'ai utilisé pour ces expériences les mêmes appareils que ceux décrits à propos de la détermination quantitative des phénomènes qui accompagnent la réduction de l'oxyde de plomb par l'effluve électrique (*).

Je crois donc inutile de revenir sur la description des appareils et des instruments de mesure.

L'electrode de plomb oxydée avait été remplacée par une électrode de plomb métallique.

Dans toutes les expériences, l'épaisseur de l'effluve était de 2 millimètres.

Lorsque deux gaz se combinent, le phénomène chimique peut être accompagné d'une ionisation qui augmentera la conductivité propre du mélange gazeux; l'accroissement de conductivité sera plus ou moins en relation avec le phénomène

---

(*) *Bull. Acad. roy. de Belgique*, 1919.

chimique. Nous admettrons que la conductivité propre du mélange gazeux est égale à la somme des conductivités de ses constituants sous une tension donnée. L'accroissement de conductivité s'obtiendra donc en prenant la différence entre cette somme et la conductivité du mélange.

Cette manière de calculer n'est pas, sans doute, à l'abri de la critique et n'est qu'approximativement exacte. Dans certains cas cependant, comme on le verra plus loin, on est en droit de croire que l'erreur est minime.

Il y a un autre fait dont il y a lieu de tenir compte dans les calculs. Les effets ne sont pas localisés aux électrodes, mais ont lieu dans toute l'épaisseur de l'effluve.

Si donc on veut calculer le rapport entre le nombre d'ions et le nombre de molécules transformées, il faudra admettre que ce nombre est proportionnel à l'intensité du courant et à l'épaisseur de l'effluve.

Les particules électrisées, soumises à l'action du courant alternatif, se meuvent tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre; leur trajet est limité par la longueur du libre chemin moyen des particules à la pression donnée. On pourra donc concevoir l'espace compris entre les électrodes divisé en tranches d'épaisseur égale au libre chemin moyen des particules. Le nombre total d'ions sera égal au produit du nombre de tranches par le nombre d'ions déterminé par la mesure de l'intensité du courant, en admettant que chaque ion porte une charge égale à celle de l'ion électrolytique.

Pour les mélanges où la proportion d'hydrogène domine, on peut admettre que le libre chemin moyen est égal à celui des molécules d'hydrogène. La présence de l'oxygène ou d'azote tend à diminuer le libre chemin moyen, mais d'autre part, ce chemin est certainement plus grand pour les électrons, de sorte qu'en prenant pour point de départ des calculs la valeur $180^{\mathrm{mm}}{}^{-6}_{10}$, on ne s'écartera pas trop de la réalité.

Les tableaux suivants résument les résultats des expériences.

Le premier tableau contient les données nécessaires au calcul de l'accroissement de conductivité des mélanges.

NATURE du gaz.	PRESSION en millimètres.	TENSION en volts.	INTENSITÉ en milliampères.
H_2	30	780	1.2
O_2	30	780	1.44

Dans le tableau suivant, I désigne l'intensité mesurée; I′ l'accroissement de l'intensité calculé comme je l'ai dit plus haut. Par exemple, dans le cas du mélange $\frac{2}{3}H_2 + \frac{1}{3}O_2$, $I' = 2.04 - \left(\frac{2}{3}1.20 + \frac{1}{3}1.44\right) = 2.04 - 1.28 = 0.76$.

M désigne le nombre total de molécules combinées.

N, le nombre d'ions calculé correspondant à l'accroissement du courant.

T, le temps compté en secondes.

Les expériences ont été faites à la pression de 30 millimètres.

Je ne donne pas les résultats des expériences faites à des pressions plus réduites, parce qu'à ces pressions l'intensité du courant était très faible; l'instrument de mesure que je possédais n'avait pas une sensibilité suffisante pour faire des déterminations d'une exactitude satisfaisante. Je m'abstiens pour le même motif de donner les résultats obtenus en combinant l'azote et l'hydrogène.

NATURE du mélange.	TENSION en volts.	I	I′	T	$\frac{M}{10^{18}}$	$\frac{N}{10^{18}}$	$\frac{N}{M}$
$\frac{2}{3}H_2 + \frac{1}{3}O_2$	780	2.04	0.76	300″	62.7	684	10
$\frac{95}{100}H_2 + \frac{5}{100}O_2$	780	1.50	0.29	210″	27	182	7

Les expériences précédentes, faites dans des conditions très différentes, montrent qu'il y a un rapport très intime entre la conductivité électrique et le phénomène chimique. Ce rapport apparaîtra comme plus intime encore lorsqu'on opérera à des pressions plus réduites ; la valeur de $\frac{M}{N}$ tendra vers l'unité : c'est du moins ce que les résultats dont je retarde la publication me permettent de prévoir.

La loi de Faraday, caractérisée par une relation intime entre les quantités de matières transformées par voie d'électrolyse et la quantité d'énergie électrique dépensée, se retrouve sous certains rapports pour les réactions qui s'effectuent dans les gaz sous l'influence de l'effluve électrique, à condition d'opérer à des pressions assez faibles.

Il est à prévoir que la pression limite se trouve au voisinage de la pression critique de luminescence, comme c'est le cas pour la réduction des sels métalliques.

Je crois intéressant de signaler ici que Lind (*), qui a étudié l'action des substances radioactives sur les réactions chimiques dans les gaz, a trouvé également qu'il y a une relation intime entre le phénomène chimique et l'ionisation.

Gand, le 30 juillet 1919.

(*) *Radium*, 1912, p. 428

PHYSICO-CHIMIE. — **Sur les tensions de vapeur de l'anhydride sulfureux,**

par W. MUND.

L'importance que présente pour le calcul des constantes thermodynamiques la connaissance aussi exacte que possible des tensions de vapeur aux basses températures, m'avait déterminé à rechercher un mode opératoire approprié à ce but. Il ne m'a été possible jusqu'ici d'appliquer ce dispositif qu'à l'étude d'un seul corps.

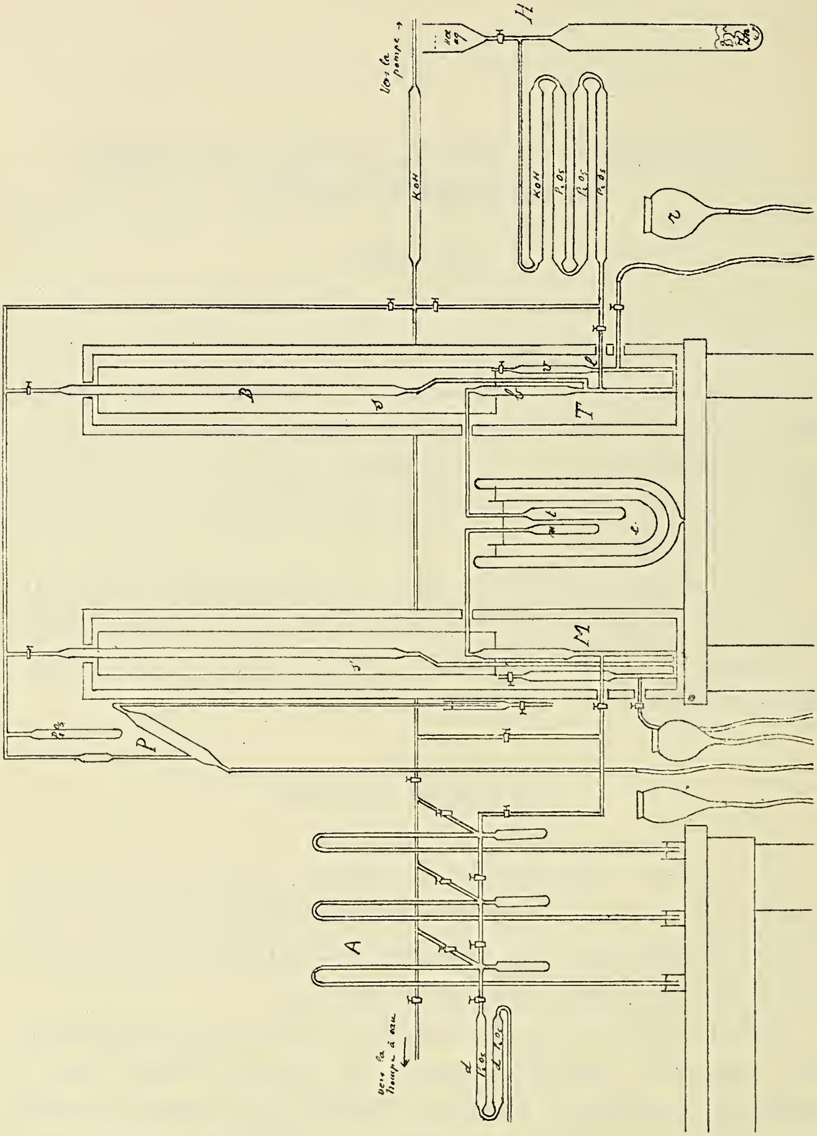
Une première partie de ce travail sera consacrée à la description de la méthode expérimentale mise en œuvre; une deuxième, à l'exposé et à la discussion des résultats obtenus avec l'anhydride sulfureux.

PREMIÈRE PARTIE.

La méthode employée est la méthode dite statique, caractérisée par ce que, le liquide en expérience se trouvant à une certaine température, on s'attache à déterminer directement la pression de la vapeur en équilibre avec lui.

Cette méthode est la plus simple au point de vue théorique; elle comporte également moins de causes d'erreur que la méthode dynamique. Celle-ci d'ailleurs ne saurait convenir toutes les fois que l'on ne dispose que de faibles quantités de gaz liquéfié.

Il va de soi que la valeur des résultats obtenus par la méthode


Vers la pompe →
KOH
H
KOH aq
KOH
P2O5
P2O5
P2O5
v
l
v
b
B
a
T
c
M
s
P
P2O5
A
vers la trompe à eau
d
P2O5
d P2O5

statique dépendra de la perfection avec laquelle se trouveront réalisées les conditions suivantes :

1° Pureté du liquide étudié ;

2° Constance de la température de ce liquide pendant un temps suffisant : *a*) pour permettre à la vapeur de se mettre en équilibre avec le liquide ; *b*) pour permettre d'effectuer avec soin les mesures de la température et de la pression ;

3° Exactitude dans la mesure de la température du liquide ;

4° Exactitude dans la mesure de la pression de la vapeur.

§ I. — *Pureté du liquide.*

Cette condition est fondamentale en ce sens que les pressions mesurées, quelle que soit du reste leur exactitude, n'ont de valeur comme document physique que pour autant qu'elles se rapportent soit à une substance unitaire, soit à un mélange de proportions bien définies. Ce dernier cas n'est généralement pas réalisé quand il s'agit d'impuretés.

Le meilleur moyen de s'assurer de la pureté de la vapeur dont il s'agit de déterminer la pression, consiste à mesurer cette pression sous des volumes différents.

Quant aux meilleures méthodes de purification des différentes substances, elles sont évidemment particulières à chacune d'elles. La distillation fractionnée des gaz suivant la technique mise au point au laboratoire de Ph.-A. Guye, à Genève, constitue un moyen d'application fort générale et de grande efficacité. L'appareil à distillation à trois ampoules dont je me suis servi (voir la figure, A), était complètement en verre soudé et muni de robinets bien étanches, graissés avec le mélange indiqué par Ramsay. Il était soudé par une extrémité à deux tubes desséchants à pentoxyde de phosphore (*d*), au travers desquels le gaz était amené dans la première ampoule, où il se condensait. L'autre extrémité se prolongeait par un tube conduisant au manomètre (M). Après la dernière distillation, le gaz fut condensé dans l'ampoule du manomètre, non toutefois sans que celle-ci eût été au préalable rincée trois ou quatre fois par des remplissages successifs et des évacuations après un séjour suffisamment prolongé. Ces évacuations ont été faites à l'aide d'une pompe rotative à l'huile, permettant d'atteindre en peu de temps un vide fort avancé. Ce rinçage constitue une précaution d'importance capitale, ayant pour but d'éviter la présence dans l'ampoule de traces d'air.

§ II. — *Constance de la température.*

L'expérience m'a montré que l'équilibre entre le liquide et sa vapeur ne s'établit souvent qu'après un intervalle relativement long. En effet, alors même que la température demeure invariable, une modification un peu importante du volume offert à la vapeur produit dans la pression de celle-ci des perturbations qui ne s'amortissent que fort lentement. Il importe donc que les variations de température autour du point où se fera la détermination soient rendues extrêmement lentes, et que même une constance pratiquement absolue se trouve réalisée depuis quelques minutes au moment de la mesure. Ensuite, il faut que pendant toute la durée de cette dernière, la température ne varie pas d'une manière appréciable. Dans mes expériences, chaque détermination de température, comme chaque détermination de pression, comportait deux lectures au cathétomètre. La durée totale des quatre lectures effectuées avec soin pouvait atteindre environ dix minutes. Le thermostat dont je me suis servi permettait de maintenir au moins pendant cette durée la température constante à 0.01 de degré près. Comme il a été décrit récemment par P. Bruylants et W. Mund (*), je suis dispensé d'y

---

(*) *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, Classe des sciences, n^{os} 2-3.

revenir. Il suffit de rappeler qu'il consistait essentiellement dans un mélange eutectique congelé (*c*) où plongeaient simultanément : 1° l'ampoule d'un thermomètre à hydrogène (*t*) (voir plus loin), 2° une ampoule reliée au manomètre et renfermant le liquide dont il s'agissait de mesurer la tension de vapeur (*m*).

§ III. — *Mesure de la température.*

Puisque, grâce à l'emploi des mélanges eutectiques, je pouvais espérer une constance des températures à un centième de degré près pendant un temps suffisamment long, il était désirable de déterminer la valeur absolue de ces températures avec une exactitude correspondante. J'ai, à cet effet, eu recours à l'instrument dont les indications semblent offrir le moins d'incertitudes : le thermomètre à hydrogène à volume constant. Dans le domaine des températures ici en question, l'échelle de ce thermomètre, l'échelle normale, se confond pratiquement avec l'échelle thermodynamique.

L'instrument que je me suis appliqué à construire est du type décrit par Travers (*) et se trouve représenté sur la figure (T). Il comporte une ampoule (*t*) d'un diamètre de 20 millimètres et d'une longueur de 150 millimètres, plongeant dans le bain thermostatique et communiquant par un tube capillaire deux fois recourbé avec la petite branche (*b*) d'un manomètre. Pour réduire autant que possible l'espace nuisible, j'ai employé comme repère fixe dans cette petite branche, non pas une pointe en verre noirci, soudée à l'intérieur, mais un trait horizontal et délié, gravé extérieurement sur le tube par l'acide fluorhydrique. L'erreur de parallaxe, tant lors du calibrage de l'espace nuisible que lors des mesures, était évitée par l'emploi d'une

---

(*) *Experimentelle Untersuchung von Gazen*, Brunswick, 1905, p. 153.

lunette horizontale. Cette disposition me paraît surtout présenter l'avantage de permettre une mise au point plus délicate. L'affleurement du ménisque au trait est, en effet, plus net que l'affleurement à une pointe; cette dernière, du moment qu'elle touche le sommet du ménisque, se déforme toujours un peu, quelque léger que soit le contact. Au-dessus, et dans l'axe vertical de la petite branche du manomètre, se place la branche ascendante (B), longue d'un peu plus de 1 mètre. Les deux branches proviennent d'un même tube et présentent un diamètre intérieur égal. La partie supérieure de la grande branche peut être fermée par un bon robinet Geissler; elle communique avec la pompe (P) à mercure du type Antropoff destinée à parfaire le vide obtenu par la pompe rotative. Les deux branches se rejoignent à leur partie inférieure. Un peu en dessous de leur jonction débouche un tube latéral (*l*) amenant l'hydrogène lors du remplissage de l'appareil et muni d'un bon robinet qu'on ferme une fois le remplissage terminé. L'appareil producteur d'hydrogène, figuré au bas de la planche à droite (H), communique, lui aussi, avec la pompe à huile. Pour éviter l'introduction d'air pendant l'écoulement de l'acide chlorhydrique, celui-ci a été bouilli immédiatement avant son emploi. Avant le remplissage définitif. l'ampoule du thermomètre a été rincée trois fois à l'hydrogène. Ces opérations, ainsi que la mise au point grossière du ménisque, se font par manipulation d'un réservoir (*r*) renfermant du mercure distillé et relié à l'appareil par un tube en caoutchouc épais et préalablement débarrassé de soufre par une courte ébullition dans la soude, La mise au point plus précise du ménisque se fait par deux pinces jetées sur le tube en caoutchouc maintenu immobile sur une partie de son trajet. L'entrée du mercure dans le thermomètre est réglée par un robinet. Le mercure se débarrasse des bulles d'air qu'il peut encore entraîner en passant sous un petit tube vertical (*v*), à la partie supérieure duquel l'air vient s'accumuler et peut être chassé, de temps en temps, par l'ouverture du robinet. Il va sans dire qu'avant le montage définitif, toutes les parties de l'appareil ont été soigneusement lavées à l'acide chromique, rincées à l'eau distillée et désséchées par un courant d'air chaud.

Une échelle millimétrique (s) (*), gravée sur verre, se trouvait appliquée en position bien verticale sur les branches du manomètre. Les fractions de millimètre ont été évaluées à l'aide d'une lunette micrométrique placée derrière l'échelle, à plus d'un mètre de distance. Des ampoules électriques en verre dépoli, suspendues en face à la hauteur de la lecture, assuraient un éclairement convenable. Avant chaque mesure, on amenait le ménisque inférieur au repère, après avoir déterminé la hauteur de celui-ci sur l'échelle. On mesurait ensuite la hauteur du ménisque supérieur. La distance verticale des deux ménisques était donnée par la différence des hauteurs observées. Pour ramener cette différence à 0°, j'ai appliqué la formule

$$l_0 = l\,(1 - 0.000172\,t),$$

où le facteur 0.000172 est la différence entre les coefficients de dilatation du mercure et du verre ; t est la température de la colonne mercurielle obtenue en prenant la moyenne des indications de deux thermomètres suspendus l'un à la partie supérieure, l'autre à la partie inférieure de la cage de l'appareil.

Le volume occupé par l'hydrogène dans l'appareil qui vient d'être décrit se compose de trois parties :

1° V, le volume à 0° de l'ampoule thermométrique et de la partie immergée du capillaire qui la surmonte ;

2° Vc, le volume à température ordinaire du capillaire à partir du point d'immersion jusqu'à la soudure (voir figure). Je me suis arrangé dans toutes les expériences de telle manière que le point d'immersion du capillaire, soit dans la glace, soit dans l'eutectique congelé, se trouvât à 7 centimètres en dessous de

---

(*) Fournie par la Société genévoise de construction d'instruments de physique.

la soudure. Soit μ le volume de 1 centimètre de capillaire, nous avons $Vc = 7 \times \mu$;

3° V*n*, le volume à température ordinaire de l'espace nuisible, c'est-à-dire du capillaire à partir de la soudure et du petit espace qui, dans la branche courte du manomètre, surmonte le mercure amené au repère.

Cette division du volume total en trois parties a pour raison d'être que lors d'une mesure l'hydrogène se trouve dans chacune de ces parties dans des conditions de température différentes :

L'ampoule et la partie immergée du capillaire se trouvent à la température qu'il s'agit de mesurer et que nous désignerons par x.

Dans le capillaire émergeant, la température s'élève graduellement jusqu'à la soudure, où elle est sensiblement égale à la température ordinaire. Nous désignerons par θ une température moyenne lue sur un thermomètre à mercure dont l'ampoule se trouve au milieu de l'espace compris entre la surface de l'eutectique et la soudure.

Enfin, dans l'espace nuisible, la température peut sans grande erreur être considérée comme égale à la température t régnant à l'intérieur de la cage du thermomètre.

Dans l'évaluation de la température x, je me suis servi de la formule

$$l_0\left(\frac{V}{273\ 03} + \frac{Vc}{273 + \theta} + \frac{Vn}{273 + t}\right) = l'_0\left(\frac{V(1 + \alpha x)}{273\ 03 + x} + \frac{Vc}{273 + \theta'} + \frac{Vn}{273 + t'}\right),$$

où l_0 et l'_0 représentent la hauteur de la colonne mercurielle ramenée à 0°, l'ampoule plongeant respectivement dans la glace et dans le bain dont il s'agit de déterminer la température. θ et θ', de même que t et t', se rapportent respectivement à ces deux déterminations. α est le coefficient de dilatation du verre pris égal à 0.0000091.

Il me reste à indiquer comment ont été déterminés les volumes V*n*, V*c* et V.

Le calibrage de l'espace nuisible a été effectué avant l'assemblage des pièces du thermomètre. La petite branche munie du capillaire deux fois recourbé à angle droit se terminait à sa partie inférieure par un robinet, n'étant pas encore soudée à l'appareil. Je l'ai pesée remplie de mercure à 15°, une première fois jusqu'à l'extrémité du capillaire, une deuxième fois jusqu'au repère.

Poids du tube rempli complètement.	$126^{gr}180$	Moyenne :
	126 185	$126^{gr}180$.
	126.175	
	126 180	

Poids du tube rempli jusqu'au repère.	$120^{gr}665$	Moyenne :
	120.670	$120^{gr}663$.
	120.660	
	120 670	
	120.660	
	120.655	

L'espace nuisible était donc occupé par 126.180 — 120.663 = $5^{gr}517$ de Hg à 15°. Si nous prenons comme coefficient de dilatation du mercure 0.00018 et comme densité à 0° : 13.596, le volume de l'espace nuisible à 15° est exprimé par

$$Vn = \frac{5517(1 + 0.00018 \times 15)}{13596} = 407 \text{ millimètres cubes.}$$

Avant de souder à l'extrémité du capillaire faisant partie de l'espace nuisible le capillaire de l'ampoule, j'ai procédé au calibrage de celle-ci. L'ampoule, prolongée par un capillaire un peu plus long qu'il ne fallait, a été remplie jusqu'à l'extrémité de ce capillaire de mercure distillé à 0°. J'ai laissé séjourner dans la glace pendant environ une heure. Laissant ensuite revenir l'ampoule à la température ordinaire, j'ai recueilli dans un godet et pesé séparément les gouttes de mercure débordant à l'extrêmité du capillaire :

Poids de l'ampoule + mercure.	699$^{\mathrm{gr}}$970		700,400	
Id. vide. . .	41 020		41.020	
		658$^{\mathrm{gr}}$950		658$^{\mathrm{gr}}$020
Poids du godet + mercure . .	26$^{\mathrm{gr}}$480		26$^{\mathrm{gr}}$420	
Id. vide . . .	24.180		24 180	
		2 300		2 240
Poids total du mercure.		661$^{\mathrm{gr}}$250		661$^{\mathrm{gr}}$260
En moyenne		661$^{\mathrm{gr}}$255		

Le volume de l'ampoule avec le tube à 0° est donc

$$\frac{661.255}{13.596} = 48636 \text{ millimètres cubes.}$$

Lors de la soudure de l'ampoule, j'ai coupé un petit bout de tube capillaire d'une longueur de 3$^{\mathrm{cm}}$64. Le calibrage de ce petit morceau m'a donné 49 millimètres cubes, chiffre qu'il faut soustraire du chiffre précédent pour obtenir le volume $V + Vc$

$$V + Vc = 48636 - 49 = 48587 \qquad (1)$$

Connaissant le volume du morceau coupé et sa longueur, j'en ai calculé le volume par centimètre. Multipliant ce chiffre par 7, j'ai obtenu comme valeur de Vc

$$Vc = 7 \times \frac{49}{3.64} = 94 \qquad (2)$$

La comparaison de (1) et de (2) nous donne :

$$V = 48493 \text{ millimètres cubes.}$$

Pour calculer le premier membre de l'équation

$$l_0\left(\frac{V}{273.03}+\frac{Vc}{273+\theta}+\frac{Vn}{273+t}\right)=l'_0\left(\frac{V(1+\alpha x)}{273.03+x}+\frac{Vc}{273+\theta'}+\frac{Vn}{273+t'}\right),$$

j'ai plongé l'ampoule dans de la glace lavée à l'eau distillée et j'ai lu :

$$l = 1010^{\mathrm{mm}}69$$
$$t = 16^\circ$$
$$\theta = 14^\circ$$

De l on peut tirer la valeur de l_0 :

$$l_0 = 1010.69(1-0.000172\times 16)=1007.91.$$

En joignant à ces données les valeurs de V, V*c* et V*n* précédemment obtenues, j'obtiens :

$$180763.61895 = l'_0\left(\frac{V(1+\alpha x)}{273.03+x}+\frac{Vc}{273+\theta'}+\frac{Vn}{273+t'}\right)\therefore$$

$$\frac{V(1+\alpha x)}{273.03+x}=\frac{180763\ 61895}{l'_0}-\frac{Vc}{273+\theta'}-\frac{Vn}{273+t'}\therefore$$

$$\frac{48493+0.4413x}{273.03+x}=\frac{180763.61895}{l'(1-0.000172\,t')}-\frac{94}{273+\theta'}-\frac{407}{273+t'}.$$

C'est cette équation qui m'a permis de calculer directement x en connaissant l', t' et θ'.

§ IV. — *Mesure de la pression.*

Il était amplement suffisant de déterminer celle-ci avec une précision de quelques centièmes de millimètre. J'ai, à cet effet, construit un manomètre représenté sur la figure (M) et fort semblable à celui du thermomètre à gaz. Je puis me dispenser de le décrire en détail. Les lectures furent faites sur une échelle (s') appliquée immédiatement contre le tube, avec la lunette micrométrique déjà mentionnée. Au lieu d'amener le ménisque inférieur à l'affleurement d'un point de repère, on faisait au contraire varier le volume de la vapeur du liquide renfermé dans l'ampoule pour constater la présence éventuelle d'air.

La hauteur des deux ménisques sur l'échelle était lue au moment où la température indiquée par le thermomètre à gaz ne variait plus depuis deux à trois minutes. La différence des deux positions de ménisques donnait la hauteur h de la colonne mercurielle. Cette hauteur a ensuite été ramenée à 0° par la formule

$$h_0 = h(1 - 0.000172t).$$

DEUXIÈME PARTIE.

L'anhydride sulfureux commercial en bonbonnes provient de l'action du soufre sur l'acide sulfurique et présente un haut degré de pureté. Je me suis contenté de le dessécher par deux tubes à P_2O_5 et de le condenser dans la première ampoule de l'appareil à distillation. Je l'ai alors distillé sept fois. Le point triple était d'une netteté remarquable. Après des rinçages répétés, l'anhydride était condensé dans l'ampoule du manomètre. J'en ai ensuite laissé échapper des quantités considérables, afin d'entraîner toutes traces de gaz étrangers pouvant encore se trouver dans l'ampoule.

Le tableau de la page suivante indique les premiers résultats obtenus avec l'anhydride sulfureux, en opérant comme il a été dit dans la première partie.

EUTECTIQUE EMPLOYÉ. 1	Variation du ménisque. 2	l' 3	t' 4	θ' 5	x 6	h 7	t 8	h_0 9
		mm				mm		mm
HNO_3 3aq + H_2O.	0 00	855.76	16°2	5°	- 42°28	139.80	16°4	139.421
. . . .	0.00	855.86	16°3	5°	- 42°25	140.16	16°5	139.790
. . . . . .	0.00	856.08	16°6	5°	- 42°21	140.37	17°	139.980
K_2CO_3. naq + H_2O . .	0.00	878.78	19°9	10°	- 36°18	200.27	20°	199.603
. . . .	0.00	879.11	19°9	10°	- 36°07	200.99	20°	200.29
$MgCl_2$. 12aq + H_2O . .	0 13	883.76	18°5	8°	- 34°75	217.15	18°5	216.47
. . . . .	0 06	884.69	18°7	8°	- 34°46	220 43	19°	219.72
$HC_2H_3O_2$ + H_2O . .	0.08	903.74	19°2	10°	- 29°34	293.05	19°	292.10
. . . .	0.20	904.66	19°2	10°	- 29°08	296.14	19°	295 16
NaBr. 5aq + H_2O. . .	0.00	911.45	18°2	13°	- 27°21	327.94	18°5	326 893
. . . .	0.00	911.50	18°2	13°	- 27°20	328.14	18°5	327.33
$Cu(NO_3)_2$. 9aq + H_2O	0.00	914.50	19°5	14°	- 26°37	341 80	20°5	340 63

La 1re colonne du tableau indique l'eutectique employé.

La 2e colonne, la variation éventuelle exprimée en millimètres de la position du ménisque affleurant du thermomètre à gaz pendant la durée de la détermination.

La 3e colonne, la hauteur non corrigée l' de la colonne mercurielle dans le thermomètre à gaz.

La 4e colonne, la température moyenne t' de la cage du thermomètre.

La 5e colonne, la température moyenne θ' du capillaire.

La 6e colonne indique la température obtenue x en remplaçant l', t' et θ' par leurs valeurs dans la dernière formule du § III de la première partie.

La 7e colonne, la hauteur non corrigée h de la colonne mercurielle du manomètre.

La 8e colonne, la température moyenne t de la cage manométrique.

La 9e colonne, la hauteur corrigée h_0.

L'ampoule du thermomètre s'étant ensuite brisée, on a soudé une nouvelle ampoule. Un calibrage analogue à celui décrit précédemment a donné : $V = 42939$, $Vc = 70$. La valeur de Vn reste 407. Une détermination dans la glace a fourni en outre les valeurs $l = 988.778$, $t = 19$, $\theta = 13$. La valeur du premier membre de l'équation générale calculée à l'aide de ces données s'est trouvée 156597.540495. La formule à appliquer désormais sera :

$$\frac{42939 + 0.3907x}{273.03 + x} = \frac{156597.54049}{l'(1 - 0.000172t')} - \frac{70}{273 + \theta'} - \frac{407}{273 + t'}.$$

Une seule détermination a pu être faite avec cette nouvelle ampoule qu'un accident malencontreux a de nouveau brisée. On a trouvé comme moyenne de deux lectures dans l'eutectique $Na\,NO_3 + H_2O$:

$$x = 20.06 \qquad h_0 = 503.75.$$

Je dois mentionner que pendant cette détermination le tube en verre renfermant l'eutectique encore imparfaitement congelé s'est cassé. Le mélange d'alcool à la solution $Na\,NO_3$ a déterminé un abaissement de température très sensible, ce qui explique peut-être la température de fusion anormalement basse de — 20.06.

En portant les valeurs de n et de h_0 indiquées jusqu'ici respectivement en abscisses et en ordonnées, on constate que les points ainsi obtenus se placent d'une manière presque parfaite — même à très grande échelle — sur une courbe fort régulière.

Enfin, j'ai déterminé la tension de vapeur dans la glace lavée à l'eau distillée et j'ai trouvé, avec une exactitude probablement très grande : $h_0 = 1163^{mm}98$.

Les tensions de vapeur de SO_2 ont été déterminées anciennement à partir de — 30° par Faraday et par Regnault (*), plus

---

(*) *Mém. de l'Académie*, 1862, p. 535.

récemment par Pictet (*) et par Blümke (**). Mes chiffres se rapprochent le plus de ceux de Regnault. C'est ainsi qu'à 0° Regnault indique 1.53 atm., Pictet, 1.51 atm. Je trouve une valeur voisine de 1.53 atm.

Ces recherches ont été effectuées au laboratoire de chimie physique de l'Université de Louvain. Elles n'ont été possibles que grâce à la direction toujours présente et souvent à l'aide effective de M. le professeur P. Bruylants. Je tiens à le remercier bien sincèrement de l'assistance toute particulière qu'il n'a cessé de me prêter.

Juillet 1914.

(*) *Arch. de Genève,* 13, 212
(**) *Wied. Ann.,* 34, 10, 1888.

CONSEIL INTERNATIONAL DE RECHERCHES

ASSEMBLÉE CONSTITUTIVE

TENUE

au Palais des Académies, à Bruxelles, du 18 au 28 juillet 1919

COMPTE RENDU

présenté à la Classe des sciences de l'Académie royale de Belgique

PAR

MM. PELSENEER, SWARTS ET LECOINTE, Membres de l'Académie.

INTRODUCTION

La guerre a fait apparaître d'une façon péremptoire les liens étroits qui unissent la Science au développement économique et industriel des Nations et, dans cet ordre d'idées, elle a donné naissance, dans les grands pays, à des organismes de recherches qui devront être maintenus et même développés dans tous les domaines pendant la paix. Telle est l'origine des *Conseils nationaux de Recherches.*

D'autre part, les États alliés et associés, qui avaient si utilement groupé leurs efforts intellectuels durant la guerre, ont compris la nécessité de poursuivre cette coopération après la cessation des hostilités. Ils ont ainsi été amenés à fonder un *Conseil international de Recherches,* organisme centralisateur des Conseils nationaux des pays associés.

Aux Conférences des Académies scientifiques interalliées tenues à Londres et à Paris en 1918, il avait été décidé de dénoncer les Conventions relatives aux Associations intellectuelles internationales existantes, qui comptaient, parmi leurs membres, des ressortissants des États avec lesquels nous étions en guerre. Toutefois, cette dénonciation comportait implicitement l'obligation pour nous de fonder une série d'organismes intellectuels internationaux, remplaçant ceux qu'on allait dissoudre.

Une nouvelle Conférence des Académies scientifiques interalliées fut en conséquence convoquée à Bruxelles, où elle tint ses assises, du 18 au 28 juillet 1919, au Palais des Académies, et réunit des représentants de la Belgique, du Canada, des États-Unis d'Amérique, de la France, du Royaume-Uni de Grande-Bretagne et d'Irlande, de l'Italie, du Japon, de la Nouvelle-Zélande, de la Pologne, du Portugal, de la Roumanie et de la Serbie.

Dans les pages qui suivent, nous donnons un compte rendu des travaux de cette Conférence. Nous nous sommes, à cette occasion, largement inspirés des procès-verbaux élaborés par les Secrétaires des diverses Commissions qui ont été instituées par la Conférence.

Bruxelles, le 2 août 1919.

Séances plénières.

La séance plénière d'inauguration, tenue le 18 juillet à 10 heures, est honorée de la présence de S. M. le Roi des Belges.

Elle est présidée par M. Gravis, Vice-Directeur de la Classe des sciences de l'Académie royale de Belgique, ayant à ses côtés : M. Harmignie, Ministre des Sciences et des Arts, les membres du Comité exécutif provisoire du Conseil international de Recherches (M. Lacroix, remplaçant M. Picard empêché, M. Schuster, M. Volterra, M. Campbell, remplaçant M. Hale empêché, et M. Lecointe), MM. Pelseneer, Swarts et Stroobant, membres de la Commission d'organisation belge, et M. Le Nain, Secrétaire perpétuel ff. de l'Académie royale de Belgique.

M. le Ministre Harmignie prononce le discours reproduit dans l'annexe I du présent compte rendu.

M. Gravis donne lecture du discours constituant l'annexe II et M. Lacroix s'exprime ensuite dans les termes relatés dans l'annexe III.

La séance est suspendue; S. M. le Roi et M. le Ministre des Sciences et des Arts se retirent. La séance est ensuite reprise et

M. Schuster lit le rapport présenté par le Comité exécutif provisoire. Ce document ne donne lieu à aucune remarque.

Au cours de la seconde séance plénière, tenue le 19 juillet, M. le Président Lacroix donne lecture d'un télégramme de M. Egenitis regrettant que la Grèce n'ait pu envoyer de délégué, la convocation lui étant parvenue trop tard. L'Assemblée discute ensuite le projet de Statuts pour le Conseil international de Recherches qui lui a été présenté par le Comité exécutif provisoire.

A l'Assemblée plénière suivante, qui a lieu le 22 juillet, M. le Président Lacroix communique le texte de télégrammes qu'il a adressés à S. M. le Roi des Belges et au Ministre des Sciences et des Arts, à l'occasion de l'ouverture des fêtes nationales belges. Il donne ensuite lecture de la dépêche envoyée par M. Gravis, Vice-Directeur de la Classe des sciences de l'Académie royale de Belgique, à M. Poincaré, Président de la République française, qui vient d'arriver à Bruxelles. Il fait part de la réponse qui lui a été adressée par le Ministre des Sciences et des Arts de Belgique (1) et d'un télégramme de M. Marconi regrettant de ne pouvoir assister à la réunion, ses devoirs de délégué italien près la Conférence de la Paix le retenant à Paris. M. Natanson expose les difficultés que la Pologne subira pendant un certain temps encore, et qui rendront difficile son adhésion immédiate aux organismes en voie de constitution. La suite à donner aux propositions de M. Natanson est réservée.

L'Assemblée poursuit ensuite la discussion sur les articles du projet de statuts pour le Conseil international de Recherches.

---

(1) Les réponses aux autres télégrammes parvinrent après la clôture de la Session.

La séance plénière suivante a lieu le 25 juillet sous la présidence de M. Lacroix, qui donne lecture :

1° D'un télégramme de M. Paul Otlet, secrétaire général de l'Union des Associations internationales, souhaitant l'heureux achèvement des travaux de la Conférence et exprimant le vœu qu'une coopération puisse s'établir entre le Conseil international de Recherches et l'Union des Associations internationales, dans le cadre nouveau créé par la Société des Nations ;

2° D'une proposition présentée par plusieurs membres, en vue de procéder à la constitution d'une Commission chargée d'étudier la possibilité, pour l'avenir, d'adopter une langue auxiliaire internationale. Cette proposition est prise en considération et les signataires de la motion sont désignés comme membres de cette Commission. (MM. Cottrell, Littlehales, Moureu, Nasini, Otlet, Parsons, Pennie, Tanakadate, Washburn.)

L'Assemblée poursuit la discussion sur les articles des statuts du Conseil international de Recherches non encore adoptés. Le texte des articles 7 et 8 est provisoirement admis avec le codicile suivant :

« Le Comité exécutif présentera à la prochaine Assemblée
» générale, un rapport exposant les résultats de l'étude à
» laquelle il se sera livré sur la manière de composer définiti-
» vement le Comité exécutif prévu à l'article 7 des statuts
» (nombre de membres, etc.).

» La Convention sera éventuellement modifiée en consé-
» quence. »

Au nom du Comité exécutif provisoire, M. le Président propose l'adoption de l'article additionnel suivant :

« Le siège légal du Conseil international de Recherches est
» fixé à Bruxelles, où se tiendront les Assemblées générales et
» où seront conservées les archives.

» Les dons et legs seront reçus et gérés suivant la législation
» belge. »

M. Schuster appuie, en anglais et en français, cette proposition et en explique la portée.

La proposition de M. Lacroix est soumise à un vote par pays; elle est adoptée à l'unanimité et il est entendu qu'elle ne comporte nullement l'obligation implicite de désigner un Secrétaire général habitant Bruxelles.

L'Assemblée de clôture se tient le 28 juillet à 10 heures. Elle débute par la lecture d'une lettre du Ministre des Sciences et des Arts de Belgique remerciant la Conférence de l'honneur qu'elle a fait à la Belgique en décidant d'établir à Bruxelles le siège légal du Conseil international de Recherches.

Les délégués votent ensuite à l'unanimité, après discussion, la décision suivante :

« L'Assemblée constitutive du Conseil international de
» Recherches;

» Sur la proposition du Comité exécutif provisoire;

» Vu les conditions exigées des pays désireux de faire partie
» du Conseil international de Recherches et des divers orga-
» nismes intellectuels internationaux qui y sont rattachés;

» Décide d'inviter dès à présent les pays mentionnés ci-après
» à faire partie du Conseil international de Recherches et des
» organismes intellectuels précités : la Chine, le Siam, la
» Tchéco-Slovaquie, l'Argentine, le Chili, le Danemark, l'Es-
» pagne, le Mexique, la Principauté de Monaco, la Norvège,
» les Pays-Bas, la Suède et la Suisse. »

Le Président avait, préalablement au vote, donné lecture d'une lettre, en date du 25 juillet 1919, par laquelle M. Dendy, délégué de la Nouvelle-Zélande, émettait un vote favorable à la proposition dont il s'agit.

La Conférence procède ensuite à l'élection du Comité exécutif dont le mandat cessera, à titre exceptionnel, à la fin de la prochaine Assemblée générale.

M. Campbell propose de réélire les cinq membres sortants, en maintenant la présidence du Comité à M. Picard et le Secrétariat général à M. Schuster.

Il est procédé à un vote par pays; la proposition est admise à l'unanimité.

Le Président résume ensuite la procédure qui sera suivie pour la présentation des conclusions de la Conférence aux organismes intéressés.

Le Comité exécutif sollicitera tout d'abord l'adhésion, au Conseil international de Recherches, des nations alliées ainsi que des pays que la Conférence a décidé d'inviter à y participer.

Ce Conseil sera considéré comme définitivement constitué quand l'adhésion de trois des grands pays fondateurs aura été acquise.

Le Comité exécutif procédera en même temps à la coordination et à la revision des divers rapports et projets de statuts élaborés au cours de la Conférence. Il saisira ensuite les organismes compétents des États fondateurs des projets que l'on peut considérer comme définitifs et y demandera leur adhésion. Il communiquera enfin à ces organismes les propositions au sujet desquelles des décisions de principe n'ont pas encore été admises.

Cette procédure est adoptée.

M. le général Thayer dépose la motion suivante qu'il commente en termes élevés :

« Le Conseil international de Recherches exprime sa pro-
» fonde sympathie pour les hommes de science russes et formule
» l'espoir que dans un avenir prochain, ils collaboreront à ses
» travaux. »

Le Président propose l'envoi du télégramme ci-après :

« M. George Hale, directeur de l'Observatoire Mont Wilson,
» Pasadena-Californie. A l'illustre astronome initiateur du Conseil international de Recherches, le Congrès réuni à Bruxelles
» exprime son admiration et sa reconnaissance.
» (S.) Lacroix, président (¹). »

Ces deux motions sont admises à l'unanimité.

Le Président donne lecture des vœux qui sont mentionnés dans l'annexe VI et qui sont pris en considération.

M. Flahault rappelle que l'ouverture des cours de l'Université de Strasbourg, sous le régime français, a eu lieu le 15 janvier 1919 et que son inauguration sera célébrée solennellement le 11 ou le 22 novembre 1919. Il invite les hommes de science, ayant pris part aux Conférences interalliées de Londres, de Paris et de Bruxelles, à honorer ces fêtes de leur présence.

M. le Président lit alors le discours reproduit dans l'annexe IV.

M. Volterra adresse de chaleureux remerciements à M. Lacroix qui, pour présider les travaux de la Conférence, a mis à sa disposition ses remarquables facultés intellectuelles et sa grande aménité.

M. Pelseneer, enfin, prononce le discours de clôture figurant comme annexe V.

On trouvera ci-après les documents suivants :

Annexe VII. — *Ordre du jour de l'Assemblée ;*
Annexe VIII. — *Composition des délégations ;*
Annexe IX. — *Statuts du Conseil international de Recherches.*

(¹) La réponse de M. G. Hale est parvenue à Bruxelles après la clôture de la Session.

Nous jugeons inopportun de reproduire les rapports suivants qui ont été imprimés et distribués aux membres de la Conférence :

Rapport du Comité exécutif provisoire ;

Report of the Executive committee ;

Report of the International Union for co-operation in Solar Research, by Arthur Schuster;

Astronomical Ephemerides, by Sir F. W. Dyson;

Centralisation des télégrammes astronomiques, par B. Baillaud;

Rapport concluant à une nouvelle réunion de la Conférence des Éphémérides, par B. Baillaud;

Entreprise internationale de la Carte photographique du Ciel, par B. Baillaud ;

Union internationale de l'Heure et des Longitudes, par B. Baillaud;

Rapport sur la publication d'un recueil donnant connaissance le plus rapidement possible des travaux d'ordre astronomique, par G. Bigourdan;

Lettre de M. Yves Delage relative à la Station biologique de Roscoff et à l'Année biologique ;

Rapport de la Fédération française des Sociétés des Sciences naturelles (Bulletins de documentation) ;

L'organisation de la documentation en matière technique et industrielle, par P. Otlet;

La Documentation en matière de Brevets, par P. Otlet;

Le Brevet international et les conditions de sa réalisation, par D. Marits;

L'opportunité de créer une Commission internationale de standardisation, par G.-L. Gérard;

Liste des recueils bibliographiques des sciences mathématiques, physiques, chimiques et naturelles, par J. Massart (1).

---

(1) Extrait des *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique* (Classe des sciences), n° 4, pp. 237-248, 1919.

SÉANCES SPÉCIALES

A. — **Union Astronomique internationale.**

Les séances sont présidées par M. Lecointe. M. Van Biesbroeck remplit les fonctions de Secrétaire.

L'Assemblée arrête, après discussion, les statuts constituant l'annexe X. Elle procède à la nomination des Présidents et des membres des Commissions astronomiques dont elle juge la création immédiate opportune (voir annexe XI).

Sur la proposition des Commissions de l'Heure et des Télégrammes astronomiques, les règlements d'ordre intérieur formant les annexes XII et XIII du présent compte rendu sont adoptés.

L'Assemblée reçoit communication :

1° D'une lettre de la Société d'encouragement pour l'industrie nationale, ayant son siège rue de Rennes, 44, à Paris, relative à la Réforme des calendriers (transmise à M. Bigourdan).

2° De deux lettres de M. Banachiewicz, Directeur de l'Observatoire astronomique de Cracovie, qui offre de collaborer aux travaux de l'Union, en effectuant des calculs jusqu'à ce que son établissement soit doté d'installations permettant de procéder à des observations.

L'Assemblée compose ensuite comme suit son Comité exécutif :

Président : M. B. Baillaud.
Vice-Présidents : MM. Campbell, Dyson, Lecointe et Riccò.
Secrétaire général : M. Fowler.

M. Riccò exprime le désir que la prochaine Assemblée générale de l'Union astronomique se tienne à Rome. Il confirmera cette invitation après en avoir obtenu l'autorisation de son Gouvernement.

M. Newall offre gracieusement que cette Assemblée soit réunie à Cambridge, dans le cas où elle ne pourrait avoir lieu en Italie. M. Baillaud prononce ensuite le discours reproduit dans l'annexe XIV et M. Schlesinger remercie le Gouvernement ainsi que la ville de Bruxelles de l'accueil qui a été fait aux astronomes. L'Assemblée partage ses sentiments.

Les principes, devant servir de base à l'établissement des statuts de l'Union Astronomique internationale, ayant fait l'objet d'un examen de la part des membres de la Conférence des Académies interalliées de Paris, et ensuite du Comité exécutif provisoire du Conseil international de Recherches, enfin, ayant donné lieu à l'élaboration d'un projet transmis en temps opportun aux Académies intéressées, les Statuts arrêtés pour cette Union à la Conférence de Bruxelles doivent être considérés comme définitifs.

B. — Union Géodésique et Géophysique internationale.

Les séances sont présidées par M. Ch. Lallemand. M. Schuster remplit les fonctions de Secrétaire.

L'Assemblée arrête, après discussion, les statuts constituant l'annexe XV. Elle procède à l'élection des membres de son Comité exécutif qui est composé comme suit :

Président : M. Charles Lallemand.
Secrétaire général : M. le colonel Lyons.

Comme suite aux statuts de l'Association, les Présidents des Sections mentionnées ci-après sont *Vice-Présidents* de l'Union (M. le major Bowie, Sir Napier Shaw, M. Tanakadate, S. A. S. le Prince de Monaco).

Les mêmes considérations que celles émises *in fine* pour l'Union astronomique s'appliquent à l'Union Géodésique et Géophysique internationale dont les statuts doivent être, en conséquence, considérés également comme définitifs.

a) Section de Géodésie.

Elle est présidée par le major Bowie et compose comme suit son Comité exécutif :

Président : M. le major Bowie.
Vice-Président : M. Reina.
Secrétaire : M. le colonel Perrier.

Cette dernière nomination est faite sous réserve d'acceptation par l'intéressé.

Conformément à une tradition ayant donné des résultats satisfaisants dans l'ancienne Association géodésique internationale, la Section confère à son Bureau le soin de désigner des Géodésiens particulièrement qualifiés, pour présenter, à la prochaine Assemblée générale, des rapports sur les différentes branches de la Géodésie. Ces rapporteurs sont autorisés à entrer en relations directes avec les institutions scientifiques et les savants des pays susceptibles de faire partie de l'Union. La désignation des rapporteurs est toutefois ajournée jusqu'au moment où certains pays neutres seront considérés comme ayant eu le temps d'accepter l'invitation qui leur sera faite, d'adhérer au Conseil international de Recherches et aux organismes scientifiques y rattachés.

M. Maury fait une communication sur les travaux de triangulation exécutés en Belgique et surtout en Afrique.

M. le colonel Bellot exprime le vœu que l'on mette à l'ordre du jour la question de l'unification des ellipsoïdes.

M. le major Bowie propose que, pour le calcul des chaînes principales de triangulation de chaque Continent, on fixe un point central comme origine. Il fait ensuite une courte description d'un appareil extrêmement sensible, construit par M. le professeur Michelson, sur le principe du niveau d'eau et de la méthode des interférences, destiné à mettre en évidence les marées de l'écorce terrestre.

M. Tanakadate propose que le problème des marées de l'écorce terrestre rentre dans ceux dont l'étude est confiée à la Section.

M. Reina demande si, à la suite du transfert à l'Union astronomique du problème de la variation des latitudes, la Commission géodésique italienne devra continuer à assurer le fonctionnement de la Station astronomique de Carloforte. La Section décide qu'une Commission mixte, composée d'astronomes et de géodésiens, résoudra la question.

La Section évalue à 1,000 francs le montant de la part contributive unitaire qui lui est utile.

b) Section de Sismologie.

L'ancienne Association internationale de Sismologie subsiste virtuellement encore. Son Président, le prince Galitzine, étant mort, son Vice-Président, M. Lecointe, s'efforcera d'obtenir, par les voies légales, dans le plus bref délai possible, la dénonciation de la Convention qui lui sert de Statut fondamental.

En attendant qu'il en soit ainsi, la Station de Strasbourg continuera à fonctionner comme Bureau central international sous la direction de son chef actuel M. Rothé.

La Section évalue à 400 francs le montant de la part contributive unitaire qui lui est utile.

c) Section de Météorologie.

Elle compose comme il suit son Bureau :

Président : Sir Napier Shaw.

Vice-Président : M. Angot.

Secrétaire : M. Marvin.

La Section adopte à l'unanimité les résolutions suivantes :

1° L'Union astronomique sera priée d'ajouter à la liste des membres de la Commission pour l'étude des radiations solaires, les noms de trois représentants de la Section météorologique;

2° Un Comité sera constitué pour réunir la documentation concernant les différents instruments en usage ou récemment mis en usage pour la mesure de la température, de l'hygrométricité, de la pression atmosphérique et de la vitesse du vent dans les hautes couches de l'atmosphère.

Un représentant de chacun des pays adhérents à l'Union fera partie de cette Commission;

3° Les travaux relatifs à l'électricité atmosphérique seront placés sous la direction d'une Commission nommée en partie par la Section de Météorologie et en partie par la Section de Magnétisme et d'Électricité terrestres.

M. C. T. R. Wilson présidera cette Commission;

4° La Section évalue à 400 francs le montant de la part contributive unitaire qui lui est utile.

d) Section de Magnétisme et d'Électricité terrestres.

Les séances ont lieu sous la présidence de M. Tanakadate.

M. Chree donne un aperçu du fonctionnement de l'ancienne Commission internationale du Magnétisme terrestre.

La Section décide :

I. De nommer une Commission pour l'étude de la meilleure méthode :

1° De comparaison des instruments magnétiques en usage dans les différents pays ;

2° De détermination des valeurs absolues des éléments magnétiques ;

II. De placer les recherches relatives à l'électricité atmosphérique sous la direction d'une Commission désignée en partie par la Section de Météorologie et en partie par la Section de Magnétisme et d'Électricité terrestres ;

III. De coopérer avec l'Union internationale de Radiotélégraphie scientifique aux investigations concernant les phénomènes électriques de la haute atmosphère ;

IV. De nommer une Commission chargée de l'échange systématique des courbes magnétiques ;

V. De désigner une Commission spéciale qui, périodiquement, étudiera les problèmes essentiels relatifs au magnétisme et à l'électricité terrestres et présentera des rapports sur ces questions ;

VI. De coopérer avec l'Union astronomique internationale aux investigations sur les relations existant entre les phénomènes solaires, du magnétisme et de l'électricité terrestres ;

VII. De conférer au Comité exécutif le droit de s'adjoindre par cooptation d'autres membres qui demeureront en fonctions jusqu'à la prochaine Assemblée générale;

VIII. D'entrer en relation avec les autres Comités de Sections et de faire rapport au Secrétaire général de l'Union au sujet des fonds qui lui seront nécessaires durant la première période de la Convention. Une évaluation approximative fixe à 400 francs le montant de la part contributive unitaire utile à la Section.

La Section émet ensuite l'avis qu'il y a lieu de différer l'organisation complète des Commissions jusqu'à ce que les pays nouvellement invités à faire partie du Conseil international de Recherches et des Unions qui y sont rattachées aient pu faire parvenir leur adhésion à l'Union géodésique et géophysique internationale.

L'Assemblée compose comme il suit son Comité exécutif :

Président : M. Tanakadate.
Vice-Président : M. Chree, Charles.
Secrétaire : M. Bauer, Louis-A.

e) Section d'Océanographie physique.

Les séances sont présidées par M. Lamb.
Elle constitue son Bureau comme il suit :

Président : S. A. S. le prince de Monaco.
Vice-Président : M. Lamb.
Secrétaire : M. Magrini.

Le Comité exécutif de la Section comprendra, outre les membres du Bureau qui viennent d'être désignés : MM. Charles Close et M. G. W. Littlehales; il se complètera éventuellement par cooptation.

Une Commission, sous la présidence de M. Lamb et dont le

Secrétaire sera M. J. Proudman, étudiera les questions relatives aux problèmes des Marées.

La Section évalue à 400 francs le montant de la part contributive unitaire qui lui est actuellement utile.

f) Section de Vulcanologie.

Les membres compétents en la matière étant peu nombreux, ceux-ci se sont bornés à décider la création, en principe, d'une Section de Vulcanologie et à formuler, comme il est dit ci-après, les buts à poursuivre par cette Section :

1° Faciliter et coordonner les relations entre les savants étudiant les phénomènes volcaniques et les phénomènes connexes, notamment en ce qui concerne les éruptions;

2° Provoquer des études systématiques sur le dynamisme des volcans et sur la constitution de leurs produits considérés tant au point de vue chimique que physique;

3° Provoquer la création de laboratoires nationaux au voisinage des grands volcans actifs;

4° Encourager toute recherche concernant le volcanisme dans l'espace et dans le temps;

5° Créer une publication périodique consacrée aux questions du ressort de l'Union et à la bibliographie.

C. — Union internationale de la Chimie pure et appliquée.

Le fauteuil de la présidence est occupé par M. A. Haller.

M. Donny-Hénault remplit les fonctions de Secrétaire.

M. Haller rappelle à grands traits l'histoire de l'Association internationale des Sociétés chimiques, fondée à Paris en 1907.

Il donne ensuite lecture de la lettre par laquelle, sous forme consultative, il proposa, d'une part, la dissolution de l'Association et, d'autre part, la remise à leur généreux donateur, des fonds mis à la disposition de l'Association par M. Ernest Solvay.

Sept sociétés ont adhéré sans réserve aux deux propositions, deux regrettent la dissolution mais acceptent la remise des fonds au donateur; une société a répondu négativement aux deux propositions.

En 1918, les Académies scientifiques interalliées avaient émis le vœu de voir s'établir une coopération internationale en Chimie. Depuis lors, un fait nouveau s'est produit : la création d'une Fédération des Sociétés de Chimie pure et appliquée des divers pays, à laquelle ont adhéré déjà l'Angleterre, la France, les États-Unis d'Amérique, l'Italie et la Belgique.

En une réunion qui vient d'avoir lieu à Londres (du 14 au 19 juillet), les délégués de ces divers pays ont élaboré des Statuts qu'ils apportent à Bruxelles afin de les mettre en harmonie avec les vœux émis par le Conseil international de Recherches en voie de constitution.

Sur la proposition de M. Washburn, une Sous-Commission est constituée en vue de procéder à l'examen des Statuts dans cet ordre d'idées.

Après que cette Sous-Commission eût fait connaître ses conclusions, les Statuts qui constituent l'annexe XVI du présent compte rendu furent adoptés.

Les mêmes considérations que celles émises *in fine* pour la Section d'Astronomie s'appliquent à l'Union internationale de la Chimie pure et appliquée dont les Statuts doivent être, en conséquence, considérés comme définitifs.

Avant de se séparer, l'Union constitue comme il suit son Bureau :

Président : M. Ch. Moureu.

Vice-Présidents : MM. Chavanne, Parodi-Delfino, Dr Parsons, Sir William Pope.

Secrétaire général : M. J. Gérard.

D. — Union internationale de Radiotélégraphie scientifique.

Les séances sont présidées par M. Schuster.

M. le commandant Philippson remplit les fonctions de Secrétaire.

M. le major Wibier rappelle qu'il a été créé à Bruxelles, en 1913, par un groupe de physiciens et de spécialistes de la radiotélégraphie, une Commission internationale de télégraphie sans fil scientifique, à laquelle étaient rattachés des Comités nationaux privés, fondés dans divers pays et notamment en Angleterre, en Belgique et en France. Cette Commission avait déjà exécuté avant la guerre des études et des expériences intéressantes Elle dispose encore d'une somme de 40,000 francs environ, reliquat d'un don de M. R. Goldschmidt.

La proposition faite par la délégation belge, au sujet de la transformation de cette commission en association rattachée au Conseil international de Recherches, est adoptée à l'unanimité.

Le projet de statuts élaboré pour cette Union figure comme annexe XVII au présent compte rendu.

Le Bureau de cette Union a été composé comme il suit :

Président : le général Ferrié ;

Vice-Présidents : MM. Austin, Eccles et Vanni ;

Secrétaire général : M. R. Goldschmidt.

L'Assemblée décide enfin que le siège de l'Union sera établi à Bruxelles.

E. — Union internationale de Mathématiciens.

Les séances sont présidées par M. de la Vallée Poussin.

M. De Donder remplit les fonctions de Secrétaire.

L'Assemblée arrête à l'unanimité le projet de statuts figurant comme annexe XVIII au présent compte rendu.

Elle émet le vœu de voir convoquer, en septembre 1920, un Congrès international de Mathématiciens; M. Koenigs espère qu'il sera possible de réunir ce Congrès à Strasbourg. Cette proposition rencontre l'assentiment unanime.

Comme suite au paragraphe *d* de l'article premier du projet de statuts, l'Assemblée émet le vœu que les auteurs de mémoires ou de traités de mathématiques envoient, immédiatement après la publication de leurs travaux, des résumés de ceux-ci à un organisme destiné à centraliser et à coordonner tous ces résumés bibliographiques; cet organisme serait fixé à Paris, ou dans un autre centre scientifique, et se rattacherait, autant que possible, à un organisme similaire déjà existant.

Les délégués présents se constituent ensuite en *Comité provisoire* de l'Union internationale de Mathématiciens. Le Bureau de ce Comité est composé comme il suit :

Présidents d'honneur : MM. Lamb, Picard et Volterra;
Président : M. de la Vallée Poussin;
Vice-Président : M. Joung;
Secrétaires : MM. De Donder, Koenigs, Petrovitch et Reina.

Les autres délégués du Comité provisoire sont :
MM. Demoulin, Deruyts, Glaisher, Parenty et Stuyvaert.

F. — **Union internationale de Physique.**

Les diverses séances sont présidées successivement par MM. Schuster, le général Ferrié, Deslandres, le sénateur Volterra et Lees.

Les fonctions de Secrétaire sont remplies par M. Van Aubel secondé par M. Verschaffelt.

Il a été décidé qu'après la réunion, on poursuivra par écrit les échanges de vues sur diverses questions qui feront l'objet d'un rapport complémentaire. Celui-ci sera élaboré par les soins de M. Van Aubel, Secrétaire général provisoire, avant l'ouverture du Congrès de Physique et soumis au Comité exécutif du Conseil international de Recherches.

Vu le petit nombre de physiciens présents et l'insuffisance de la représentation de plusieurs pays, l'Assemblée décide de se borner à élaborer le projet de Statuts qui figure comme annexe XIX au présent compte rendu, à formuler quelques propositions et à émettre des vœux.

Les physiciens présents souhaitent voir se réunir, en 1920, un Congrès international de Physique, et ils émettent le vœu que les *Tables annuelles de Constantes physiques*, publiées sous la direction du Dr Marie, continuent à paraître et que cette publication soit éventuellement subsidiée par l'Union.

Il serait désirable que, dans ces Tables annuelles, il se trouvât, après chaque série de Constantes se rapportant à un même objet, une liste très succincte des méthodes de mesure nouvelles. On demanderait aux auteurs des Mémoires de faire connaître en quelques lignes l'originalité de la méthode employée.

Il conviendrait de publier aussi des Tables critiques des Constantes physiques, comme le proposent la Société américaine de Physique et la Société américaine de Chimie.

Au point de vue de la documentation bibliographique, la réunion estime qu'il serait désirable : 1° qu'un projet de coopération fût élaboré par les *Science Abstracts*, le *Journal de Physique*, le *Radium* et d'autres organes publiant rapidement un index bibliographique et des résumés de travaux de physique; 2° que des pourparlers fussent engagés entre la Société de Physique de Londres, la British Association for the Advancement of Science et d'autres organismes qui ont publié des rapports sur les progrès de la Physique.

Dans cet ordre d'idées, M. le sénateur Volterra rappelle que, dès le 23 octobre 1918, divers membres de la Société française de Physique se sont réunis spontanément pour examiner comment il serait possible d'organiser l'information, après la guerre, dans le domaine des sciences physiques. Les membres de cette réunion ont pensé aussi que la documentation doit être rapide et complète, qu'il importe d'éviter le plus possible les doubles emplois et qu'il y a donc lieu d'utiliser l'excellente organisation déjà existante des *Science Abstracts* mais de la modifier, s'il se peut, de manière à assurer la publication :

a) D'un index bibliographique paraissant tous les mois et mentionnant les titres des mémoires insérés dans les périodiques du monde entier;

b) D'analyses détaillées de ces mémoires.

La revue projetée aurait aussi une édition française, confiée à la Société française de Physique, et éventuellement une édition italienne dont la publication serait assurée par les soins de la rédaction de *Il Nuovo Cimento.*

Les pourparlers engagés depuis cette époque permettent d'espérer que ce projet aboutira au résultat désiré.

Sur la proposition de M. Natanson, les physiciens ont émis le vœu qu'il soit créé un Office central d'échanges auquel on puisse s'adresser pour se procurer des tirés à part des travaux publiés dans les divers périodiques, des thèses de doctorat ou autres écrits scientifiques s'obtenant difficilement par l'intermédiaire de la librairie.

L'Assemblée s'occupe ensuite des questions relatives aux étalons, aux instruments de précision et aux méthodes de mesure.

Le laboratoire national de physique anglais de Teddington, le Bureau of Standards de Washington, le Laboratoire central d'Électricité de Paris et, surtout, le Bureau international des Poids et Mesures de Sèvres publient d'importants mémoires relatifs aux étalons électriques, aux étalons de lumière et aux questions de météorologie. Ces travaux qui intéressent tous les physiciens, ne sont réunis dans aucune revue spéciale et sont trop peu connus.

Une publication spéciale, à créer, devrait être l'organe des laboratoires précités, ainsi que du Laboratoire national de Physique projeté en France et de ceux qu'on a l'intention de fonder en Italie, au Japon et dans d'autres pays encore. Cette revue publierait aussi des travaux relatifs aux instruments de précision, ce qui permettrait de montrer le degré de perfection auquel on est parvenu dans les pays alliés pour ce genre de construction.

La collaboration entre les divers Laboratoires et Instituts occupe après cela les membres de la réunion.

Certains laboratoires possèdent des installations spéciales qui ont absorbé des subsides considérables et, surtout, ont nécessité de longues études pour être réalisés. On peut citer le laboratoire cryogénique de l'Université de Leyde, réalisé à la suite des recherches de Kamerlingh-Onnes, et les travaux des physiciens français MM. Weiss, Cotton, Deslandres et Perot pour l'obtention des champs magnétiques intenses.

Il serait désirable que les physiciens fussent renseignés régulièrement :

1° Sur les installations spéciales existant dans les pays alliés et qui pourraient être mises à la disposition de savants étrangers ;

2° Sur les recherches en cours dans ces laboratoires, pour lesquelles il serait agréable aux directeurs d'avoir des collaborateurs, assistants ou jeunes docteurs.

Enfin, l'Assemblée estime qu'en vue de favoriser le développement de l'enseignement supérieur de la Physique, une revue déjà existante devrait publier des indications sur les leçons professées par les savants et sur leurs recherches, ainsi que sur les débouchés que pourraient trouver les travailleurs consacrant leur activité au culte désintéressé de la Science.

G. — Union internationale des Sciences Biologiques.

Les séances sont présidées en partie par M. Gravis et en partie par M. Yves Delage. M. Flahault remplit les fonctions d Secrétaire.

L'Assemblée décide tout d'abord de ne former qu'une seule Union groupant à la fois les biologistes et les médecins; puis elle arrête, après discussion, le projet de Statuts qui figure comme annexe XX au présent compte rendu.

Elle constitue ensuite comme il suit le Bureau provisoire de l'Union :

Président : M. Yves Delage.
Vice-Président : M. Bateson.
Secrétaire général : M. Flahault.

En ce qui concerne la bibliographie et la documentation, le vœu suivant est adopté à l'unanimité :

« Il est désirable d'assurer l'existence, pour chacune des » sciences biologiques, de deux publications périodiques de » documentation bibliographique :

» 1° L'une paraissant au moins chaque année (Année biologique, Annuaire botanique, etc.), donnant les titres et analyses » des travaux parus dans le courant de l'année précédente et » classés méthodiquement par matière;

» 2° L'autre paraissant à courte périodicité (Bulletin,

» Abstracts, etc.), donnant, dans l'ordre chronologique de leur
» apparition, les titres de toutes les publications avec ou sans
» analyse très sommaire.

» Il est entendu qu'on cherchera à utiliser les périodiques
» existants et répondant déjà aux buts poursuivis. »

Les vœux suivants sont également adoptés à l'unanimité :

1. — Sur la proposition de M. Yves Delage :

« Il serait désirable que les Nations interalliées fussent toutes
» représentées, par la location de tables, à la Station biologique de Roscoff. »

2. — Sur la proposition de M. Yves Delage :

« L'Union devrait octroyer une subvention annuelle de
» 24,000 francs en vue d'assurer la continuité de la publication
» de l'*Année biologique.* »

3. — Sur la proposition de M. Massart :

« Il serait désirable de voir créer en Afrique équatoriale un
» Institut international de Biologie. »

L'Assemblée procède à la constitution des Sections prévues par les Statuts; chacune d'elles s'efforce, à son tour, de constituer un Bureau qui puisse, dès maintenant, faire des démarches et préparer le travail de l'avenir.

Dans une séance postérieure, les délégués procèdent à un classement des périodiques bibliographiques au point de vue de l'emploi des ressources. Il est décidé que :

1° Dans chacune des six Sections, les périodiques à courte périodicité seront subventionnés de préférence aux périodiques annuels ;

2° Dans chacune de ces deux catégories, ceux qui existent déjà seront subventionnés de préférence aux périodiques à créer.

Quant aux subventions qui seraient éventuellement obtenues pour les laboratoires de Biologie, elles seront réparties par une Commission composée de MM. Dendy, Joubin et Massart.

L'Assemblée décide enfin que l'Union des Sciences biologiques se réunira, dans trois ans, à Bruxelles, à la même époque que le Conseil international de Recherches. Si toutefois, une réunion était nécessaire à une date antérieure, le Bureau déciderait quand elle aurait lieu, et, dans ce cas encore, Bruxelles aurait la préférence.

La part contributive unitaire pour la première période triennale est fixée à 4,600 francs.

a) Section de Biologie générale.

Président : M. Sherrington.

Secrétaire : M. Brachet.

Membres : MM. Bateson, Bordet, Delage, Delezenne, Dendy, Marchal, Massart et Willem.

b) Section de Physiologie.

Président : M. Fredericq.

Vice-Président : M. Sherrington.

Secrétaire : M. Delezenne.

Membres : MM. Bordet, Héger, Nolf et Willem.

La Section estime qu'il y a lieu :

1° De s'entendre si possible avec les rédacteurs des *Physiological Abstracts* pour en faire l'organe de l'Union;

2° De créer, sous le titre d'*Année physiologique*, un périodique annuel donnant les analyses méthodiques des travaux importants et quelques revues concernant les questions ayant fait le plus de progrès durant l'année écoulée.

M. Fredericq accepte d'assurer la direction de ce nouveau périodique avec la collaboration du Bureau et des rédacteurs des *Physiological Abstracts*.

c) Section de Zoologie.

Président : M. Dendy.

Secrétaire : M. Pelseneer.

Membres : MM. Delage, Gilson, Joubin, Lameere, Roule et Willem.

La Section émet les vœux :

1° De voir soutenir : *a*) La *Bibliographica Zoologica*, éditée par le *Concilium Bibliographicum* sous la direction de M. Field, à Zurich, périodique bimensuel publiant les titres des travaux sans analyse; *b*) Le *Zoological Record*, édité par la « Royal Society of London », périodique annuel publiant les titres des travaux avec une analyse très courte et énumérant toutes les espèces nouvelles;

2° De voir créer un périodique zoologique annuel analogue à l'Année biologique.

d) Section de Botanique.

Président : M. Flahault.

Vice-Président : M. Gravis.

Secrétaire : M. Massart.

Membres : M. Bateson, S. A. S. le prince Roland Bonaparte, MM. Marchal et Pirotte.

La Section émet le vœu de voir faire l'étude détaillée de la façon dont la végétation reprendra possession des territoires dévastés sur le front occidental et sur le front oriental.

Le Président et le Secrétaire sont chargés de se mettre en rapport avec les éditeurs des *Botanical Abstracts* pour examiner si ce Bulletin bibliographique peut répondre aux desiderata exprimés par l'Union des sciences biologiques.

e) Section des Sciences médicales.

Président : M. Quénu.

Vice-Président : M. Thayer.

Secrétaire : M. Nolf.

Membres : MM. Bordet, Brachet, Chauffart, Delbet, Delezenne, Héger, Fredericq, Gilson, Hartmann et Sherrington.

La Section décide la création des Commissions suivantes : Médecine, Chirurgie, Obstétrique, Anatomie, Hygiène et Bactériologie (réunies). Cette énumération n'est pas limitative.

La Section des Sciences médicales reconnaissant les grands services rendus par l'*Index Medicus,* émet le vœu que cette publication devienne son organe de documentation bibliographique à périodicité courte.

Elle exprime le désir que chacune des branches importantes de la Science médicale soit dotée d'un organe de documentation bibliographique à périodicité longue (annuelle) donnant l'analyse de tous les travaux importants parus dans l'année et comprenant si possible des revues générales sur les questions d'actualité.

f) Section de Biologie appliquée.

Président (sera nommé ultérieurement).

Secrétaire : M. Marchal.

Membres : MM. Bateson, Damas, Delage, Dendy, Flahault, Fredericq, Gravis, Gilson, Joubin, Massart, Lameere, Pelseneer, Roule et Willem.

Pour la constitution définitive du Bureau, M. Marchal entrera en correspondance avec les savants susceptibles de faire partie de la Section.

Celle-ci comprendra en particulier : une Commission d'Océanographie biologique, une Commission de Protection de la Nature, et une Commission d'Agriculture.

g) Sous-Section d'Océanographie biologique.

Président : S. A. S. le prince de Monaco;

Vice-Président (sera désigné ultérieurement; il appartiendra à la nation américaine);

Secrétaire : M. Joubin.

M. Schuster dit que le Gouvernement de la Grande-Bretagne l'a chargé d'annoncer son intention de convoquer prochainement à Londres une réunion destinée à réorganiser les travaux scientifiques pour l'étude biologique de l'Atlantique Nord et de la mer du Nord. La Commission de Copenhague pour l'étude de la Mer n'a pas cessé d'exister. Il faut prévoir que les États-Unis, le Canada et la France y entreront, ainsi que divers États neutres.

La Sous-Section adopte les résolutions suivantes :

« Les délégués au Conseil international de Recherches scien-
» tifiques, réunis à Bruxelles, s'intéressant à l'exploration bio-
» logique de l'océan Atlantique Nord et de la mer du Nord :
» 1° Prient le Secrétaire général du Conseil permanent pour
» l'exploration de la Mer, à Copenhague, de vouloir bien pro-
» poser à ce Conseil d'étendre le champ de ses recherches à
» l'Atlantique Nord et d'inviter les Pays alliés et neutres rive-

» rains de l'Atlantique Nord, qui n'y sont pas encore repré-
» sentés, à y prendre part ;

» 2° Émettent le vœu que ce Conseil entre en relation,
» pour ses travaux, avec les organismes fondés par le Conseil
» international de Recherches ;

» 3° Émettent le vœu de voir la France s'associer aux travaux
» de l'exploration de l'Atlantique Nord. »

H. — **Union Géographique internationale.**

Les séances sont présidées par M. le colonel Bellot.

M. Grandidier, rappelé à Paris, ne peut assister aux réunions ; mais, sous la date du 24 juillet, il avait adressé au Secrétariat de la Conférence une note détaillée exposant ses idées en vue de la création d'une Union géographique internationale. Cette note sert de base aux discussions qui conduisent à l'adoption du projet de statuts figurant comme annexe XXI au présent compte rendu. Ce projet sera soumis aux organismes compétents des pays adhérents au Conseil international de Recherches.

I. — **Union Géologique internationale.**

Les séances sont présidées par M. Lohest.

M. Fourmarier remplit les fonctions de Secrétaire. M. A. Renier rappelle qu'aux derniers Congrès de Stockholm et de Toronto, beaucoup de géologues avaient exprimé le regret de ce que le Congrès international ne fût pas un organisme permanent ; il est possible actuellement de réaliser ce désir en transformant l'organisme des Congrès géologiques en une Union rattachée au Conseil international de Recherches.

Les délégués présents adoptent cette manière de voir et, comme conclusion, élaborent le projet de statuts pour une Union géologique internationale qui figure comme annexe XXII au présent compte rendu.

J. — Union internationale pour la Bibliographie et la Documentation.

Les séances se sont tenues sous la présidence de M. Otlet.

La Section a examiné les conclusions des divers rapports publiés et a conclu elle-même qu'il est désirable de voir ajouter, aux Unions faisant partie du Conseil international de Recherches, une Union pour la Bibliographie et la Documentation.

Celle-ci doit avoir pour objet la coordination des divers travaux entrepris par des organismes spécialisés et l'organisation de services qui nécessitent la coopération des divers pays et des diverses associations.

La responsabilité immédiate de l'organisation nationale de la documentation doit appartenir aux Conseils nationaux et celle de l'organisation par sciences, aux Unions et Associations internationales de chaque branche. L'Union elle-même doit agir en vue de coordonner l'organisation; elle doit dresser le plan général des travaux et services, fixer le choix des méthodes, assurer l'exécution par un ensemble de conventions conclues avec les organismes les mieux qualifiés, former les collections centrales et en assumer la conservation.

La Section a accueilli dans ce sens la proposition de l'Institut international de Bibliographie d'être rattaché au Conseil international de Recherches et de voir son projet de statuts examiné dans une conférence spéciale, après qu'il aura été communiqué aux Unions internationales et aux Gouvernements.

Il a été spécialement insisté sur l'urgence de voir constituer, comme Commission de la nouvelle Union, un office international de documentation technique, doté des moyens de répondre aux besoins actuels de l'art de l'ingénieur et des diverses industries.

Les discussions ont porté en outre sur divers points qui ont été déclarés comme rentrant dans le cadre de la Bibliographie et de la Documentation, entendue au sens large du mot : bibliographie des titres des ouvrages, résumés, rapports sur les progrès de chaque science, nécessité pour chacune d'avoir un système rationnel de publications, établissement de bibliothèques internationales spéciales, organisation simplifiée des échanges et des prêts, organisation de l'enregistrement des nouveautés et découvertes scientifiques, disposition à prendre concernant l'emploi des langues et l'adoption d'une langue auxiliaire internationale, unification des figures, notations et diagrammes ; examen des nouvelles méthodes d'impression qui facilitent la coopération et l'édition récapitulative.

K. — **Union technique internationale.**

Les séances sont présidées par M. Paul Otlet.

M. G.-L. Gérard remplit les fonctions de Secrétaire.

L'Assemblée,

Considérant les pertes d'ordre économique causées par la guerre ;

Considérant que le progrès technique, envisagé sous son aspect le plus large, est appelé à constituer un des facteurs prépondérants du relèvement matériel des peuples ;

Considérant que ce progrès recevra son impulsion la plus vive si les nations alliées et associées mettent en commun leurs découvertes et les fruits de leur expérience sous une forme qui assure la diffusion des résultats, sans nuire aux initiatives personnelles et sans porter un préjudice injustifié aux situations légitimement acquises;

Estime qu'il y a lieu de créer d'urgence une *Union technique internationale* ayant pour objet de faire progresser l'étude et l'organisation des différentes branches de la Technique.

Entrent notamment dans l'objet de l'Union :

a) Tout ce qui concerne le développement des organismes techniques, leur coopération, la coordination de leurs activités, l'action en vue de provoquer la création des organismes nouveaux reconnus utiles et nécessaires; enfin, l'organisation de congrès;

b) La documentation technique sous toutes ses formes (publications. bibliographies, analyses, bibliothèques, etc.);

c) Tout ce qui concerne les recherches d'ordre technique, l'établissement de laboratoires nationaux ou internationaux, accessibles aux travailleurs de toutes nationalités, la répartition éventuelle du travail de recherche;

d) Toutes les autres questions communes aux divers domaines de la technique, tant au point de vue de leur étude qu'à celui de l'internationalisation reconnue utile, à savoir notamment : les poids et mesures, les unités, la standardisation, l'organisation du travail d'atelier, l'hygiène et la sécurité industrielles, la terminologie et la nomenclature, la législation dans ses rapports avec la technique de l'industrie, l'enseignement technique et professionnel; enfin, les questions économiques envisagées dans leur rapport avec la technique.

Les membres de l'Union seraient : les Associations internationales, constituées ou futures, à but technique spécial; les Associations nationales, non encore constituées internationalement, les Sections de la technique dans les Conseils nationaux de Recherches ou Institutions nationales similaires ; enfin, les personnalités ou groupements isolés pourront, à titre de membres correspondants, être mis à même de profiter des avantages attachés à la qualité de membre de l'Union.

L'Assemblée décide la création d'un Comité d'étude provisoire en vue de préparer un projet de statuts, lequel s'inspirera, dans son esprit et dans toutes les dispositions d'ordre général, des statuts du Conseil international de Recherches ; elle émet le vœu que ce Comité ait son siège à Bruxelles.

Ce Comité fera le nécessaire pour assurer, dans le plus bref délai possible, la constitution définitive de l'Union et pour obtenir une législation lui accordant la personnification civile.

Ce Comité provisoire est constitué comme il suit : MM. de Chardonnet, Fantolli, Otlet et Gustave-L. Gérard.

Ces membres pourront s'adjoindre ultérieurement par cooptation des personnalités propres à représenter les autres pays intéressés.

L'Assemblée entend les conclusions du rapport de M. Gérard sur la Standardisation. Elle émet l'avis qu'il y a lieu de l'adopter et d'ouvrir des négociations en vue de constituer une Union internationale de Standardisation rattachée à l'Union technique internationale.

L'Assemblée prend enfin acte du rapport de M. Otlet sur la documentation technique et en adopte en principe les conclusions tendant à la création d'un Institut international de documentation technique rattaché à l'Institut international de Bibliographie. Elle renvoie l'examen des détails de cette fondation à l'Union internationale pour la Bibliographie et la Documentation laquelle ses membres seront invités à se joindre.

L. — Brevets d'invention.

La Section chargée de l'examen des questions générales d'ordre international relatives aux brevets — Président : M. Paul Otlet; Secrétaire rapporteur : M. Jean Hazée — a rejeté la proposition d'établir un brevet international et l'examen préalable obligatoire. Elle estime que le brevet international unique est actuellement irréalisable à cause de la trop grande diversité dans les législations des pays alliés et neutres et dans les raisons, d'ordre économique, qui en sont les causes déterminantes.

Mais, en vue de coordonner les efforts des inventeurs et des techniciens, et de leur éviter des pertes de temps et d'argent, il a été décidé d'établir un Bureau central de documentation en matière de brevets, chargé de rassembler et de coordonner toute la documentation en la matière, de délivrer une fiche documentaire internationale aux inventeurs qui en feront la demande, et de procéder à l'enregistrement international et à la publication internationale de leur brevet.

La résolution votée à l'unanimité, préconise « la reconnais-
» sance internationale des brevets d'invention nationaux, moyen-
» nant enregistrement international et publication internatio-
» nale ».

Sur la proposition du délégué français, M. Vaunois, le vœu adopté à l'unanimité, a été formulé de voir établir ce Bureau central de documentation et d'enregistrement à Bruxelles, où fonctionne depuis longtemps l'Institut international de bibliographie, dont M. P. Otlet est le Secrétaire général.

ANNEXE I

Séance d'inauguration

DISCOURS DE M. HARMIGNIE

MINISTRE DES SCIENCES ET DES ARTS

SIRE,

MESDAMES, MESSIEURS,

C'est avec un sentiment très vif de joie et de gratitude qu'au nom du Gouvernement, j'ai l'honneur de souhaiter la plus cordiale bienvenue aux savants délégués près l'Assemblée constitutive du Conseil international de Recherches.

En acceptant l'invitation de la Classe des sciences de l'Académie royale de Belgique, vous avez, Messieurs, cédé à une impulsion généreuse de vos cœurs.

Au lendemain de l'horrible guerre qui a ensanglanté l'Europe et dont notre chère Patrie fut la première victime, vous avez voulu donner un témoignage de sympathie à notre petit pays, dont le peuple tout entier, serré autour de son Roi, si justement proclamé le Chevalier du Droit, repoussa la sommation du César félon par cette fière parole : « L'honneur le défend ! »

Aujourd'hui, l'Éternelle justice a vengé le droit violé.

Le despote est tombé. L'orgueilleuse Allemagne est vaincue.

Hier, Paris acclamait nos braves soldats invités à participer aux honneurs du triomphe que la France décernait à sa vaillante armée, à ses glorieux maréchaux, immortels artisans de la Victoire.

Demain, à notre tour, nous fêterons avec enthousiasme le chef de l'État français venant, accompagné de ces glorieux héros, saluer nos Souverains bien-aimés et visiter la Belgique, fière de cet honneur.

Aujourd'hui, c'est à vous que nous tendons les mains, à vous les savants de tous les pays alliés de la Belgique qui venez y constituer le Conseil international de Recherches, réalisant ainsi dès à présent, dans le domaine scientifique, la Société des Nations, cette noble et belle conception, que le traité de Versailles a créée dans l'ordre politique et social, en vue d'éviter l'horrible fléau de la guerre et de proclamer la charte universelle du travail.

Vous avez voulu aussi, j'en suis convaincu, en venant dans notre pays, vous rendre compte de ses souffrances, de ses blessures, de ses ruines, de la froide exécution du plan allemand, longuement prémédité, en vue de détruire son outillage industriel et scientifique, en un mot, de supprimer la concurrence de ce petit État de sept millions d'habitants qui avait eu la témérité de devenir, au point de vue économique, la cinquième Puissance du monde.

Cette émouvante constatation redoublera l'intérêt que vous voulez bien nous porter.

Vous venez donc ici en amis, en frères.

Vous n'y trouverez pas, ai-je besoin de le dire, les représentants de la science allemande. L'Académie les a exclus de son sein.

Ils se sont à jamais disqualifiés par l'appel des Intellectuels, cette déclaration solennelle, certifiée sur l'honneur, que quatre-vingt-treize des plus célèbres d'entre eux adressèrent, par ordre, au monde entier, et qui, d'un bout à l'autre, n'est qu'un impudent outrage à la Vérité historique.

Comment associer à votre noble entreprise, ceux qui livrèrent aux flammes le siège de l'Université de Louvain et les trésors inappréciables de sa bibliothèque, pillèrent l'Université de Liége et voulurent transformer celle de Gand en une école supérieure de traîtres, de renégats.

Votre œuvre, elle, s'inspire des sentiments les plus élevés et les plus larges.

Arrière la morgue dédaigneuse et l'égoïsme étroit.

Quel est, en effet, votre but?

Il est défini dans le projet de vos statuts.

C'est de coordonner les activités internationales dans les différentes branches de la science et de ses applications ;

De provoquer la création d'Associations internationales jugées utiles au progrès des sciences et dont les statuts devront être approuvés par le Conseil international;

D'orienter l'activité scientifique internationale dans les domaines où il n'existe pas d'Associations compétentes.

Dans chaque pays allié ou associé, il sera institué un Conseil national de Recherches ayant pour objet de recueillir les découvertes, de favoriser les recherches d'ordre scientifique pur, d'étudier leurs applications dans tous les domaines où elles peuvent accroître le bien-être et la richesse du pays ou contribuer à la défense nationale, enfin d'apporter éventuellement, à charge de réciprocité, une coopération active aux organismes similaires des pays alliés ou associés pendant la guerre de 1914-1919.

C'est donc bien une œuvre d'entr'aide, de mise en commun de toutes les études, de toutes les conceptions nées du génie d'invention, d'observation, d'application, des hommes de science pure, comme aussi des ingénieurs, des industriels, des diverses nations associées.

C'est une immense ruche où, comme les abeilles laborieuses, chacun apportera le fruit de son travail à la Communauté, suivant cette belle devise : chacun pour tous et tous pour chacun.

N'est-ce pas vraiment, Messieurs, la réalisation de cette noble pensée de Pasteur : « Elle serait si belle et si utile à faire la part du cœur dans le progrès des sciences? »

Et comme elle vient à son heure cette collaboration amicale au moment où prend fin la guerre mondiale.

Dans cette lutte gigantesque, où le perfectionnement incessant de l'artillerie, du matériel, des chars d'assaut, de la marine, des avions, de la télégraphie, de l'outillage des fabriques d'armes et de munitions jouait un rôle capital, tous les efforts de la science, résultat d'une activité fiévreuse, d'un véritable bouillonnement des cerveaux, tendirent vers ce but et réalisèrent des prodiges inouïs.

Des progrès remarquables furent accomplis par la science médicale dans le traitement des blessés; la lutte contre la tuberculose dans la population civile anémiée par les privations, a redoublé d'ardeur.

Cet élan donné au génie inventif, aux recherches fécondes en faveur des œuvres de guerre va maintenant profiter aux œuvres de paix.

Il s'agit de suppléer à la raréfaction de la main-d'œuvre, car des millions de travailleurs ont payé de leur vie leur dévouement à la Patrie, à la cause du Droit; des invalides par millions ne pourront fournir qu'un effort restreint et ont besoin d'une rééducation professionnelle.

Il faut, sans perdre un instant, restaurer les usines, les doter d'un outillage perfectionné, — j'allais dire intelligent, — créer des industries nouvelles, particulièrement celles dont l'Allemagne avait pour ainsi dire le monopole.

Enfin, dans le domaine de la science financière et de l'économie sociale et politique, que de problèmes ardus sont encore à résoudre.

Élaborés dans ces Conseils nationaux, recueillis et répandus dans le monde entier par le Conseil international, ces éléments scientifiques nouveaux, ces méthodes de travail améliorées, enrichiront le patrimoine de notre enseignement supérieur comme de notre enseignement professionnel et les bienfaits de cette collaboration s'étendront jusqu'aux couches les plus profondes de la société humaine.

C'est donc une noble tâche que celle dont vous allez assumer le lourd fardeau.

Elle est digne des encouragements du Monde.

Je félicite chaleureusement la Classe des sciences de l'Académie royale de l'heureuse initiative qu'elle a prise de provoquer cette Assemblée, et je forme les meilleurs vœux pour la prospérité de la grande œuvre à laquelle vous allez donner la vie.

Ayant vu le jour à Bruxelles, elle sera particulièrement chère aux Belges, et le Gouvernement sera heureux de contribuer à son développement.

De son côté, je n'en doute pas, votre Association aimera notre pays, comme on aime le sol natal, que l'on est toujours heureux de revoir.

Fort de cette conviction, au nom du Gouvernement, je me permets d'exprimer le vœu ardent que Bruxelles, berceau de votre œuvre, en devienne le siège permanent.

La Belgique a été justement appelée le carrefour des Nations, ce qui lui a valu, dans l'histoire, le triste privilège d'être le champ de bataille de l'Europe; par contre, n'est-elle pas indiquée pour devenir le trait d'union des peuples?

Déjà de nombreuses sociétés internationales scientifiques ou littéraires y ont établi leur centre d'activité.

Après la guerre, nous avions espéré que notre capitale serait choisie pour être le siège de la Société des Nations.

Il nous semblait qu'après avoir, sans hésiter, tout sacrifié au respect de la foi jurée; après avoir par l'héroïsme de son Roi et de ses soldats, retardé, elle petit pygmée, la masse du colosse Germain, déjoué ses plans et contribué à sauver le monde de son odieuse domination, notre Patrie, comme l'a dit éloquemment un membre du Parlement, méritait cette croix d'honneur.

Malheureusement, la Conférence de la Paix en décida autrement et ce fut pour nous une douloureuse déception.

La Conférence de la Science, devant laquelle j'ai l'honneur de parler, ne refusera pas ce témoignage d'estime et de sympathie à la Belgique martyre de l'honneur!

ANNEXE II

Séance d'inauguration

DISCOURS DE M. A. GRAVIS

Directeur de la Classe des sciences de l'Académie royale de Belgique.

Sire,

Mesdames, Messieurs,

La Classe des sciences de l'Académie royale de Belgique reçoit aujourd'hui les délégués des États alliés et associés, réunis en vue de fonder le Conseil international de Recherches. Décidé par les Conférences des Académies interalliées, tenues à Londres et à Paris l'an dernier, ce Conseil s'occupera des mesures à prendre pour la réorganisation immédiate des relations scientifiques interalliées. Son but est de coordonner les activités internationales dans les différentes branches de la science et de ses applications; de provoquer la création d'Associations jugées utiles à l'avancement des sciences.

Considérant que tous les progrès industriels, agricoles, médicaux et autres reposent sur les découvertes de la Science pure, l'attention des Gouvernements sera attirée sur l'importance des études théoriques et désintéressées, dont le budget, après la guerre, devra être doté le plus largement possible.

De leur côté, les savants auront à cœur de se livrer aux recherches d'ordre scientifique et à leurs applications dans tous les domaines où elles peuvent accroître le bien-être des peuples, ou contribuer à la défense nationale.

Sire,

Votre présence à cette séance d'inauguration est pour nous un précieux encouragement. Nous nous souvenons avec respect et reconnaissance de la noble promesse que Votre Majesté a daigné formuler, en ces termes, dans son discours d'avènement :

« Quant à moi, je serai toujours prêt à seconder les efforts
» de ceux qui travaillent à la grandeur de la Patrie et qui,
» pénétrés de l'esprit de concorde et d'avancement social,
» élèvent le niveau intellectuel et moral de la nation, déve-
» loppent l'éducation et l'instruction, assurent à la masse un
» plus grand bien-être. »

Nous nous inspirerons, Sire, de ces grandes pensées et nous travaillerons à les réaliser dans toute la mesure de nos forces.

* * *

Au nom de la Classe des sciences de l'Académie royale de Belgique, je remercie les Académies des Pays alliés et associés d'avoir accepté notre invitation de tenir à Bruxelles l'Assemblée constitutive du Conseil international de Recherches et des divers organismes scientifiques nouveaux en dérivant. Je me réjouis de vous voir répondre en si grand nombre à l'appel qui vous a été adressé.

Il me paraît que j'aie, tout d'abord, à vous faire connaître la suite donnée par notre Académie et, je crois pouvoir l'ajouter, par le pays tout entier, aux propositions qui ont été formulées par les Conférences des Académies scientifiques interalliées tenues à Londres et à Paris en 1918.

L'Académie royale de Belgique a prononcé la radiation des savants appartenant aux pays avec lesquels nous étions en guerre et qui figuraient sur la liste de ses membres à quelque titre que ce soit. Elle a décidé de s'abstenir d'envoyer désormais des délégués à toute réunion internationale où devraient figurer des représentants des Empires du Centre ou des peuples soumis à leur influence militaire de 1914 à 1919. Elle a cessé radicalement le service des échanges avec ces peuples et renverra les publications que ceux-ci lui adresseraient en don.

Ces décisions ont été notifiées aux Sociétés savantes belges qui, dans un commun élan de patriotisme, ont unanimement adopté la même ligne de conduite.

Les Belges ont pris ces mesures avec la conscience qu'ils accomplissaient un acte de justice indispensable pour la moralité des nations. Ils n'ont pas eu en vue l'établissement d'un état de guerre intellectuelle permanent, d'une durée illimitée. Ils n'ont aucunement l'intention de rejeter la science allemande; s'ils refusent les publications qui leur seraient offertes par ceux qui furent leurs ennemis, c'est parce qu'ils ont l'intention de ne plus leur envoyer les leurs. Mais, ils acquerront les travaux qui paraîtront dans les Empires du Centre lorsqu'il y aura intérêt à les connaître. Ils sont formellement décidés à subordonner le rétablissement de l'ancien état de choses à cette condition clairement stipulée dans la préface qui sert d'introduction aux résolutions de Londres.

« Pour restaurer la confiance, sans laquelle toute collabora-
» tion fructueuse serait impossible, les Empires centraux
» devront désavouer les méthodes politiques dont l'application
» a engendré les atrocités qui ont indigné le monde civilisé. »

⁂

Les Conférences de Londres et de Paris n'ont pas eu en vue uniquement la rupture des relations intellectuelles avec les Empires du Centre et leurs alliés, elles ont décidé la création immédiate des nouvelles associations reconnues utiles au progrès des sciences et à leurs applications.

Parmi celles-ci figure en tout premier lieu le Conseil international de Recherches, dont l'initiative appartient aux États-Unis d'Amérique et tout particulièrement à l'éminent secrétaire perpétuel de l'Académie nationale des sciences de Washington, M. George Hale, que notre Académie s'honore de compter parmi ses membres associés et, qu'à notre vif regret nous ne voyons pas siéger parmi nous aujourd'hui, étant retenu à Washington par d'impérieux devoirs professionnels.

Le Conseil international de Recherches devant émaner de Conseils nationaux, il eût été logique de fonder tout d'abord ces derniers Dans la plupart des pays alliés et associés, il en a été ainsi. On ne nous reprochera pas d'être en retard à ce propos : La Belgique est libérée depuis quelques mois seulement, et le travail préparatoire, indispensable pour une fondation aussi importante, n'a pu être commencé pendant la guerre, comme la chose était possible chez les nations dont le territoire n'était pas occupé ou l'était seulement d'une façon partielle.

La Classe des sciences de l'Académie royale de Belgique a élaboré un projet de statuts pour le nouvel organisme; le Gouvernement l'a félicitée de son initiative et nous manquerions d'équité si nous ne reconnaissions pas que le Ministre des Sciences et des Arts, M. Harmignie, a traité la question avec une grande ampleur de vues.

L'institution sera vraisemblablement à même d'être définitivement installée dans le courant du mois d'octobre prochain.

On s'est demandé si la mise à exécution des résolutions de Londres ne nuirait pas aux progrès de la science. Les auteurs de la motion ne se sont pas inspirés seulement d'une pensée morale qui pouvait s'imposer et même parler plus haut que nos devoirs vis-à-vis de la science. Ils savaient que l'esprit d'émulation que nos nouveaux organismes internationaux allaient faire naître, engendrerait des progrès égaux, sinon supérieurs, à ceux que produiraient des rapports internationaux exempts d'estime et par suite de confiance réciproque. Et ils ont été bien avisés; car, d'emblée, nous restaurons sur une large base la vie intellectuelle mondiale nouvelle.

Un des facteurs essentiels de progrès, nous l'attendons avec une foi ardente d'une union nouvelle qui s'opère : celle des savants et des industriels dont le concours, pendant la guerre, a incontestablement rendu des services hautement appréciés.

L'Académie royale de Belgique remercie chaudement les industriels et ingénieurs de notre pays de leur efficace collaboration dans les circonstances les plus périlleuses.

Ce qui est vrai pour la Belgique, l'est également pour les autres nations alliées et associées, où les Académies viennent de contracter, tout comme nous l'avons fait, un heureux mariage avec les industriels de leurs pays.

A l'ordre du jour qui vous a été distribué figure cette proposition de notre Comité exécutif provisoire :

« Le Comité exécutif provisoire, vu la résolution prise par
» la Conférence de Paris, en novembre 1918, fixant les condi-
» tions d'admission des nations neutres durant la guerre, recom-
» mande, à l'unanimité, d'inviter les États indiqués ci-après à
» participer ultérieurement aux travaux des nouveaux orga-
» nismes scientifiques internationaux : Danemark, Espagne,
» Monaco, Norvège, Pays-Bas, Suède, Suisse, Tchéco-Slovaquie
» et Finlande. »

L'Académie royale de Belgique se réjouit de l'élargissement de nos relations intellectuelles, élargissement qui était impossible tant que la guerre sévissait en Europe.

*
* *

Vous allez être appelés, Messieurs, à constituer le Bureau qui présidera à nos Assemblées générales. Permettez-moi de vous suggérer de confier cette mission au Comité exécutif provisoire qui fut nommé à Paris en novembre dernier. Ce sera pour nous l'occasion de lui rendre le juste hommage auquel il a droit et de reconnaître les mérites et les hautes capacités de son Président, M. Émile Picard, l'éminent Secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences de Paris, et de son Secrétaire général, M. Schuster, le savant Secrétaire de la Royal Society de Londres.

Nous regrettons vivement de ne pas voir parmi nous M. Émile Picard, retenu à Paris par l'état de sa santé. Il sera remplacé dans cette Assemblée par son collègue, M. Alfred Lacroix, Secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences de Paris.

ANNEXE III

Séance d'inauguration

DISCOURS DE M. ALFRED LACROIX

SECRÉTAIRE PERPÉTUEL DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'INSTITUT DE FRANCE

SIRE,

MESDAMES, MESSIEURS,

C'est avec une émotion profonde que les membres de la Conférence académique interalliée se trouvent réunis en Belgique meurtrie, mais enfin libérée.

Après avoir pendant cinq ans glorieusement mélangé sur tant de champs de bataille le sang généreux des meilleurs de leurs enfants, les Nations alliées et associées ont senti la nécessité de continuer entre elles, après la paix, une étroite collaboration, étendue à toutes les directions de l'activité humaine et particulièrement à la recherche scientifique. Cette collaboration, nous la voulons, intime et confiante, avec tous ceux qui ont avec nous un commun idéal de droiture, de justice et de liberté, *mais nous ne la voulons qu'avec ceux-là.*

Après avoir élaboré les grandes lignes d'une entente pour l'avenir, au cours de deux réunions préliminaires tenues à Londres et à Paris, il a paru symbolique d'en sceller les accords définitifs dans ce Bruxelles, où a été montré d'une si admirable et si éclatante façon *ce que doit valoir une parole donnée.*

Nous remercions le Gouvernement belge de l'hospitalité qu'il nous offre et de l'accueil sympathique qu'il veut bien nous faire.

Le travail préparatoire de notre Conférence a été effectué par un Comité exécutif. Les membres de ce Comité sont très touchés de la proposition qui vient d'être faite de les constituer en Bureau de la présente session; ils acceptent cette charge, mais à la condition expresse que la présidence d'honneur de la Conférence sera remplie par M. le Président de la Classe des sciences de l'Académie royale de Belgique.

Jamais société savante n'a été soumise à un aussi cruel destin que l'Académie de Belgique. Tandis que plusieurs de ses membres étaient retenus ici par le périlleux devoir de défendre contre un envahisseur sans scrupules tout ce qui pouvait être défendu, beaucoup d'autres étaient dispersés sur des terres étrangères, qui, pour être amies, n'en étaient pas moins pour eux des terres d'exil; parmi eux, les uns consacrèrent toute leur intelligence et tout leur cœur à la défense nationale, alors que d'autres venaient dans nos laboratoires assurer la continuité de l'effort scientifique belge, donnant ainsi un bel exemple de foi indomptable dans le triomphe final du Droit. Nous avons appris ainsi, dans l'adversité, à mieux connaître nos confrères belges, et, à les mieux connaître, nous les avons estimés davantage. L'Académie royale de Belgique a été à la dure peine, qu'elle soit aujourd'hui à l'honneur!

Permettez-nous, Sire, de Vous adresser nos respectueux remerciements d'avoir bien voulu donner par Votre présence de l'éclat à l'ouverture de cette Conférence, apportant ainsi une preuve manifeste de Votre sollicitude pour tout ce qui touche à la science, non seulement à la science qui plane dans les hautes régions sereines des spéculations théoriques, mais aussi à toutes ses applications pratiques à la vie et au bien-être de l'humanité.

Mieux que personne, Vous savez ce que la science a fait dans le passé pour la grandeur de Votre pays, et aussi ce qu'elle est destinée à faire pour le rapide relèvement économique de la Belgique, pour son rayonnement à travers le monde.

Depuis le 3 août 1914, si souvent Vous avez entendu célébrer par des voix illustres et éloquentes, la grandeur du rôle que Vous avez joué dans les événements tragiques qui ont ébranlé, jusqu'à sa base, le monde entier, que Vous devez être blasé sur les manifestations de ce genre, peut-être cependant ne serez-Vous pas insensible au témoignage de déférente admiration que Vous adressent les hommes de science de tant de pays différents réunis ici et qui, ayant voué leur vie au culte de la Vérité, prisent très haut les qualités d'honneur, de décision et de courage qui Vous ont fait entrer vivant dans l'histoire.

Veuillez, Sire, faire agréer nos très respectueux hommages à la gracieuse Souveraine qui, à Vos côtés, a su parer d'une auréole de dévouement et de bonté l'héroïsme de l'armée belge.

ANNEXE IV

Séance de clôture

DISCOURS

PRONONCÉ

par M. Alfred LACROIX,

Président de la Conférence,
Secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences de l'Institut de France.

Messieurs,

Notre tâche est accomplie.

Nous nous sommes réunis ici pour fonder définitivement entre nations alliées et associées un Conseil de Recherches scientifiques ayant pour but principal de coordonner l'activité internationale dans les différentes branches de la science et de ses applications.

Les statuts de ce Conseil ont été rédigés. Vous les avez votés. Pour donner de la vie à votre œuvre, il ne reste plus qu'à obtenir l'adhésion de nos Académies, Conseils nationaux ou Gouvernements. Chacun de nous, dans la limite de ses forces, devra s'employer à seconder l'activité du Comité exécutif chargé de cette négociation.

En risquant tout, fors l'honneur, en risquant jusqu'à son bien le plus précieux et le plus cher, son indépendance nationale, pour rester fidèle à ses engagements et pour barrer la route à la barbarie, la Belgique a mérité l'estime et la reconnaissance du monde. Haute autorité morale constituée par l'union de savants appartenant à toutes les disciplines, à toutes les nations, qui ont lutté côte à côte pour le même idéal, la présente Conférence a jugé qu'elle ne pouvait mieux manifester cette estime et cette reconnaissance qu'en décidant à l'unanimité que Bruxelles devient le siège légal du Conseil international de Recherches scientifiques. C'est à Bruxelles que, tous les trois ans, se tiendront désormais ses Assemblées générales, c'est à Bruxelles que seront conservées ses Archives, que seront reçus et administrés, suivant la loi belge, les dons et legs qu'elle pourra recevoir.

Parmi les moyens dont le Conseil international de Recherches doit user pour la réalisation de son but, il faut mettre en première ligne la création d'Unions internationales correspondant aux principaux groupements des sciences. Ces Unions posséderont un budget et une administration propres, elles pourront se diviser en Sections autonomes utilisant librement des ressources réparties par les soins du Comité exécutif de l'Union; à leur tour, elles auront le droit de se subdiviser en Commissions permanentes ou provisoires.

Il semble que la contemplation des astres porte plus les hommes à l'association que l'étude des phénomènes ou des êtres rapprochés d'eux. Les astronomes, en effet, sont venus ici plus nombreux que tous autres; ils ont apporté pour leur Union un projet de statuts très étudié qui a été bientôt pris pour modèle général. Puis se sont groupés les géodésiens et les géophysiciens, les chimistes et les biologistes.

Plusieurs autres Unions ont été envisagées ou préparées; leur établissement définitif sera l'affaire de demain.

Malgré la symétrie d'organisation imposée à toutes les Unions, filles majeures du Conseil international de Recherches, chacune d'elles conserve une grande souplesse. C'est ainsi que l'Union astronomique n'a pas usé de son droit de se diviser en Sections, elle est restée une, mais elle a institué dans son sein une trentaine de Commissions indépendantes, alors que l'Union géodésique et géophysique ainsi que l'Union des Sciences biologiques ont admis six sections chacune.

Ainsi nous venons de délimiter de vastes territoires, nous les avons pourvus d'une constitution, nous avons même poussé la sollicitude jusqu'à leur donner un gouvernement. Une petite Conférence de la Paix se termine aujourd'hui ; son œuvre sera-t-elle meilleure ou pire que celle de la grande? L'avenir le montrera, mais il n'est pas téméraire de penser, et même de dire, que cette œuvre vaudra ce que la feront ses artisans.

Nous avons nommé une profusion de Présidents, de Vice-Présidents, de Secrétaires généraux. Je suis certain que tous prendront leur rôle à cœur, et que tous sont bien pénétrés de cette pensée qu'ils sont non seulement investis de beaucoup d'honneurs, mais aussi chargés de lourds devoirs. Ce brillant état-major va se mettre résolument à l'ouvrage pour grouper une armée de chercheurs et pour surmonter les difficultés d'ordre varié qui, n'en doutez pas, ne manqueront pas de se dresser parfois devant eux. Les noms de ces chefs sont de bon augure pour la solidité des résultats qu'ils apporteront dans trois ans à notre prochaine Assemblée générale.

L'ère des discours est close, l'heure du travail fécond vient de sonner!

A la Conférence de Londres, il a été établi comme principe légitime et nécessaire de ne constituer nos organismes de paix qu'entre les nations qui ont été unies dans les heures critiques, qui ont combattu et souffert ensemble et ont ainsi conquis le droit d'exposer clairement et nettement ce qu'elles veulent et *ce qu'elles ne veulent pas*.

Aujourd'hui la maison est prête, l'entrée en restera interdite aux Allemands et à leurs alliés, mais nous avons pensé que le moment était venu d'inviter les savants des nations neutres à collaborer avec nous. Vous avez approuvé unanimement la proposition qui vous a été faite à cet égard par le Comité exécutif.

Il est une Académie des sciences qui, bien que comptant parmi nous beaucoup de sympathies, ne fait pas partie de notre Association, nous nous plaisons à espérer qu'un jour se lèvera où, le ciel s'éclaircissant au-dessus de la Néva, le retour à d'anciennes et cordiales relations deviendra possible.

Il me reste l'agréable devoir de remercier en votre nom tous ceux qui, à des titres divers, y ont droit.

Nous avons été très honorés de l'intérêt que S. M. le Roi des Belges a bien voulu témoigner à nos travaux en venant inaugurer cette Conférence.

Nous prions le Gouvernement de la Belgique d'agréer aussi nos remerciements et nous n'oublierons pas la cordialité de l'accueil que nous ont réservé M. le Ministre des Sciences et des Arts, M. le Ministre des Affaires Étrangères et M. le Bourgmestre de Bruxelles.

Je regrette que M. le Vice-Directeur de la Classe des sciences de l'Académie royale de Belgique soit aujourd'hui retenu loin de nous par d'autres devoirs. Je prie M. le Secrétaire perpétuel Pelseneer de le remercier d'avoir bien voulu accepter notre Présidence d'honneur ; je lui demande aussi de transmettre à ses Confrères l'expression de notre gratitude pour l'hospitalité si complète et si aimable qu'ils nous ont donnée dans ce beau Palais des Académies.

M. Lecointe me permettra de lui dire combien nous avons apprécié les services qu'il a rendus à cette Conférence par son inlassable dévouement mis au service de ses connaissances si étendues, de cette limpidité de vues, de cette netteté et de cette franchise d'expression qui, de longue date, lui ont conquis la sympathie de tous ; nous sommes reconnaissants à tous ses collaborateurs de l'empressement qu'ils ont mis à prévenir nos moindres désirs.

Si nos travaux ont abouti avec tant de facilité, nous le devons à leur excellente préparation par le Comité exécutif nommé l'an dernier à Paris. Vous avez érigé ce Comité en Bureau définitif. Son Président, mon collègue M. Emile Picard, ayant été empêché par l'état de sa santé d'être présent ici, vous avez fait à l'Académie des sciences de l'Institut de France, la gracieuseté de lui conserver la présidence de cette Assemblée. Je dois à mes fonctions de Secrétaire perpétuel de cette Académie, d'avoir dirigé vos délibérations. Je m'en trouve fort honoré, mais je me félicite, en outre, de ce que la naissance spontanée et l'existence éphémère de cette présidence me mettent à l'aise pour remercier en votre nom le Comité exécutif de ce qu'il a fait pour vous dans le passé et de le féliciter de l'unanimité avec laquelle ses pouvoirs viennent d'être prorogés de trois ans. Son passé est un sûr garant de l'habileté avec laquelle il saura aider à la constitution effective des Unions projetées

Je remercie, enfin, mes collègues du Bureau, M. Volterra et M. Campbell, qui remplace M. George Hale dont nous regrettons vivement l'absence, M. Schuster, notre dévoué Secrétaire général, qui sait, avec tant d'aisance, se jouer au milieu des difficultés des affaires internationales et prouver que son activité aussi bien que sa compétence sont sans rivales.

Permettez-moi, Messieurs, en terminant, de vous exprimer ma gratitude pour la bienveillance avec laquelle vous avez facilité ma tâche; la cordialité qui n'a cessé de régner entre tous et en toutes circonstances montre que le titre un peu long de Conférence des Académies des Nations alliées et associées aurait pu être avantageusement remplacé par celui, plus court et plus expressif, de Conférence des Académies amies.

ANNEXE V

Séance de clôture

DISCOURS

PRONONCÉ

par M. Paul PELSENEER

Secrétaire perpétuel de l'Académie royale de Belgique.

Monsieur le Président,
Messieurs,

A l'ouverture des travaux de cette Conférence, les premières paroles qui vous ont été adressées par l'Académie royale de Belgique ont été des souhaits de bienvenue à nos Confrères étrangers.

Aujourd'hui, en cette séance de clôture, les derniers mots que vous entendrez seront l'expression de nos sentiments de gratitude envers tous les hommes de science qui ont pris part aux délibérations de l'Assemblée constitutive, et plus spécialement envers ceux des pays amis et alliés. Cette gratitude s'explique facilement : vous avez accepté, en effet, que les premières assises du Conseil international de Recherches scientifiques fussent tenues à Bruxelles, et vous avez même décidé que Bruxelles serait désormais le siège légal du Conseil. Cette décision a touché le cœur de tous nos compatriotes, qui y ont été infiniment sensibles.

Vous avez certainement voulu rendre ainsi un hommage particulier au pays qui a été la première victime de la guerre, et qui en a été la victime la plus éprouvée.

C'est de cette attention des délégués des Académies et des États interalliés que l'Académie de Belgique vous témoigne à nouveau sa reconnaissance.

Elle a cependant, en même temps, un regret à formuler.

Pour ne pas attrister votre séjour chez elles, la Belgique et l'Académie ont eu le souci et la coquetterie de vous cacher des blessures qui ne sont pas cicatrisées; mais ces meurtrissures profondes, dont elles souffrent encore, ne leur ont pas permis de vous faire un accueil aussi somptueux qu'elles l'eussent souhaité, et tel que l'eussent voulu les anciennes traditions d'hospitalité de ce pays.

Nous espérons toutefois que le souvenir que vous conserverez de ces réunions confraternelles n'en sera pas terni ni amoindri, et que vous emporterez surtout, très nette, cette conviction qu'un organisme robuste et solide est né en ce jour, qui contribuera, par la suite, à effacer bien des maux de la guerre, en accélérant les progrès de la civilisation que cette guerre avait temporairement arrêtés.

J'ai donc ce privilège, au nom de l'Académie et du pays dont elle est ici l'organe, de saluer, avant leur départ, nos Confrères étrangers, et de les remercier d'avoir apporté au Conseil et aux Unions que nous avons créés de concert, le concours de leur temps, de leur activité et de leur expérience scientifique.

Et je termine en exprimant, avec une entière confiance, — que vous partagez, je suis sûr, — la certitude que l'enfant né en Belgique, sous l'égide et par la collaboration des Académies interalliées, grandira et prospérera, et témoignera par là de l'opportunité et de l'utilité de l'institution que nous avons édifiée.

Nous aurons ainsi démontré nous-mêmes, par le travail accompli et par le résultat obtenu, qu'après avoir victorieusement terminé la guerre, grâce à notre commun effort, nous n'avions pas de plus ardent désir que de constituer, par notre action collective, des œuvres fécondes de paix et de confraternité internationale.

ANNEXE VI

Vœux pris en considération en séance plénière.

A. — Il est désirable que le Conseil international de Recherches publie périodiquement la liste des questions que les Unions affiliées proposeront à la solution des travailleurs scientifiques et des inventeurs. Il y a lieu de recommander aux Unions de tenir compte dans le libellé de ces questions des desiderata d'ordre industriel et social.

(Vœu formulé par M. Paul Otlet.)

B. — Considérant que les pertes résultant de la guerre ne pourront être pleinement réparées que par le travail dirigé de plus en plus dans la voie de la technique fécondée elle-même par de nouvelles découvertes scientifiques ;

Considérant que l'œuvre humanitaire et sociale ainsi dévolue à la science a besoin d'être largement outillée et subventionnée ;

La Conférence émet le vœu de voir les Gouvernements, représentés dans la Société des Nations, s'entendre pour constituer un budget international des sciences et contribuer ainsi aux travaux des Associations internationales.

(Motion présentée par MM. Bigourdan et Paul Otlet.)

C. — Considérant que la Science est un des meilleurs éléments de concorde entre les nations,

La Conférence émet le vœu que ses adhérents travaillent chacun à augmenter cette influence bienfaisante de la Science et à maintenir entre leurs Pays respectifs une union de plus en plus intime, basée sur l'estime mutuelle, sur la justice et sur l'esprit de liberté.

(Vœu présenté par M. Bigourdan.)

D. — En vue de coordonner les efforts nationaux dans toutes les disciplines et de les mettre en harmonie avec les principes qui ont inspiré la création du Conseil international de Recherches, la Conférence émet le vœu que dans tous les pays ne possédant pas de Conseil national de Recherches, cet organisme soit constitué le plus tôt possible en tenant compte des traditions et des besoins propres à chaque pays.

(Vœu présenté par MM. Bowie et Turner.)

ANNEXE VII

ORDRE DU JOUR

Vendredi 18 juillet 1919.

(Salle des séances plénières, à 10 heures.)

Installation de la Conférence.
Constitution du Bureau de l'Assemblée.
Rapport du Comité exécutif provisoire.

Samedi 19 juillet 1919.

(Salle des séances plénières, à 10 heures.)

Discussion du projet de statuts pour le Conseil international de Recherches.

Lundi 21 juillet 1919.

(A 10 heures.)

Local A. — Discussion des projets de statuts :
- *a*) Pour l'Union astronomique;
- *b*) Pour l'Union physique;
- *c*) Pour l'Union mathématique.

Local B. — Examen de questions générales, d'ordre international, relatives aux brevets.

(A 15 heures.)

Éventuellement, continuation des discussions commencées le matin.

Mardi 22 juillet 1919.

(A 10 heures.)

Local E. — Rapport du Comité pour la coopération internationale en chimie.

Rapport relatif à la fondation d'une Confédération des Associations de chimie pure et appliquée.

Mercredi 23 juillet 1919.

(A 10 heures.)

Local A. — Discussion du projet de statuts pour l'Union géodésique et géophysique.

Local B. — Conférence des délégués pour l'étude des questions relatives à l'art de l'ingénieur.

Locaux C et D. — Conférence des délégués pour l'étude des questions relatives aux sciences géologiques et aux sciences biologiques (pures et appliquées).

(A 15 heures.)

Locaux C et D. — Éventuellement, continuation des discussions relatives aux sciences biologiques, commencées le matin.

Local E. — Conférence des délégués pour l'étude des questions relatives aux sciences médicales.

Jeudi 24 juillet 1919.

(A 10 heures.)

Local A. — Union astronomique (discussions scientifiques).

Local B. — Union géodésique et géophysique, section de météorologie (discussions scientifiques).

Locaux C et D. — Éventuellement, suite de la conférence des délégués pour l'étude des questions relatives aux sciences biologiques.

Local E. — Éventuellement, suite de la conférence des délegues pour l'étude des sciences médicales.

Vendredi 25 juillet 1919.

(A 10 heures.)

Local A. — Union astronomique (suite) (nomination des Bureaux des sections).

Local B. — Union géodésique et géophysique, section de météorologie (suite) (nomination du Bureau de la section).

Locaux C et D. — Union géodésique et géophysique, section géodésique et section sismologique (discussions scientifiques et nomination des Bureaux des sections).

(A 15 heures.)

Éventuellement, continuation des discussions commencees le matin.

Samedi 26 juillet 1919.

(A 10 heures.)

Local A. — Union astronomique (constitution du Bureau).

Local B. — Union géodésique et géophysique (constitution du Bureau).

Local C. — Commission pour l'exploration biologique de l'océan Atlantique nord et de la mer du Nord (question des Pêcheries).

Lundi 28 juillet 1919.

(Salle des séances plénières, à 10 heures.)

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE.

Nomination des membres du Comité exécutif du Conseil international de Recherches.

Proposition d'admission de certains pays à se faire représenter près les organismes scientifiques internationaux nouvellement fondés (1).

Examen de questions non portées au présent ordre du jour et soumises àl'Assemblée après approbation préalable du Comité exécutif provisoire.

Remarque. — Les diverses Sections, Unions, etc., lorsqu'elles examineront des questions bibliographiques, s'en tiendront exclusivement aux sciences dont chacune d'elles s'occupe

Une Conférence internationale ayant pour objet l'étude de la bibliographie en général, sera éventuellement convoquée à une prochaine session.

---

(1) Le Comité exécutif provisoire, vu la résolution prise par la Conférence de Paris, en novembre 1918, fixant les conditions d'admission des nations neutres durant la guerre, recommande, à l'unanimité, d'inviter les États indiqués ci-après à participer ultérieurement aux travaux des nouveaux organismes scientifiques internationaux : Danemark, Espagne, Monaco, Norvège, Pays-Bas, Suède, Suisse, Tchéco-Slovaquie et Finlande.

Règlement de l'Assemblée.

1. — Les votes n'engagent pas les Etats, Instituts, Académies et Sociétés savantes représentés. Ils ont exclusivement pour objet de faire connaître l'opinion de l'Assemblée sur les questions soumises à ses délibérations. Les résolutions ne peuvent donc devenir effectives qu'après ratification par les autorités compétentes.

2. — Les votes ayant pour objet des questions d'ordre administratif et en particulier pour le siège des Bureaux et pour les élections, se feront pendant toute la durée de la Conférence de Bruxelles, à raison d'une voix par pays représenté.

3. — Lorsque des comités ou sections se réuniront séparément, ils nommeront chacun un président, un vice-président et un secrétaire-rapporteur chargé de la rédaction du procès-verbal.

Immédiatement après la clôture de la Conférence, les secrétaires remettront au Bureau du Comité exécutif, par l'intermédiaire des présidents des Sections, s'il y a lieu, les procès-verbaux des séances.

4. — Toutes les motions, propositions, etc., sont adressées par écrit au président du Comité exécutif ou aux présidents des Sections, suivant le cas.

ANNEXE VIII

COMPOSITION DES DÉLÉGATIONS

BELGIQUE

Barnich, Georges (¹), directeur de l'Institut Solvay de sociologie, conseiller du Gouvernement, rue du Luxembourg, 10, Bruxelles.

Bergé, docteur en sciences, directeur de la Raffinerie tirlemontoise, à Tirlemont.

Bordet, Jules, professeur à l'Université de Bruxelles, membre de l'Académie royale de Belgique, rue du Remorqueur, 28, Bruxelles.

Boulvin, Roch (¹), ingénieur honoraire des Mines, administrateur-délégué de la Compagnie générale de Railways et Électricité, rue de Tenbosch, 30, Bruxelles.

Brachet professeur à l'Université de Bruxelles, membre de l'Académie royale de Belgique, rue Léonard de Vinci, 32, Bruxelles.

Breyre (⁴), ingénieur au Corps des Mines, avenue de la Couronne, 165, Bruxelles.

Bultinck, administrateur de l'Œuvre royale de l'Ibis, inspecteur général de la Marine, rue de la Loi, 90, Bruxelles.

Camerman (¹), ingénieur, directeur du Banc d'épreuve de l'État à Malines; square Gutenberg, 31, Bruxelles.

Canon-Legrand (¹), industriel, à Mons.

Carlier, Jules (¹), président du Comité central industriel de Belgique, Montagne-de-l'Oratoire, 8, Bruxelles.

Cesaro, Giuseppe, professeur à l'Université de l'État, à Liége, membre de l'Académie royale de Belgique, Jupille (Liége).

Clément (¹), de la firme Coster-Clément, rue du Lombard, 41, Bruxelles.

Cornet, J., professeur à l'École des Mines de Mons, membre de l'Académie royale de Belgique, boulevard Dolez, 86, Mons.

Corteil, ingénieur à l'Administration des Télégraphes, Bruxelles.

(¹) Délégué du Ministère des Affaires Économiques.

(⁴) Délégué du Ministère de l'Industrie, du Travail et du Ravitaillement.

Crismer, Léon, professeur à l'École militaire, membre de l'Académie royale de Belgique, rue Hobbema, 39, Bruxelles.

Dallemagne, G. (1), administrateur-délégué de la Société des Produits réfractaires de Seilles-Andenne, rue de Harlez, 1, Liége.

Damas, professeur à l'Université de l'Etat à Liége, quai des Pêcheurs, 54, Liége.

De Donder, Th., professeur à l'Université de Bruxelles, rue Forestière, 11, Ixelles-Bruxelles.

de Dorlodot, H., professeur à l'Université de Louvain, rue de Bériot, 42, Louvain.

de Fuisseaux, H., ingénieur, président du Comité international permanent des Associations d'inventeurs et d'artistes industriels, membre de la Commission belge de la propriété industrielle, rue Washington, 169, Bruxelles

de Hemptinne, A., professeur à l'Université de Louvain, membre de l'Académie royale de Belgique, rue Basse-des-Champs, 49, Gand.

Deladrier, E., docteur ès sciences, rue Saint-Bernard, 2, Bruxelles.

De Lannoy (4), directeur au Bureau central des Poids et Mesures, au Ministère de l'Industrie, du Travail et du Ravitaillement, Bruxelles.

de la Vallée Poussin, Ch.-J., professeur à l'Université de Louvain, membre de l'Académie royale de Belgique, rue de la Station, 149, Louvain.

Delmer, A. (4), ingénieur principal au Corps des Mines, avenue de l'Hippodrome, 129, Bruxelles.

Delporte, Eugène, astronome adjoint à l'Observatoire royal de Belgique, rue Verhulst, 76, Uccle-Bruxelles.

Delvosal, Jules, astronome à l'Observatoire royal de Belgique, rue Rouge, 84, Uccle-Bruxelles.

Demoulin, Alphonse, professeur à l'Université de l'État, à Gand, membre de l'Académie royale de Belgique, rue Joseph Plateau, 10, Gand.

Deprez, Georges (1), secrétaire général du Comité central industriel de Belgique, rue Blanche, 33, Bruxelles.

de Ruelle, J. (3), chef de division au Ministère des Affaires Étrangères, rue du Taciturne, 39, Bruxelles.

Deruyts, Jacques, professeur à l'Université de l'État, à Liége, membre de l'Académie royale de Belgique, rue Louvrex, 5, Liége.

de Selys Longchamps, Marc, professeur à l'Université de Bruxelles, avenue Jean Linden, Bruxelles.

De Vuyst, P. (5), directeur général au Ministère de l'Agriculture, avenue de l'Yser, 22, Bruxelles.

---

(1) Délégué du Ministère des Affaires Économiques.

(3) Délégué du Ministère des Affaires Étrangères.

(4) Délégué du Ministère de l'Industrie, du Travail et du Ravitaillement.

(5) Délégué du Ministère de l'Agriculture.

Dony-Hénault, O., professeur à l'Université de Bruxelles et à l'École des Mines de Mons, boulevard Charlemagne, 29, Bruxelles.

Firket (4), ingénieur en chef-directeur des Mines, boulevard Guffens, 41, Hasselt.

Forgeur, (baron) **Edgard** (1), directeur de l'Office des questions industrielles au Ministère des Affaires Économiques, rue Père De Deken, 11, Bruxelles.

Fourmarier, ingénieur au Corps des mines, avenue de l'Observatoire, 120, Liége.

Fredericq, Léon, professeur à l'Université de l'État, à Liége, membre de l'Académie royale de Belgique, rue de Pitteurs, 20, Liége.

Galopin, Alexandre (1), ingénieur civil des Mines, directeur de la Fabrique nationale d'armes de guerre, Herstal.

Gérard, Gustave-Léo (1), chef du service technique au Comité central industriel de Belgique (Service spécial de la restauration), rue du Gentilhomme, 11, Bruxelles.

Gilson, G., directeur du Musée royal d'Histoire naturelle, professeur à l'Université de Louvain, rue Vautier, Bruxelles.

Goldschmidt, Robert, docteur en sciences, secrétaire général de la Commission internationale de T. S. F. scientifique, rue Guimard, 18, Bruxelles.

Gravis, A., professeur à l'Université de l'État, à Liége, membre de l'Académie royale de Belgique, rue Fusch, 22, Liége.

Habets, Marcel (1), ingénieur en chef des charbonnages de la Société John Cockerill, Seraing.

Hamman, Auguste, membre de la Chambre des Représentants, président du Comité de mariculture, délégué de la Belgique près le Conseil international pour l'exploration scientifique de la mer, rue Longue, 54, Ostende.

Hankar-Urban (1), administrateur-délégué de la Société belge des carrières de porphyre de Quenast, place de l'Industrie, 17, Bruxelles.

Hazée, avocat à la Cour d'appel de Bruxelles, rapporteur général du Congrès international des associations d'inventeurs et artistes industriels de 1919, rue Watteeu, 14, Bruxelles.

Heger, P. (2), membre de l'Académie royale de médecine de Belgique, professeur à l'Université de Bruxelles, rue des Drapiers, 23, Bruxelles.

Henin, J. (1), président de la Société des glaces de Charleroi et de Roux, rue des Colonies, 43, Bruxelles.

Hermant, A., ingénieur, météorologiste adjoint à l'Institut royal météorologique de Belgique, Uccle.

---

(1) Délégué du Ministère des Affaires Économiques.

(2) Délégué de l'Académie royale de médecine.

(4) Délégué du Ministère de l'Industrie, du Travail et du Ravitaillement.

Huisman, Michel, directeur au Ministère des Affaires Étrangères, avenue de la Brabançonne, 95, Bruxelles.

Jacobsen, Jules, professeur à l'Université de Bruxelles, rue de Florence, 28, Bruxelles.

Jeanne, colonel d'état-major, directeur général de l'Institut cartographique militaire de Belgique, La Cambre, Bruxelles.

Jorissen, A., professeur à l'Université de l'État à Liége, membre de l'Académie royale de Belgique, rue Sur-la-Fontaine, 112, Liége.

Julin, Charles, professeur à l'Université de l'État à Liége, membre de l'Académie royale de Belgique, rue de Fragnée, 159, Liége.

La Fontaine, H., sénateur, directeur de l'Office international de Bibliographie, secrétaire général de l'Union des Associations internationales, square Vergote, 9, Bruxelles.

Lagrange, Charles, professeur émérite de l'École militaire, membre de l'Académie royale de Belgique, rue Sans-Souci, 42, Ixelles-Bruxelles.

Lameere, Auguste, professeur à l'Université de Bruxelles, membre de l'Académie royale de Belgique, rue Defacqz, 74, Saint-Gilles-Bruxelles.

Lebacqz (4), ingénieur en chef-directeur des Mines, rue Renoz, 6, Liége.

Lecocq, Jules (1), secrétaire-trésorier du Comité central industriel de Belgique, rue Faider, 14, Bruxelles.

Lecointe, Georges, directeur de l'Observatoire royal de Belgique, membre de l'Académie royale de Belgique, à l'Observatoire royal de Belgique, Uccle-Bruxelles.

Lemaire, Em. (4), ingénieur au Corps des Mines, à Mons.

le Paige, C., administrateur-inspecteur et professeur à l'Université de l'État, à Liége, membre de l'Académie royale de Belgique, à l'Observatoire de Cointe, Liége.

Libert (4), directeur général des Mines au Ministère de l'Industrie, du Travail et du Ravitaillement, Bruxelles.

Lohest, Max, professeur à l'Université de l'État, à Liége, membre de l'Académie royale de Belgique, Mont-Saint-Martin, 49ter, Liége.

Lucion, ingénieur aux Établissements de MM. Solvay et Cie, rue du Prince-Royal, 34, Bruxelles.

Marchal, Émile, professeur à l'Institut agricole de Gembloux, membre de l'Académie royale de Belgique, chaussée de Namur, 42, Gembloux.

Marits, D., président de la Chambre syndicale pour la protection des inventeurs et des artistes industriels (Comité technique et scientifique) de la Chambre de commerce de Bruxelles, rue Jourdan, 106, Bruxelles.

---

(1) Délégué du Ministère des Affaires Économiques.

(4) Délégué du Ministère de l'Industrie, du Travail et du Ravitaillement.

Massart, J., professeur à l'Université de Bruxelles, membre de l'Académie royale de Belgique, avenue de la Chasse, 150, Etterbeek-Bruxelles.

Mathus, Ed. (4), inspecteur général de l'Industrie au Ministère de l'Industrie, du Travail et du Ravitaillement, Bruxelles.

Maury, J., sous-directeur au Ministère des Colonies, avenue de l'Opale, 73, Bruxelles.

Mavaut, O. (4), directeur général de l'Industrie au Ministère de l'Industrie, du Travail et du Ravitaillement, Bruxelles.

Nolf, Pierre, professeur à l'Université de l'État, à Liége, membre de l'Académie royale de Belgique, quai de la Boverie, 12, Liége.

Otlet, Paul, secrétaire général de l'Institut international de bibliographie, à Bruxelles, rue Fétis, 44, Bruxelles.

Pelseneer, L. (1), industriel, délégué au Comité central industriel, rue de la Vanne, 25, Bruxelles.

Pelseneer, Paul, professeur à l'École normale de l'État, à Gand, secrétaire perpétuel de l'Académie royale de Belgique, boulevard Léopold, 56, Gand.

Peltzer, A. (1), de la Firme Peltzer et fils, à Verviers.

Philippot, Hector, astronome à l'Observatoire royal de Belgique, à l'Observatoire royal de Belgique, Uccle-Bruxelles.

Philippson, capitaine commandant au service de la T. S. F. de l'armée belge, professeur à l'Université de Bruxelles, rue d'Arlon, 57, Bruxelles.

Picard, G. (1), gérant des papeteries Olin, à Virginal, rue de la Montagne, 86, Bruxelles.

Regnier-Oury (1), ingénieur, boulevard Frère-Orban, 17, Liége.

Renier, A. (4), ingénieur principal des Mines, chef du Service géologique au Ministère de l'Industrie, du Travail et du Ravitaillement, Bruxelles.

Repriels (1), industriel, à Flémalle-Grande.

Rutot, A., conservateur au Musée royal d'Histoire naturelle de Belgique, membre de l'Académie royale de Belgique, rue de la Loi, 189, Bruxelles.

Solvay, Ernest, industriel, ministre d'État, rue des Champs-Élysées, Ixelles-Bruxelles.

Somville, Oscar, astronome à l'Observatoire royal de Belgique, avenue de la Floride, 64, Uccle-Bruxelles.

Stainier, X., professeur à l'Université de l'État, à Gand, Coupure, 27, Gand.

Stocq (1), président de la Fédération nationale du Bâtiment et des Travaux publics, boulevard militaire, 69, Bruxelles.

---

(1) Délégué du Ministère des Affaires Économiques.

(4) Délégué du Ministère de l'Industrie, du Travail et du Ravitaillement.

Stroobant, Paul, directeur adjoint de l'Observatoire royal de Belgique, professeur à l'Université de Bruxelles, membre de l'Académie royale de Belgique, avenue du Haut-Pont, 13, Ixelles-Bruxelles.

Stuyvaert, Modeste, professeur à l'Université de l'État, à Gand, membre de l'Académie royale de Belgique, chaussée de Bruxelles, 232, Gendbrugge.

Swarts, Frédéric, professeur à l'Université de l'État, à Gand, membre de l'Académie royale de Belgique, avenue Clémentine, 23, Gand.

Trasenster, G. (1), directeur de la Société d'Ougrée, à Ougrée.

Uytborck, E. (1), secrétaire général de l'Union des exploitations électriques, rue Royale, 156, Bruxelles.

Van Aubel, E., professeur à l'Université de l'État, à Gand, membre de l'Académie royale de Belgique, chaussée de Courtrai, 120, Gand.

Van Biesbroeck, G., astronome adjoint à l'Observatoire royal de Belgique, à Uccle.

Vanderlinden, Em., météorologiste à l'Institut royal météorologique de Belgique, à Uccle.

Vander Smissen (1), rue des Cultes, 13, Bruxelles.

Vandeveld (1), avenue de la Brabançonne, 12, Bruxelles.

Van Ermengem, E. (2), membre de l'Académie royale de médecine de Belgique, professeur à l'Université de l'État, à Gand, chaussée de Courtrai, 137, Gand.

Van Hoegaerden, F. (1), administrateur-délégué de la Societé anonyme des usines Cotonniers à Gand, Zele et Tubize, rue de Ligne, 29, Bruxelles.

Van Langenhove, Fernand (1), directeur de l'Office des Études économiques et de la Documentation au Ministère des Affaires Économiques, avenue des Arts, 44, Bruxelles.

Verschaffelt, J.-E., professeur à l'Université de Bruxelles, membre de l'Académie royale de Belgique, avenue de la Floride, 8, Uccle-Bruxelles.

Vincent, Em., météorologiste, directeur ff. de l'Institut royal météorologique de Belgique, à Uccle.

Wibier, major, adjoint d'état-major, chef du Service de la T. S. F. de l'armée belge, rue de la Reinette, 11, Bruxelles.

Willem, Victor (3), professeur à l'Université de l'État, à Gand, membre de l'Académie royale de Belgique, rue du Jardin, 53ter, Gand.

Willem-Verstraeten, industriel, fabrique d'acide sulfurique, Wondelghem-Gand.

---

(1) Délégué du Ministère des Affaires Économiques.

(2) Délégué de l'Académie royale de médecine.

(3) Délégué du Ministère de l'Agriculture.

CANADA

Mc Lennan (Professor J. C.), F. R. S., professor of physics at the University of Toronto (Ont.).

Ruttan, R. F. M. D.-D. Sc., President of Royal Society of Canada, director of the Mc. Gill University, Montreal.

ÉTATS-UNIS D'AMÉRIQUE

Adams, W. S.. directeur adjoint de l'Observatoire solaire du Mont-Wilson, Pasadena (Cal.).

Bartow, Edward (Lt. Col.).

Bauer, L. A., directeur du Département du magnétisme terrestre du « Carnegie Institution of Washington », Washington, D. C.

Boss, Benjamin, directeur du Dudley Observatory, directeur du département d'Astrométrie méridienne de l'Institut Carnegie, Albany (N. Y.) éditeur de l' « *Astronomical Journal* ». Albany (N. Y.)

Bowie, Wm. (Major). U. S. Coast and Geodetic Survey, Washington.

Campbell, W. W., directeur de l'Observatoire Lick, Mont-Hamilton (Californie).

Cottrell, F. G. Ph. D., Chief Metallurgist, U. S. Bureau of Mines, Washington.

Fox, Philip (Maj.), professeur d'Astronomie, Dearborn Observatory. Evanston (Ill.).

Gibson, C. L. Professor at Surgery Cornell medical College, New York City, 72 East, 54th str.

Graves, H. C.

Johnson, D. W. (Major).

Lamb, A. B. (Lt. Col.).

Littlehales, G. W., Hydrographic Engineer, U. S. Navy Department. Washington. D. C.

Mendenhall, C. E., professeur de physique à l'Université de Wisconsin, attaché scientifique à Londres, Madison, Wisconsin.

Mitchell, S. A., directeur de l'Observatoire Leander Mc. Cormick, Université de Virginia, à Charlottesville (Virginia).

Parsons, Ch. L., D. Sc., Chief Chimist, U. S. Bureau of Mines, Newarkstr. 3414, Washington.

Pennie, John C., A. B. C. E., avocat à New-York.

St. John, C. E., astronome à l'Observatoire de Mont-Wilson, Pasadena (Cal.).

Schlesinger, Frank, directeur de l' « Allegheny Observatory » à Pittsburgh (Pennsylv.).

Seares, F. H., chef de service et directeur des publications de l'Observatoire solaire de Mont-Wilson (Cal.).

Simpson, Edward (Capt.), U. S. Navy Hydrographer, Washington. D. C.

Stebbins, Joël, professeur d'astronomie à l'Université d'Illinois, directeur de l'Observatoire d'Urbana (Ill.).

Stratton, S. W.

Thayer, W. S., professeur de médecine à l'Université John Hopkins, Baltimore

Washburn, E. W., professeur de chimie céramique à l'Université d'Illinois, à Urbana (Ill.).

Washington, H. S., Research assistant at Carnegie Geophysical Laboratory, Washington, attaché scientifique à Rome.

Watkins, J. T.

FRANCE

Andoyer, Henri, membre de l'Académie des Sciences et du Bureau des Longitudes, professeur d'astronomie physique à la Faculté des Sciences à la Sorbonne; rue Val-de-Grâce, 11, Paris (Ve).

Angot, Alfred, directeur du Bureau central météorologique de France, rue de l'Université, 176, Paris (VIIe).

Baillaud, Benjamin, membre de l'Académie des Sciences et du Bureau des Longitudes, directeur de l'Observatoire de Paris, à l'Observatoire de Paris (XIVe).

Barbet, Émile, ancien président de la Société des Ingénieurs civils de France, rue de l'Échelle, 5, Paris (Ier).

Béhal, Aug., membre de l'Académie de Médecine de Paris, professeur à l'École supérieure de Pharmacie, avenue de l'Observatoire, 4, Paris.

Bellot, André (le colonel), adjoint au directeur du service géographique de l'armée, rue Duroc, 17, Paris (VIIe).

Bigourdan, Guillaume, membre de l'Académie des Sciences et du Bureau des Longitudes, astronome à l'Observatoire de Paris, rue Cassini, 6, Paris (XIVe).

Bonaparte, Roland (Mgr le prince), membre de l'Académie des Sciences, avenue d'Iéna, 10, Paris (XVIe).

Caquot, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, ancien directeur de la section technique d'aviation, rue d'Assas, 58, Paris (VIe).

Charpy, Georges, membre de l'Académie des Sciences, sous-directeur technique à la Compagnie du Châtillon, Commentry et Neuves-Maisons, rue de Lille, 55, Paris (VIIe).

Chauffard, Anatole (Dr), membre de l'Académie de Médecine, rue de Bellechasse, 11, Paris (VIIe).

de Chardonnet, Hilaire Bernigaud (le comte), membre de l'Académie des Sciences, place Malesherbes, 22, Paris (XVIIe).

de la Baume Pluvinel, Aymard (le comte), correspondant du Bureau des Longitudes, avenue Raphaël, 26bis, Paris (XVIe).

Delage, Marie-Yves, membre de l'Académie des Sciences, professeur de zoologie, d'anatomie et de physiologie comparée à la Faculté des Sciences de Paris, rue du Docteur Berger, 14, Sceaux (Seine).

de Launay, Louis, membre de l'Académie des Sciences, rue de Babylone, 55, Paris (VIIe).

de la Vaulx, Henri (le comte), vice-président de la Fédération aéronautique internationale, rue Gaston de Saint-Paul, 2, Paris (XVIe).

Delbet, Pierre (le Dr), professeur à la Faculté de Médecine de Paris, rue du Bac, 24, Paris (VIIe).

Delezenne, Camille, membre de l'Académie de Médecine, professeur à l'Institut Pasteur, rue Mison, 6, Paris (XVe).

Deslandres, Henri, membre de l'Académie des Sciences et du Bureau des Longitudes, directeur de l'Observatoire d'astronomie physique de Meudon, avenue du Château, 39, Bellevue (Seine-et-Oise).

Dhé, Paul (le colonel), rue Notre-Dame-des-Champs, 42ter, Paris (VIe).

Drouets, Charles, directeur de l'Office national de la propriété industrielle, rue Saint-Martin, 292, Paris (IIIe).

Ferrié (le général), correspondant du Bureau des Longitudes, directeur technique de la T. S. F. militaire, boulevard de Montparnasse, 23, Paris (VIe).

Flahault, Charles, membre de l'Académie des Sciences, directeur de l'Institut de Botanique à la Faculté des Sciences de Strasbourg, à Strasbourg.

Gérard, J.-E., secrétaire général de la Confédération internationale des Associations de chimie, rue Huysmans, 1, Paris (VIe).

Grandidier, Guillaume, secrétaire général de la Société de Géographie, rue Gœthe, 2, Paris (XVIe).

Haller, Albin, membre de l'Académie des Sciences de Paris, membre associé de l'Académie royale de Belgique, professeur de chimie à la Faculté des Sciences de Paris, rue Vauquelin, 10, Paris (Ve).

Hamy, Maurice, membre de l'Académie des Sciences et du Bureau des Longitudes, astronome à l'Observatoire de Paris, rue de Rennes, 108, Paris (VIe).

Hanriot, Maurice, membre de l'Académie de Médecine, quai Conti, 11, Paris.

Hartmann, Henri (**Dr**), professeur à la Faculté de Médecine de Paris, place Malesherbes, 4, Paris (XVIIe).

Joubin, Louis, professeur au Muséum national d'Histoire naturelle, rue de l'Odéon, 21, Paris (VIe).

Koenigs, Gabriel, membre de l'Académie des Sciences, professeur de mécanique à la Faculté des Sciences de Paris, rue du Faubourg-Saint-Jacques, 77, Paris (XIVe).

Lacroix, Alfred, secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, professeur de minéralogie au Muséum national d'Histoire naturelle, rue Humboldt, 23, Paris (XIVe), et rue de Buffon, 61, Paris.

Lallemand, Charles, membre de l'Académie des Sciences et du Bureau des Longitudes, directeur du Nivellement général de la France, boulevard Émile Augier, 58, Paris (XVIe).

Mainié, Ferdinand, président de l'Association des inventeurs et artistes industriels, membre de l'Office national de la protection industrielle, rue de Pétrograd, 2, Paris (VIIIe).

Marie, Charles, secrétaire général des Tables annuelles de constantes et données numériques de chimie, de physique et de technologie, rue de Bagneux, 9, Paris (VIe).

Moureu, Charles, membre de l'Académie des Sciences, professeur de chimie au Collège de France, rue Pierre Curie, 18, Paris (Ve).

Parenty, Henry, correspondant de l'Institut de France, avenue de Malakoff, 11, Paris.

Perrier, Edmond, membre de l'Académie des Sciences, directeur du Muséum d'Histoire naturelle, rue Cuvier, 57, Paris (Ve).

Picard, Émile, secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences et membre du Bureau des Longitudes, professeur d'analyse supérieure et d'algèbre supérieure à la Faculté des Sciences, rue Joseph Bara, 4, Paris (VIe).

Quénu, Édouard, membre de l'Académie des Sciences, professeur à la Faculté de Médecine de Paris, rue de Lisbonne, 10, Paris (VIIIe).

Rabut, Charles, ancien inspecteur général des Ponts et Chaussées, rue de l'Abbé de l'Epée, 14, Paris (Ve).

Renaud, J., membre du Bureau des Longitudes, rue Molitor, 48, Paris (XVIe).

Roule, Louis, professeur au Muséum national d'Histoire naturelle, rue Cuvier, 57, Paris (Ve).

Sebert, Hippolyte (le général), membre de l'Académie des Sciences, rue Brémontier, Paris (XVIIe).

Séjourné, Paul, sous-directeur de la Compagnie des Chemins de fer de Paris à Lyon et à la Méditerranée, rue Notre-Dame-des-Champs, 82, Paris (VIIe).

Vaunois, Albert, avocat à la Cour d'Appel de Paris, membre de la Commission technique de l'Office national de la propriété industrielle, Faubourg-Saint-Honoré, 197, Paris (VIIIe).

Violle, Jules, membre de l'Académie des Sciences, professeur de physique au Conservatoire national des Arts et Métiers, boulevard Saint-Michel, 89, Paris (Ve).

Widal, membre de l'Académie des Sciences, professeur à la Faculté de Médecine de Paris, boulevard Haussmann, 155, Paris (VIIIe).

ROYAUME-UNI DE GRANDE-BRETAGNE ET D'IRLANDE.

Bateson, W. (D. Sc.), F. R. S., Director of the John Junes Horticultural Institution, The Manor House, Merton.

Chree, C. (D. Sc.), F. R. S., Superintendent of the Kew Observatory, Richmond.

Cowell, P. H. (D. Sc.), F. R. S., Superintendent of the Nautical Almanac Office, Shooters Hill, C. D. London, S. E. 3.

Dyson, Sir Frank, F. R. S., Astronome royal, Greenwich Observatory.

Fowler, A., Professor of Astrophysics, Imperial College of Science, Rusthall Avenue, 19, London. W. 4.

Glaisher, J. W. L. (D. Sc.), Trinity College, Cambridge.

Lamb, H. (D. Sc.), F. R. S., Professor of Mathematics at the University of Manchester.

Lees, C. H. (D. Sc.), F. R. S., Professor of Physics at the East London College, Dryhill Park, Tonbridge.

Lyons, H. G. (Colonel), F. R. S., Director of Science Museum, South Kensington, Crofton House, Ashtead, Surrey.

Newall, H. F., Professor of Astronomy at the University of Cambridge, Madingley Rise, Cambridge.

Sampson, R. A. (D. Sc.), F. R. S., Royal astronomer for Scotland, Royal observatory, Edinburgh.

Schuster, A. (D. Sc.), F. R. S., Secretary of the Royal Society, Yeldall, Twyford, Berkshire.

Sherrington., C., F. R. S., Professor of Physiology at the University of Oxford.

Starling, E., F. R. S., Professor of Physiology at University College, London.

Stratton, F. J. M., Astronome adjoint à l'Observatoire de Cambridge.

Turner, H. H., F. R. S., Professor of Astronomy at the University of Oxford, Blackhall Road, 9, Oxford.

Walker, G.-W., F. R. S, Chief Scientist at H. M. Minning School, Portsmouth.

Young, W. H., F. R. S., Professor of the History of Mathematics at the University of Liverpool.

ITALIE

Ciamician, Giacomo (Prof.-Sénat.), professeur à l'Université royale de Bologne, à Bologne.

Corbino, Orso Mario (Prof.), professeur à l'Université royale de Rome, président du Conseil supérieur « *per le Acque pubbliche* », à Rome.

Durante, Francesco (Prof.-Sénat.), professeur à l'Université royale de Rome, président de la Société royale de médecine de Rome, à Rome.

Fano, Giulio (Prof.-Sénat.), professeur à l'Université royale de Rome, président de la Commission scientifique pour l'alimentation, à Rome.

Fantolli, Gaudenzio (Prof.), professeur à l'Institut royal polytechnique supérieur de Milan, membre du Conseil supérieur « *delle Acque* », à Milan.

Marchiafava, Ettorè (Prof.-Sénat.), professeur à l'Université royale de Rome, à Rome.

Nasini, Raffaele (Prof.), professeur à l'Université royale de Pise, à Pise.

Palazzo, Luigi (Prof.), professeur à l'Université royale de Rome directeur de l'Office central de météorologie et de géodynamique, Rome.

Paterno, Emanuele (Prof.-Sénat.), professeur à l'Université royale de Rome, secrétaire de la Société italienne des sciences, Rome.

Pirelli, Giambattista (Sénateur), ingénieur, vice-président du Comité national scientifique et technique pour le développement de l'industrie, Établissements Pirelli, Milan.

Pirotta, Romualdo (Prof.), professeur à l'Université royale de Rome, vice-président de la Commission scientifique pour l'alimentation, Rome.

Reina, Vincenzo (Prof.), professeur à l'Université royale de Rome, vice-président de la Commission de géodésie, Rome.

Ricco, Annibale (Prof.), professeur à l'Université royale de Catania, directeur de l'Observatoire de l'Etna, président de la Société de spectroscopie, à Catania.

Righi, Augusto (Prof.-Sénat.), professeur à l'Université royale de Bologne, président de la Société italienne de physique, Bologne.

Volterra, Vito (Prof.-Sénat.), professeur à l'Université royale de Rome, membre de l'Académie royale « *De Lincei* » et chef de la délégation de cette Académie, Rome.

JAPON

Takanadate, Aikitu, professeur honoraire de l'Université impériale de Tokyo, membre de l'Académie impériale des Sciences, Hôngô-Tokyo.

NOUVELLE-ZÉLANDE

Dendy, A. (D. Sc.), F. R. S., Professor of Zoology at the University of London, Vale Lodge, Hampstead, London N. W. 3.

POLOGNE

Natanson, Ladislas, professeur à l'Université de Cracovie, membre de l'Académie polonaise des Sciences, rue Studenека, à Cracovie.

PORTUGAL

Alves da Veiga, A. M., Envoyé extraordinaire et Ministre plénipotentiaire de la République portugaise, à Bruxelles.

ROUMANIE

Mrazec, directeur de l'Institut géologique.

Saligny, ingénieur, ancien Ministre des Travaux publics.

SERBIE

Cvijić, Iovan, professeur de l'Université de Belgrade, membre de l'Académie royale de Serbie, Belgrade.

Pétrowitch, Michel (Capitaine), professeur à l'Université de Belgrade, membre de l'Académie royale de Serbie, à Belgrade.

ANNEXE IX.

STATUTS

DU

CONSEIL INTERNATIONAL DE RECHERCHES

(Approuvés en séance plénière, le 28 juillet 1919)

I. — Objets du Conseil international.

1. Le Conseil international de Recherches a pour but :

a) De coordonner l'activité internationale dans les différentes branches de la science et de ses applications;

b) De provoquer, conformément à l'article 1^er^ des résolutions de Londres (octobre 1918) (¹), la création d'Associations ou d'Unions internationales jugées utiles au progrès des sciences;

c) D'orienter l'activité scientifique internationale dans les domaines où il n'existe pas d'Associations compétentes;

d) D'entrer, par des moyens appropriés, en relation avec les Gouvernements des pays adhérents pour recommander l'étude de questions qui sont de sa compétence.

(¹) « Aussitôt que les circonstances le permettront, les conventions relatives aux Associations scientifiques internationales seront, conformément aux statuts ou règlements propres à chacune d'elles, dénoncées par les groupements compétents des Nations en guerre avec les Empires centraux.

» Les nouvelles Associations reconnues utiles au progrès des sciences et de leurs applications seront établies, dès maintenant, par les Nations en guerre avec les Empires centraux, avec le concours éventuel des Neutres. »

II. — SIÈGE.

2. Le siège légal du Conseil international de Recherches est fixé à Bruxelles, où se tiendront les Assemblées générales et où seront conservées les archives.

Les dons et legs seront reçus et gérés suivant la législation belge.

III. — ADMISSIONS.

3. Pourront participer à la fondation du Conseil international de Recherches et des Associations qui lui sont rattachées, ou y adhérer ultérieurement, les pays dont les noms suivent : *Belgique, Brésil, États-Unis, France, Royaume-Uni de Grande-Bretagne et d'Irlande, Australie, Canada, Nouvelle-Zélande, Afrique du Sud, Grèce, Italie, Japon, Pologne, Portugal, Roumanie, Serbie.*

Lorsqu'une Association sera constituée, les nations non comprises dans l'énumération précédente, mais rentrant dans les conditions de l'article 1er des résolutions de la Conférence de Londres, pourront y être admises, soit sur leur demande, soit sur la proposition de l'un des pays faisant déjà partie de l'Association.

Cette demande ou cette proposition sera soumise à l'Association intéressée, qui décidera à la majorité des trois quarts des voix de l'ensemble des pays déjà associés.

4. Un pays peut adhérer au Conseil international de Recherches ou aux Associations qui lui sont rattachées soit par son Académie nationale, soit par son Conseil national de Recherches, soit par d'autres institutions ou groupements d'institutions nationales similaires, soit par son Gouvernement.

5. Les statuts des Associations rattachées au Conseil international de Recherches devront être approuvés par celui-ci.

IV. — ADMINISTRATION DU CONSEIL.

6. Les travaux du Conseil sont dirigés par l'Assemblée générale formée de l'ensemble des délégués accrédités à cette fin par les pays adhérents.

7. Il est constitué un *Comité exécutif* qui gère les affaires du Conseil dans l'intervalle de deux Assemblées générales, conformément aux résolutions prises à la session précédente.

Ce Comité comprend cinq membres élus par l'Assemblée générale (¹).

8. Le Bureau du Comité exécutif comprend un Président, deux Vice-Présidents et un Secrétaire général, élus par l'Assemblée générale ; ils demeurent en fonctions jusqu'à la fin de la deuxième Assemblée générale qui suit celle de leur élection. Exceptionnellement, le mandat du Président et de l'un des Vice-Présidents élus à la fondation du Conseil cesse à la fin de la première Assemblée générale qui suit celle de leur élection. Les membres sortants sont rééligibles.

9. Le Secrétaire général expédie la correspondance et assure la gestion des ressources, ainsi que la préparation et la distribution des publications décidées par l'Assemblée générale.

10. Le Comité exécutif peut pourvoir aux vacances qui surviendraient dans son sein.

Toute personne désignée dans ces conditions demeure en fonctions jusqu'à la réunion de l'Assemblée générale suivante, qui doit procéder à une élection définitive. Le membre ainsi élu achève le mandat de celui qu'il s'agissait de remplacer.

(¹) Les articles 7 et 8 seront éventuellement revisés. Le Comité exécutif, élu en 1919, cessera son mandat à la prochaine Assemblée générale.

V. — ATTRIBUTIONS DU COMITÉ EXÉCUTIF.

11. Dans l'intervalle de deux Assemblées générales, le Comité exécutif peut soumettre des propositions à l'approbation des organismes adhérents; il est tenu de le faire lorsqu'il en est requis par un tiers des voix des pays faisant partie de l'Association.

12. Le Comité exécutif peut nommer des Commissions spéciales pour l'étude de toute question de la compétence du Conseil international de Recherches ; leurs membres ne sont pas nécessairement choisis parmi les délégués près le Conseil international de Recherches. Ces Commissions spéciales peuvent, à leur tour, s'adjoindre, par cooptation, de nouveaux membres à la majorité des deux tiers des voix de ceux qui les composent.

13. Le Comité exécutif doit présenter un rapport annuel à l'organisme de chaque pays adhérent au Conseil.

Ces rapports sont aussi envoyés aux délégués à l'Assemblée générale précédente.

VI. — ASSEMBLÉES GÉNÉRALES.

14. Le Conseil se réunit en principe tous les trois ans, en Assemblée générale ordinaire. Si l'époque de cette réunion n'a pas été arrêtée par l'Assemblée générale précédente, elle est fixée par le Comité exécutif et communiquée, quatre mois au moins à l'avance, aux divers organismes adhérents.

15. Dans des cas spéciaux, le Président peut, avec le consentement du Comité exécutif, convoquer une Assemblée générale extraordinaire; il est tenu de le faire à la demande d'un tiers des voix des pays adhérents.

16. Les délégués des divers pays près l'Assemblée générale sont nommés par les organismes adhérents au Conseil international de Recherches.

17. Le Président du Comité exécutif peut, de sa propre initiative, inviter des hommes de science, non délégués mais appartenant aux pays adhérents, à assister, à titre consultatif, aux séances de l'Assemblée générale.

Les membres des Commissions spéciales mentionnées à l'article 12, ont le droit d'assister, dans les mêmes conditions, aux séances de l'Assemblée générale où sont traitées les questions rentrant dans leurs attributions.

18. L'ordre du jour d'une session est fixé par le Comité exécutif et communiqué au moins quatre mois avant l'ouverture de cette session. Toute question ne figurant pas à l'ordre du jour n'est prise en considération qu'avec l'assentiment préalable de la moitié au moins des voix des pays représentés à l'Assemblée générale.

VII. — Budget et Droit de vote.

19. Le Comité exécutif prépare un budget de prévision pour chaque année de la période comprise entre deux sessions. Une Commission financière, nommée par l'Assemblée générale, est chargée de l'étude de ce budget et de la vérification des comptes de l'exercice précédent. Elle établit, sur ces deux questions, des rapports distincts qui sont soumis à l'Assemblée générale.

A la suite de cet examen financier, le Conseil fixe le taux de la part contributive unitaire.

La cotisation due par un pays et le nombre correspondant de voix qui lui sont attribuées sont réglés d'après le barème suivant :

Population du pays.		Nombre de voix.	Nombre de parts unitaires contributives.
Moins de 5 millions d'habitants.		1	1
Entre 5 et 10	id.	2	2
Id. 10 et 15	id.	3	3
Id. 15 et 20	id.	4	5
Plus de 20	id.	5	8

Les habitants des colonies et protectorats d'un pays sont comptés dans la population de ce pays, si celui-ci le désire et d'après les indications de son Gouvernement.

Chaque Dominion (Afrique du Sud, Australie, Canada, Nouvelle-Zélande) a un nombre de voix correspondant à sa population et fixé d'après le barème précédent.

La cotisation unitaire perçue pendant la première période de la Convention ne pourra dépasser 250 francs annuellement.

Dans chaque pays, l'autorité qui adhère au Conseil est responsable du paiement de la cotisation de ce pays.

20. Les recettes du Conseil provenant des contributions des divers pays sont consacrées aux dépenses du Bureau.

Les ressources provenant de dons sont utilisées par le Conseil international de Recherches en tenant compte des désirs exprimés par les donateurs.

Tout pays qui se retire du Conseil international de Recherches abandonne de ce fait ses droits à l'actif de l'Association.

21. Dans les Assemblées générales, les résolutions concernant les questions d'ordre scientifique sont prises à la majorité des voix de tous les délégués présents. Pour les questions d'ordre administratif et pour les questions mixtes, le vote a lieu par État, le nombre de voix de chaque État étant fixé à l'article 19. S'il y a doute sur la catégorie dans laquelle doit être rangée une question à discuter, le Président décide.

Dans les Commissions, les décisions sont prises à la majorité des voix des membres qui les composent et non par pays.

En toutes circonstances, s'il y a égalité de voix, celle du Président est prépondérante.

22. Pour les questions administratives figurant à l'ordre du jour, un pays qui n'est pas représenté peut envoyer par écrit son vote au Président. Pour être valable, ce vote doit être reçu avant le dépouillement du scrutin.

VIII. — Durée de la Convention et Modifications.

23. La présente Convention entrera en vigueur le 1er janvier 1920, à la condition que trois au moins des pays mentionnés à l'article 3 y aient adhéré. Elle sera valable jusqu'au 31 décembre 1931. Après cette date, elle sera renouvelée pour une autre période de douze ans, avec l'assentiment des pays adhérents.

24. Aucun changement ne pourra être apporté aux termes de la présente Convention sans l'approbation des deux tiers des voix des pays intéressés.

25. Le présent texte français servira exclusivement pour l'interprétation à donner aux articles de la Convention.

ANNEXE X

STATUTS

DE

L'UNION ASTRONOMIQUE INTERNATIONALE

(Adoptés en séance plénière, le 26 juillet 1919)

I. — OBJETS DE L'UNION ET CONDITIONS D'ADMISSION.

1. L'Union astronomique a pour but :

1° De faciliter les relations entre les astronomes des divers pays lorsqu'il est utile ou nécessaire d'avoir recours à une coopération internationale ;

2° De favoriser l'étude de l'Astronomie dans toutes ses branches.

2. L'admission d'un pays à l'Union est subordonnée aux conditions fixées par les statuts du Conseil international de Recherches.

II. — COMITÉS NATIONAUX.

3. Un Comité national est constitué dans chacun des pays adhérents à l'Union. Il est créé sur l'initiative, soit de son Académie nationale, soit de son Conseil national de Recherches ou d'autres institutions ou groupements d'institutions nationales similaires, soit de son Gouvernement.

4. Les Comités nationaux ont pour attributions de faciliter et de coordonner, sur leurs territoires respectifs, l'étude des diverses branches de l'Astronomie, envisagées principalement au point de vue international. Chaque Comité national, soit seul, soit de concert avec un ou plusieurs autres Comités nationaux, a le droit de soumettre à l'Union des questions à discuter rentrant dans la compétence de celle-ci.

Les Comités nationaux désignent les délégués chargés de les représenter aux Assemblées de l'Union.

III. — ADMINISTRATION DE L'UNION.

5. Les travaux de l'Union sont dirigés par l'*Assemblée générale* des délégués.

6. Le « Bureau » de l'Union comprend un Président, cinq Vice-Présidents au plus et un Secrétaire général élus par l'Assemblée générale; ils demeurent en fonctions jusqu'à la fin de la deuxième Assemblée générale ordinaire qui suit celle de leur élection. Exceptionnellement, le mandat du Président et de trois des Vice-Présidents (désignés par un tirage au sort) nommés à la fondation de l'Union, expire à la fin de la première Assemblée générale ordinaire qui suit celle de leur élection.

Ce Bureau forme le *Comité exécutif* de l'Union.

Les membres sortants sont rééligibles.

Les cinq Vice-Présidents sont choisis de manière à représenter les différentes branches de l'astronomie.

Le Comité exécutif peut pourvoir aux vacances qui surviendraient dans son sein. Toute personne désignée dans ces conditions demeure en fonctions jusqu'à la réunion de l'Assemblée générale suivante, qui doit procéder à une élection définitive. Le membre ainsi élu achève le mandat de celui qu'il s'agissait de remplacer.

Il existe, en outre, un *Bureau administratif*, qui, sous la direction du Secrétaire général de l'Union, expédie la correspondance, gère les ressources et assure la conservation des archives ainsi que la préparation et la distribution des publications approuvées par l'Assemblée générale.

IV. — COMMISSIONS.

7. L'Union nomme des *Commissions* pour l'étude de sujets déterminés d'astronomie, pour l'encouragement d'entreprises collectives et pour l'examen de questions de convention et de standardisation.

Ces Commissions présentent des rapports sur les travaux dont elles sont chargées.

8. Le Président et les membres de chacune de ces Commissions sont élus par l'Assemblée générale sur la proposition du Comité exécutif de l'Union. Ils restent en fonctions jusqu'à la fin de l'Assemblée générale ordinaire suivante et sont rééligibles.

Lorsqu'une Commission comprend des membres désignés en partie par l'Union astronomique et en partie par une autre Union rattachée au Conseil international de Recherches, elle a la faculté d'élire elle-même son Président.

Les Commissions établissent elles-mêmes leur règlement d'ordre intérieur; elles peuvent s'adjoindre, par cooptation et à la majorité des deux tiers des voix, de nouveaux membres appartenant aux pays représentés près l'Union et qui ne sont pas nécessairement délégués.

9. Avec l'approbation du Comité exécutif, une Commission peut avoir ses propres publications et confier une partie quelconque de ses travaux à des institutions nationales ou même à des particuliers.

V. — ASSEMBLÉES GÉNÉRALES.

10. L'Union se réunit en principe tous les trois ans en Assemblée générale ordinaire. Si l'époque et le lieu de cette réunion n'ont pas été arrêtés par l'Assemblée générale précédente, ils sont fixés par le Comité exécutif et communiqués, quatre mois au moins à l'avance, aux organismes adhérents.

11. Dans des cas spéciaux, le Président peut, avec le consentement du Comité exécutif, convoquer une Assemblée générale extraordinaire; il est tenu de le faire à la demande d'un tiers des voix des pays adhérents.

12. Tous les membres des Comités nationaux peuvent assister aux réunions de l'Assemblée générale et prendre part aux discussions, mais seulement avec voix consultative. Le Président de l'Union peut inviter des hommes de science, non délégués, mais appartenant à des pays adhérents, à assister, à titre consultatif, aux séances de l'Assemblée générale.

Les membres, non délégués, des Commissions mentionnées à l'article 8, ont le droit d'assister, dans les mêmes conditions, aux séances de l'Assemblée générale où sont traitées les questions rentrant dans leurs attributions.

13. L'ordre du jour d'une session est fixé par le Comité exécutif et communiqué au moins quatre mois avant l'ouverture de cette session. Toute question ne figurant pas à l'ordre du jour n'est prise en considération qu'avec l'assentiment préalable de la moitié au moins des voix des pays représentés à 'Assemblée générale.

VI. — BUDGET ET DROIT DE VOTE.

14. Le Comité exécutif prépare un budget de prévision pour chaque année de la période comprise entre deux sessions. Une Commission financière, nommée par l'Assemblée générale, est chargée de l'étude de ce budget et de la vérification des comptes de l'exercice précédent. Elle établit, sur ces deux questions, des rapports distincts qui sont soumis à l'Assemblée générale.

A la suite de cet examen financier, l'Union fixe le taux de la part contributive unitaire.

La cotisation due par un pays et le nombre correspondant de voix qui lui sont attribuées sont réglés d'après le barème suivant :

Population du pays.		Nombre de voix.	Nombre de parts unitaires contributives.
—		—	—
Moins de 5 millions d'habitants.		1	1
Entre 5 et 10	id.	2	2
Id 10 et 15	id.	3	3
Id. 15 et 20	id.	4	5
Plus de 20	id.	5	8

Les habitants des colonies et protectorats d'un pays sont comptés dans la population de ce pays, si celui-ci le désire, et d'après les indications de son Gouvernement.

Chaque Dominion (Afrique du Sud, Australie, Canada, Nouvelle-Zélande) a un nombre de voix correspondant à sa population et fixé d'après le barème précédent.

La cotisation unitaire perçue pendant la première période de la Convention ne pourra dépasser 1,500 francs annuellement.

Dans chaque pays, l'autorité qui adhère à l'Union est responsable du paiement de la cotisation de ce pays.

15. Les recettes de l'Union provenant des contributions des divers pays sont consacrées à payer :

1° Les frais de publication et les dépenses accessoires d'administration;

2° Les frais de réduction et de discussion des observations, y compris la rémunération d'assistants.

Les ressources provenant de dons sont utilisées par l'Union en tenant compte des désirs exprimés par les donateurs.

Tout pays qui se retire de l'Union abandonne de ce fait ses droits à l'actif de l'Association.

16. Dans les Assemblées générales, les résolutions concernant les questions d'ordre scientifique sont prises à la majorité des voix de tous les délégués présents. Pour les questions d'ordre administratif et pour les questions mixtes, le vote a lieu par État, le nombre de voix de chaque État étant fixé à l'article 14.

S'il y a doute sur la catégorie dans laquelle doit être rangée une question à discuter, le Président décide.

Dans les Commissions, les décisions sont prises à la majorité des voix des membres qui les composent et non par pays.

En toutes circonstances, s'il y a égalité de voix, celle du Président est prépondérante.

17. Pour les questions administratives figurant à l'ordre du jour, un pays qui n'est pas représenté peut envoyer par écrit son vote au Président. Pour être valable, ce vote doit être reçu avant le dépouillement du scrutin.

VII. — Règlements intérieurs.

18. L'Assemblée générale peut édicter des règlements intérieurs concernant, soit la conduite de ses travaux, soit les devoirs généraux qui incombent aux membres du Comité de l'Union, soit, en général, tous objets non prévus dans les statuts.

De même, chaque Commission peut élaborer des règlements pour la conduite de ses propres travaux. Avant d'entrer en vigueur, ces règlements doivent être approuvés par l'Assemblée générale; aucun d'eux ne peut contenir de prescriptions contraires aux termes de la présente Convention.

VIII. — Durée de la Convention et Modifications.

19. La présente Convention est valable jusqu'au 31 décembre 1931. Après cette date, elle sera renouvelée pour une autre période de douze ans, avec l'assentiment des pays adhérents.

20. Aucun changement ne pourra être apporté aux termes de la présente Convention sans l'approbation des deux tiers des voix des pays intéressés.

21. Le présent texte français servira exclusivement pour l'interprétation à donner aux articles de la Convention.

ANNEXE XI.

UNION ASTRONOMIQUE INTERNATIONALE

COMPOSITION DES COMMISSIONS (1)

(Arrêtée en séance plénière, le 26 juillet 1919)

1. Commission de la relativité :

Président : M. Eddington.

Membres MM. Armellini, Brillouin, H.-D. Curtis, De Donder, Ishiwara, Jeans, Levi-Civita, E Picard.

2. Commission de réédition d'ouvrages anciens

Président : M. Dreyer.

Membres : MM. Bigourdan, Birkenmayer, Crew, Knobel, Mascart, Terao.

3. Commission des notations, des unités et de l'économie des publications :

Président ; M. Stroobant.

Membres : MM. Bigourdan, Boss, Deslandres, Dyson, Frost, Turner.

4. Commission des éphémérides :

Président : M. Cowell.

Membres : MM. Andoyer, Brown, Dyson, Eichelberger.

---

(1) Les Commissions peuvent s'adjoindre, par cooptation et à la majorité des deux tiers des voix, de nouveaux membres appartenant aux pays représentés près l'Union et qui ne sont pas nécessairement délégués.

5. Commission des analyses de travaux et de bibliographie :

Président : M. B. Baillaud.

Membres : MM. Bigourdan, H. D. Curtis, Fowle, Knobel, Millosevich, Stroobant.

6. Commission des télégrammes astronomiques :

Président : M. Lecointe.

Membres : MM. Bailey, B. Baillaud.

7. Commission de l'Astronomie dynamique et des tables astronomiques :

Président : M. Andoyer.

Membres : MM. Brown, Cowell, Glaisher, Hamy, Leuschner, Moulton, Sampson.

8. Commission de l'Astronomie méridienne (y compris l'étude de la réfraction) :

Président : M. Hough.

Membres : MM. Antoniazzi, de la Baume Pluvinel, Bigourdan, Boss, Dyson, Eddington, Gonnessiat, Hamy, Di Legge, Littell, Philippot, Porter, Tucker, ... (Australien).

9. Commission des recherches optiques théoriques et appliquées relatives à l'Astronomie et à l'étude physique des instruments :

Président : M. Hamy.

Membres : MM. Carty, Conrady, Cotton, Delvosal, Fabry, Littell, Lunn, Sampson.

10. Commission de la radiation solaire :

Président : M. Abbot.

Membres : MM. Bemporad, Callendar, Deslandres, Fowle, Gorczynski.

11. Commission des spectro-hélio-enregistreurs des vitesses :

Président : M. Deslandres.

12. Commission de l'atmosphère solaire :

Président : M. Hale.

Membres : MM. Deslandres, Evershed, Fowler, Hirayama, Lee, Newall, Pérot, Ricco, St. John.

13. Commission des expéditions astronomiques, éclipses, etc.

Président : M. de la Baume Pluvinel.

Membres : MM. Angot, Barnard, Campbell, Deslandres, Fowler, Hinks, Mitchell, Palazzo, Riccò.

14. Commission des étalons de longueur d'onde et tables de spectres solaires :

Président : M. St. John.

Membres : MM. Babcock, Fabry, Fowler, Hamy, Meggers, Merton, Nagaoka, Newall, Pérot, Wright.

15. Commission de la rotation solaire :

Président : M. Newall.

Membres : MM. Adams, Deslandres, Evershed, De Lury, Pérot, Sampson, St. John.

16. Commission des observations physiques de planètes :

Président : M. Cerulli.

Membres : MM. Barnard, Deslandres, Jarry-Desloges, Lampland, Mascart, Philipps, Stroobant, H. Thomson.

17. Commission de nomenclature lunaire :

Président : M. Turner.

Membres : Miss Blagg, MM. Bigourdan, W. H. Pickering, Puiseux.

18. Commission des longitudes par télégraphie sans fil :

Président : M. le général Ferrié.

Membres : MM. Bigourdan, Carty, Delporte, Dyson, Hamy, Hoogewerff, Hough, Nakano, Sampson.

19. Commission de la variation des latitudes :

Président : M. Kimura.

Membres : MM. de la Baume Pluvinel, Bianchi, Bigourdan, Brillouin, Celoria, Hills, Jeffreys, Jones, Larmor, Littell, Reina, Ross, Schlesinger, Volta.

20. Commission des petites planètes :

Président : M. Brown.

Membres : MM. Ant. Abetti, Andoyer, Bigourdan, Bourget, Cowell, Crommelin, Fayet, Gonnessiat, Krassowski, Leuschner, Metcalf, Millosevich, Stroobant.

21. Commission des comètes :

Président : M. Leuschner.

Membres : MM. Andoyer, Barnard, de la Baume Pluvinel, Crommelin, Deslandres, Fayet, Fowler.

22. Commission des étoiles filantes :

Président : M. Denning.

Membres : Mrs Wilson, MM. Deslandres, Lebeuf, Mitchell, Olivier.

23. Commission de la carte du ciel :

Président : M. Turner.

Membres : MM. Baillaud, Balbi, Baldwin, Bemporad, Bhaskaran, Cook, Cosserat, Curlewis, Delvosal, Dyson, Gonnessiat, Hough, Lecointe, L. Picart, Riccò, Sampson, Schlesinger.

24. Commission des parallaxes stellaires :

Président : M. Schlesinger.

Membres : MM. G. Abetti, Adams, Bigourdan, Cosserat, Davidson, Dyson, Fox, Miller, Mitchell, Rambaut, Van Biesbroeck.

25. Commission de photométrie stellaire :

Président : M. Seares.

Membres : Miss Leavitt, MM. Baillaud, Eddington, Halm, Melotte, Parkhurst, Sampson, Turner.

26. Commission des étoiles doubles :

Président : M. Aitken.

Membres : MM. G. Abetti, Bigourdan, Doolittle, Espin, Fox, Hussey, Jackson, Jonckheere, Van Biesbroeck.

27. Commission des étoiles variables :

Président : M. Bailey.

Membres : MM. Bemporad, Brook, Cosserat, Jordan, Markwick, Mascart, Paci, Philipps, Plummer, Russell, Shapley, Stebbins, Turner.

28. Commission des nébuleuses :

Président : M. Bigourdan.

Membres : MM. Deslandres, Dreyer, Fabry, Knox-Shaw, Newall, Reynolds, Slipher, Wright.

29. Commission de classification spectrale des étoiles :

Président : M. Adams.

Membres : Miss Cannon, MM. R. H. Curtiss, Fowler, de Gramont, Hamy, Newall, Plaskett, Russell.

30. Commission des vitesses radiales stellaires :

Président : M. Campbell.

Membres : MM. Adams, Deslandres, Hamy, Lunt, Newall, Plaskett.

31. Commission de l'heure :

Président : M. Sampson.

Membres : MM. Baillaud, Bigourdan, Celoria, Dyson, général Ferrié, Hoogewerff, Hough, Lecointe, Philippot.

32. Commission de la réforme du calendrier :

Présidents : 1. Cardinal Mercier, 2. M. Bigourdan.

Membres : MM. Campbell, Crawford, Deslandres, Dyson, Lecointe, Millosevich, Riccò, Sampson.

ANNEXE XII

UNION ASTRONOMIQUE INTERNATIONALE

COMMISSION INTERNATIONALE DE L'HEURE

Règlement d'ordre intérieur.

(Adopté en séance plénière, le 26 juillet 1919.)

Article premier. — Il est créé une Commission internationale de l'Heure, ayant pour objet l'unification de l'heure par l'envoi de signaux radiotélégraphiques ou autres, qu'il s'agisse de signaux scientifiques de haute précision ou de signaux ordinaires, répondant aux besoins de la navigation, de la météorologie, de la sismologie, des chemins de fer, postes et télégraphes, des administrations publiques, horlogers, particuliers, etc.

Art. 2. — Le siège de la Commission est établi à Paris.

Art. 3. — Le Bureau se compose du Président, du Vice-Président et du Secrétaire général; ces deux derniers sont élus par la Commission elle-même. Le Secrétaire général, dont le mandat se termine au 31 décembre 1931, remplit les fonctions de Directeur du Bureau international de l'Heure.

Art. 4. — Le Bureau international de l'Heure, établi à l'Observatoire national de Paris, a pour objet :

1° Pour ce qui touche les signaux ordinaires, de centraliser les résultats des déterminations de l'heure universelle, exprimée en temps de Greenwich, qui lui seront transmis par les centres horaires nationaux, chargés eux-mêmes de calculer, de la manière la plus exacte, l'heure moyenne, déduite des déterminations faites par les Observatoires de leur propre pays. Ces résultats sont communiqués aussi vite que possible aux stations émettrices et aux centres nationaux;

2° Pour ce qui regarde les signaux scientifiques, de centraliser les déterminations de l'heure faites dans les Observatoires associés et d'en déduire l'heure la plus exacte.

Le Bureau international de l'Heure publie les résultats de ces comparaisons. Pour ceux de ces résultats qui ne seraient pas promptement publiés, il les communique en détail, sur leur demande, aux Associations et Établissements scientifiques officiels.

Art. 5. — Le Bureau international de l'Heure peut comprendre, outre le Directeur :

1° Des collaborateurs scientifiques nommés et révoqués par la Commission sur la proposition du Directeur du Bureau international; ils sont chargés, avec ou sans indemnité, d'études spéciales et déterminées. Leur mandat n'excède pas deux années; il peut être renouvelé;

2° Des assistants scientifiques et des aides, nommés et révoqués par le Directeur du Bureau international. Ils sont chargés des travaux figurant au programme arrêté par la Commission. Leur mandat n'excède pas quatre années et peut être renouvelé.

Le Budget détermine le montant des sommes allouées pour chacune des catégories de ce personnel.

Art. 6. — Le Directeur du Bureau international publie les résultats des travaux exécutés conformément aux décisions de la Commission. Il présente, chaque année, au Président un

Rapport embrassant tout le champ d'activité de ce Bureau. Il doit aussi lui soumettre le programme des travaux à exécuter l'année suivante. Ce Rapport annuel et le programme des travaux sont imprimés.

En sa qualité de Secrétaire général, le Directeur du Bureau international de l'Heure, d'accord avec le Président, rédige la correspondance et gère les ressources. Il assure la conservation des archives.

Art. 7. — Le Directeur du Bureau international dresse un projet de budget qui, après approbation du Président et de la Commssion, est soumis à l'Union astronomique internationale.

Art. 8. — Les crédits accordés à la Commission sont employés :

a) A couvrir les frais d'administration et de publication;

b) A solder l'indemnité du Secrétaire général, Directeur du Bureau international de l'Heure;

c) A payer les subventions ou rémunérations dues, soit pour des travaux de calculs et d'observations, soit pour les expériences ordonnées par la Commission;

d) A pourvoir aux dépenses nécessitées par l'achat et l'entretien du matériel du Bureau international de l'heure.

L'emploi des sommes ainsi attribuées est fait sous la responsabilité du Directeur du Bureau international de l'Heure et sous le contrôle de l'Union astronomique.

Art. 9. — Les présents statuts demeureront valables jusqu'au 31 décembre 1931.

ANNEXE XIII

UNION ASTRONOMIQUE INTERNATIONALE

BUREAU CENTRAL INTERNATIONAL DES TÉLÉGRAMMES ASTRONOMIQUES

Règlement d'ordre intérieur.

(Adopté en séance plénière, le 26 juillet 1919.)

1. Le Bureau central a pour but de recevoir, de centraliser et de transmettre aux divers établissements et personnes abonnés, soit par voie télégraphique, soit par correspondance, des renseignements relatifs à des découvertes, des observations et des calculs astronomiques.

2. Le siège du Bureau central est établi à l'Observatoire royal de Belgique, à Uccle; il est dirigé par le chef de cet établissement.

3. Le Bureau central est placé sous le contrôle direct de la Commission des télégrammes astronomiques.

4. Les Observatoires et établissements similaires peuvent s'abonner au Bureau central des télégrammes astronomiques. Tous les abonnés supportent également les frais généraux du Bureau central. Au début de chaque année, la Commission, sur la proposition du directeur, fixe la cotisation annuelle qui ne peut être supérieure à 25 francs, et qui se paie par anticipation. Ces fonds soldent exclusivement les frais d'impression de circulaires et de correspondance. Chaque abonné rembourse, en outre, le prix des télégrammes qui lui sont adressés.

5. Un relevé de toutes les dépenses est fait à la fin de chaque année.

6. Les abonnés accordent au Bureau central la priorité de leurs découvertes, observations ou calculs importants.

Les frais occasionnés par les envois de télégrammes, lancés à cette occasion, sont intégralement remboursés aux intéressés.

7. Le Bureau central s'efforce d'atteindre ses abonnés de toutes les parties du monde, en passant, au besoin, des conventions spéciales avec des Observatoires ou des centres secondaires situés dans d'autres continents et servant de relais.

8. Le Bureau central prend toutes les mesures désirables pour réduire à un minimum les frais de transmission; à cet effet, il continue à se servir du système chiffré en usage depuis plusieurs années.

REMARQUES

A. — *Les télégrammes expédiés au Bureau Central doivent porter l'adresse :*

ASTRA BRUXELLES

B. — *Les abonnés sont invités à faire connaître au Directeur de l'Observatoire royal de Belgique, à Uccle, l'***adresse télégraphique, simplifiée si possible,** *à laquelle les découvertes doivent leur être signalées.*

ANNEXE XIV

Séance de clôture

(Union Astronomique internationale)

DISCOURS DE M. B. BAILLAUD

Directeur de l'Observatoire de Paris.

MESSIEURS ET CHERS COLLÈGUES,

Je voudrais vous dire, au point de vue international, quelques mots de la période astronomique que nous avons vécue nous-mêmes, et de celle qui s'ouvre aujourd'hui.

Personnellement, mes plus anciens souvenirs remontent à l'entreprise internationale du catalogue des étoiles jusqu'à la grandeur 9,0 fondée, en 1867, par l'*Astronomische Gesellschaft : suum cuique!* puis aux expéditions préparées, pour l'observation en 1874 et en 1882, des passages de Vénus sur le Soleil, en vue spécialement de déterminer la parallaxe de notre foyer central. Il avait été tenu une Conférence internationale préparatoire ; cependant ces expéditions n'étaient pas encore des associations internationales, mais des coopérations à une même œuvre. La question était des plus difficiles; on fit, à la fois, des observations visuelles et des photographies; les discussions furent longues; elles donnèrent des résultats plus ou moins concordants, différant sensiblement des valeurs alors admises.

C'était presque une association que cette coopération internationale pour l'application d'un programme déterminé, provoquée par sir David Gill, ce grand astronome et, en même temps, ce merveilleux entraîneur d'hommes qui, pour la valeur de la parallaxe solaire, donna des résultats certains par des observations des planètes Victoria, Iris, Sappho faites dans vingt-deux observatoires.

Un peu plus tard, sur l'initiative de Gill et celle de l'amiral Mouchez, eut lieu, en 1897, la réunion mémorable du Congrès tenu à Paris pour la formation d'une carte photographique du Ciel et d'un catalogue des positions précises de plus de deux millions d'étoiles. Le Comité international permanent, alors constitué, a tenu à Paris cinq réunions depuis cette date. Au cours de l'exécution de l'œuvre, ce Comité organisa dans tous ses détails, pour l'observation d'Éros, une coopération de cinquante-sept observatoires qui a si brillamment confirmé le résultat donné par les trois planètes.

A côté de cette entreprise se plaça l'Union des études solaires qui, fondée à Saint-Louis, tint des Conférences à Oxford, Meudon, Mount Wilson et Bonn.

D'autres entreprises moins importantes furent faites encore : les dernières ont été la détermination, en 1913-1914, par T. S. F., de la différence de longitude entre Washington et Paris, et la formation d'une Association internationale de l'Heure par deux Conférences tenues en 1912 et 1913, dont la seconde était à la fois technique et diplomatique. Ces réunions avaient été précédées en 1896 et 1909 par des Conférences des Éphémérides.

A mesure que les Associations internationales astronomiques se multipliaient, s'en créaient d'autres analogues pour la géodésie et les diverses branches de la géophysique. Un certain nombre de savants de la plus grande valeur s'intéressaient à plusieurs de ces sciences et, dans la nécessité d'assister aux réunions, passaient en voyages une partie notable de leur temps. On étudiait les moyens de faire coïncider les déplacements de manière à les rendre moins fréquents et aussi moins coûteux quand, en août 1914, la guerre éclata.

Je ne redirai pas une fois de plus les raisons qui nous rendirent insupportable l'idée que nous pourrions, dans l'avenir, nous retrouver en contact avec les savants des Empires centraux. La guerre terminée, l'on s'est préoccupé de reconstituer les associations anciennes sans les Allemands.

Tout d'abord, l'idée fut proposée par George Hale de former un Conseil international de Recherches, et c'est ce Conseil qui proposa les bases des associations nouvelles. En les reconstituant, on décida d'en diminuer le nombre.

L'Union astronomique est la première association dont l'organisation fut proposée : elle le fut par George Hale, à Londres, en octobre 1918. Cette Union s'étend à toutes les parties de l'astronomie, dans le sens le plus étendu du mot, englobant l'astronomie de position, théorique ou pratique, visuelle ou photographique, la photométrie du Soleil et des autres astres, la spectroscopie solaire et la spectroscopie stellaire. La réunion s'impose : depuis vingt ans, les diverses branches se pénètrent et se prêtent un mutuel secours.

Quelques-uns regrettaient que les réunions devinssent moins fréquentes. Entre hommes loyaux qui se rencontrent et s'intéressent à des questions de même ordre, se forment souvent des relations d'amitié des plus durables qui sont l'un des plus grands charmes de la vie. La résolution de tenir tous les trois ans les assises des Unions donnera satisfaction à ce besoin de notre âme; elle régularisera les voyages et les rendra plus faciles.

L'Union astronomique est entièrement constituée entre alliés; elle s'élargira; dès aujourd'hui elle entre en plein fonctionnement. Vous lui avez donné des vice-présidents et un secrétaire général choisis tout aux premiers rangs de l'astronomie. Vous avez porté à la présidence un astronome dont le dévouement complet vous est assuré. Vous avez formé de nombreuses Commissions dont vous avez choisi les présidents et les membres, et qui ont mission de se compléter elles-mêmes. Chacune de ces Commissions comprend les savants les plus qualifiés dans les questions dont elle doit poursuivre le perfectionnement. Tous ces hommes sont unis par une même passion pour la science et par un même désir d'union. Chacun d'eux rentré dans son cabinet, son laboratoire, son observatoire, sera averti des travaux des autres. Il n'y aura pas, ou il y aura moins d'efforts perdus.

Cette mise en commun des résultats obtenus, ces suggestions mutuelles peuvent être de la plus haute importance. Les Commissions fonctionneront le plus souvent par correspondance; les échanges de lettres entre les membres remplaceront les échanges verbaux d'idées qui, à l'ordinaire, se font entre savants travaillant dans un même institut, dans un même observatoire. Aussi bien ces Commissions pourront parfois se réunir en dehors des grandes assises des Unions. C'est, dans l'ordre intellectuel, le commencement de notre vie comme membres de la Société des Nations.

Les Comités nationaux, les Académies, les Sociétés savantes diverses, les États, des particuliers, nous l'espérons, fourniront à l'Union astronomique le total des subventions qui lui seront nécessaires. C'est ensuite à l'Union qu'il appartiendra de répartir entre les diverses Commissions les fonds dont elle pourra disposer. Naturellement il sera tenu compte des intentions des donateurs quand elles auront été formulées; mais il paraît désirable qu'un fonds important reste à la disposition de l'Union, sur lequel il puisse être pourvu à des besoins accidentels; trop souvent des efforts, même des essais importants, sont perdus par l'impossibilité de les poursuivre faute de ressources immédiatement disponibles. Si la mise en commun des ressources n'en augmente pas le total, elle en permet le plus fructueux emploi.

Les Commissions apporteront à chaque Assemblée générale des rapports concernant les progrès réalisés; parfois elle n'attendront pas cette échéance. Ces rapports, qui ont déjà eu leurs analogues en divers pays, constitueront la plus authentique histoire de l'astronomie.

Le mot *histoire* m'amène à jeter un coup d'œil sur le passé. Certes, depuis dix ans, depuis les dernières réunions du Comité de la Carte du Ciel et de l'Union solaire, de très importants résultats astronomiques ont été obtenus. Tout au moins a été soulevé le voile qui nous dissimulait la constitution de l'univers stellaire. Cependant, dans ces cinq dernières années, la vie astronomique a été supprimée en maints endroits, considérablement ralentie d'ailleurs. Nous avons dû soutenir la lutte, pour la vie grande et libre, contre une odieuse entreprise de domination et d'asservissement. L'énormité de l'effort a eu pour résultat heureux d'établir l'union entre presque tous les peuples, et cette union, qui nous a donné la victoire, continuera.

En entrant dans cette phase nouvelle, je veux, en votre nom, saluer la mémoire des grands astronomes disparus depuis douze ans dans nos divers pays. Je dois me borner aux plus grands noms : peut-être j'en oublie. Nous ne retrouverons plus Backlund, sir Robert Ball, H. Darwin, Fergola, sir David Gill, Asaph Hall, Hill, Janssen, Newcomb, E. C. Pickering, H. Poincaré, Schiaparelli, Ch. Wolf. Permettez-moi de nommer aussi, parce qu'il a personnifié les Unions internationales, le Président de la dernière Conférence de l'Heure, Gaston Darboux, ce grand géomètre, ce grand citoyen.

Il me reste à remplir un devoir qui m'est particulièrement cher en remerciant en votre nom le président de cette assemblée, ce vaillant soldat de la guerre, M. G. Lecointe, directeur de l'Observatoire royal de Belgique, dont la clarté de vues, la vivacité d'esprit, la haute intelligence et la parfaite cordialité ont permis à nos délibérations d'aboutir dans le peu de temps qui nous a été départi. Nous avons été heureux de nous réunir dans la capitale d'un pays dont l'héroïque et instantanée détermination, en août 1914, a, sans doute, été le facteur essentiel de la victoire. Grâce à M. Georges Lecointe, nous emportons cette impression, qu'en pays libre tout est facile : chacun de nous, si ce n'était chose déjà faite, ajoutera son nom à la liste de ses amis.

ANNEXE XV

STATUTS

DE

L'UNION GÉODÉSIQUE ET GÉOPHYSIQUE INTERNATIONALE

(Adoptés en séance plénière, le 24 juillet 1919)

I. — Objets de l'Union et conditions d'admission.

1. L'Union géodésique et géophysique a pour but :

1° De favoriser l'étude des problèmes qui concernent la figure et la physique du globe;

2° De provoquer et coordonner les recherches exigeant la coopération de plusieurs pays, et en assurer la discussion scientifique ainsi que la publication;

3° De faciliter des recherches spéciales, telles que les comparaisons d'instruments utilisés dans divers pays.

2. L'admission d'un Pays à l'Union est subordonnée aux conditions fixées par les statuts du Conseil international de Recherches.

II. — Comités nationaux.

3. Un Comité national est constitué dans chacun des pays adhérents à l'Union. Il est créé sur l'initiative, soit de son

Académie nationale, soit de son Conseil national de Recherches, ou d'autres institutions ou groupements d'institutions nationales similaires, soit de son Gouvernement.

4. Les Comités nationaux ont pour attributions de faciliter et de coordonner, sur leurs territoires respectifs, l'étude des diverses branches de la Géodésie et de la Géophysique, envisagées principalement au point de vue international. Chaque Comité national, soit seul, soit de concert avec un ou plusieurs autres Comités nationaux, a le droit de soumettre à l'Union des questions à discuter rentrant dans la compétence de celle-ci.

Les Comités nationaux désignent les délégués chargés de les représenter aux Assemblées de l'Union.

III. — ADMINISTRATION DE L'UNION.

5. Les travaux de l'Union sont dirigés par l'*Assemblée générale* des délégués.

6. Le « Bureau » de l'Union comprend un Président, des Vice-Présidents et un Secrétaire général. Le Président et le Secrétaire général, élus par l'Assemblée générale, demeurent en fonctions jusqu'à la fin de la deuxième Assemblée générale ordinaire qui suit celle de leur élection. Exceptionnellement, le mandat du Président élu à la fondation de l'Union cesse à la fin de la première Assemblée générale ordinaire qui suit celle de son élection.

Ce Bureau forme le *Comité exécutif* de l'Union.

Les membres sortants sont rééligibles.

Les Présidents de Sections, élus comme il est dit à l'article 8, sont de droit Vice-Présidents de l'Union.

Le Comité exécutif peut pourvoir aux vacances qui surviendraient dans son sein. Toute personne désignée dans ces conditions demeure en fonctions jusqu'à la réunion de l'Assemblée générale suivante, qui doit procéder à une élection définitive. Le membre ainsi élu achève le mandat de celui qu'il s'agissait de remplacer.

Il existe, en outre, un *Bureau administratif,* qui, sous la direction du Secrétaire général de l'Union, expédie la correspondance, gère les ressources et assure la conservation des archives ainsi que la préparation et la distribution des publications approuvées par l'Assemblée générale.

IV. — Sections.

7. La direction des travaux relatifs à des branches importantes de la Géodésie et de la Géophysique est confiée à des Sections spéciales. Des Sections de cette nature seront tout d'abord constituées pour : *a*) la Géodésie; *b*) la Sismologie; *c*) la Météorologie; *d*) le Magnétisme et l'Electricité terrestres; *e*) l'Océanographie physique; *f*) la Vulcanologie. D'autres Sections pourront être créées, dans la suite, par décision de l'Assemblée générale.

Le contrôle des travaux non spécialement confiés à une Section appartient à l'Assemblée générale, qui peut en déléguer la direction à des Commissions spéciales.

8. Chaque Section élit son Président, son Vice-Président et son Secrétaire; ils demeurent en fonctions jusqu'à la fin de la deuxième Assemblée générale ordinaire qui suit celle de leur élection. Exceptionnellement le mandat de la moitié des Présidents (désignés par un tirage au sort) élus à la fondation de l'Union, cesse à la fin de la première Assemblée générale ordinaire qui suit celle de leur élection.

Le mandat des Vice-Présidents élus à la fondation cesse à la fin de la première Assemblée générale ordinaire qui suit celle de leur élection, lorsque le Président de leur Section reste en fonction au-delà de ce terme.

Les membres sortants sont rééligibles.

Une section peut avoir son bureau central. Le Secrétaire y remplit les fonctions de Directeur; il est chargé de la correspondance, de la gestion des ressources de la Section, de la conservation des archives ainsi que de la préparation et la distribution des publications.

Une Section peut nommer un *Comité exécutif*. Le Président, le Vice-Président et le Secrétaire en sont membres de droit.

La Section peut confier à des Commissions spéciales l'étude de certaines questions.

9. Les procès-verbaux d'une Section doivent être communiqués au Bureau de l'Union, mais n'exigent pas la ratification de l'Assemblée générale, à moins que, de l'avis de ce Bureau, ils ne concernent également, soit d'autres Sections, soit l'œuvre d'ensemble de l'Union.

Avec l'approbation de l'Union, une Section peut avoir ses propres publications et confier une partie quelconque de ses travaux à des institutions nationales ou même à des particuliers.

V. — Assemblées de l'Union et Séances des Sections.

10. L'Union se réunit en principe tous les trois ans en Assemblée générale ordinaire. Si l'époque et le lieu de la réunion n'ont pas été arrêtés par l'Assemblée générale précédente, ils sont fixés par le Comité exécutif et communiqués, quatre mois au moins à l'avance, aux organismes adhérents.

Chaque Section tient une séance ordinaire au cours de la session de l'Assemblée générale. Plusieurs Sections peuvent se réunir conjointement suivant un horaire fixé par le Bureau de l'Union, après entente avec les Bureaux des Sections intéressées.

11. Dans des cas spéciaux, le Président de l'Union peut, avec le consentement du Comité exécutif, convoquer une Assemblée générale extraordinaire. Il est tenu de le faire à la demande d'un tiers des voix des pays adhérents.

De même, le Président d'une Section peut, avec le consentement de son Comité exécutif, provoquer une réunion extraordinaire de la Section.

12. Tous les membres des Comités nationaux peuvent assister aux réunions de l'Assemblée générale ou des Sections et prendre part aux discussions, mais seulement avec voix consultative.

Le Président de l'Union peut inviter des hommes de science, non délégués, mais appartenant à des pays adhérents, à assister, à titre consultatif, aux séances de l'Assemblée générale. De même, un Président de Section peut, de sa propre initiative ou à la demande du Président du Comité national du pays intéressé, inviter des hommes de science à assister, à titre consultatif, aux séances de cette Section.

13. L'ordre du jour d'une session est fixé par le Comité exécutif et communiqué au moins quatre mois avant l'ouverture de cette session. Toute question ne figurant pas à l'ordre du jour n'est prise en considération qu'avec l'assentiment préalable de la moitié au moins des voix des pays représentés à l'Assemblée générale.

VI. — Budget et Droit de vote.

14. Le Comité exécutif prépare un budget de prévision pour chaque année de la période comprise entre deux sessions. Une Commission financière, nommée par l'Assemblée générale, est chargée de l'étude de ce budget et de la vérification des comptes de l'exercice précédent. Elle établit, sur ces deux questions, des rapports distincts qui sont soumis à l'Assemblée générale.

A la suite de cet examen financier, l'Union fixe le taux de la part contributive unitaire.

La cotisation due par un pays et le nombre correspondant de voix qui lui sont attribuées sont réglés d'après le barème suivant :

Population du pays.		Nombre de voix.	Nombre de parts unitaires contributives.
—		—	—
Moins de 5 millions	d'habitants.	1	1
Entre 5 et 10	id.	2	2
Id. 10 et 15	id.	3	3
Id. 15 et 20	id.	4	5
Plus de 20	id.	5	8

Les habitants des colonies et protectorats d'un pays sont comptés dans la population de ce pays si celui-ci le désire et d'après les indications de son Gouvernement.

Chaque Dominion (Afrique du Sud, Australie, Canada, Nouvelle-Zélande) a un nombre de voix correspondant à sa population et fixé d'après le barème précédent.

La cotisation unitaire perçue pendant la première période de la Convention ne pourra dépasser 2600 francs annuellement. Dans chaque pays, l'autorité qui adhère à l'Union est responsable du paiement de la cotisation de ce pays.

15. Les recettes de l'Union, provenant des contributions des divers pays, doivent être tout d'abord consacrées à payer :

1° Les frais de réduction et de discussion des observations, y compris la rémunération d'assistants ;

2° Les frais de publication et les dépenses accessoires d'administration ;

3° Dans des cas spéciaux, les honoraires des Directeurs des Bureaux administratifs.

L'excédent peut, avec l'agrément de l'Assemblée générale, être utilisé pour le progrès des œuvres générales de l'Union, définies à l'article 1^er^.

Les ressources provenant de dons sont utilisées par l'Union en tenant compte des désirs exprimés par les donateurs.

Tout pays qui se retire de l'Union abandonne de ce fait ses droits à l'actif de l'Association.

16. En Assemblée générale ou en séance de Section, les résolutions concernant les questions d'ordre scientifique sont prises à la majorité des voix de tous les délégués présents. Pour les questions d'ordre administratif et pour les questions mixtes, le vote a lieu par Etat, le nombre de voix de chaque Etat étant fixé à l'article 14.

S'il y a doute sur la catégorie dans laquelle doit être rangée une question à discuter, le Président décide. En toutes circonstances, s'il y a égalité de voix, celle du Président est prépondérante.

17. Pour les questions administratives figurant à l'ordre du jour, un pays qui n'est pas représenté, peut envoyer, par écrit, son vote au Président. Pour être valable, ce vote doit être reçu avant le dépouillement du scrutin.

VII. — Règlements intérieurs.

18. L'Assemblée générale peut édicter des règlements intérieurs concernant, soit la conduite de ses travaux, soit les devoirs généraux qui incombent aux Membres du Comité de l'Union, soit, en général, tous objets non prévus dans les statuts.

De même, chaque Section peut élaborer des règlements pour la conduite de ses propres travaux. Avant d'entrer en vigueur, ces règlements doivent être approuvés par l'Assemblée générale; aucun d'eux ne peut contenir de prescriptions contraires aux termes de la présente Convention.

VIII. — DURÉE DE LA CONVENTION ET MODIFICATIONS.

19. La présente Convention est valable jusqu'au 31 décembre 1931. Après cette date, elle sera renouvelée pour une autre période de douze ans, avec l'assentiment des pays adhérents.

20. Aucun changement ne pourra être apporté aux termes de la présente Convention sans l'approbation des deux tiers des voix des pays intéressés.

21. Le présent texte français servira exclusivement pour l'interprétation à donner aux articles de la Convention.

ANNEXE XVI

STATUTS

DE

L'Union internationale de la Chimie pure et appliquée

(Présentés par la délégation de la Conférence interalliée des Associations de chimie pure et appliquée. Londres, 14-18 juillet 1919.)

Approuvés en séance plénière, à Bruxelles, le 24 juillet 1919.

ARTICLE PREMIER.

Il est institué une Union internationale de la Chimie pure et appliquée ayant pour but :

1° De resserrer les liens d'estime et d'amitié qui se sont affirmés pendant la durée de la guerre entre les différents peuples alliés ;

2° D'organiser une Coopération permanente entre les Associations de Chimie des pays adhérents ;

3° De coordonner leurs moyens d'action scientifiques et techniques ;

4° De contribuer à l'avancement de la Chimie dans toute l'étendue de son domaine.

Sa durée est illimitée. Elle a son siège provisoire à Paris.

ART. 2.

L'admission d'un Pays à l'Union est subordonnée aux conditions fixées par les statuts du Conseil international de Recherches.

Un Pays peut adhérer à l'Union par sa Fédération nationale, par son Conseil national, ou, à leur défaut, par l'Association nationale représentant la Chimie.

ART. 3.

L'action de l'Union, telle qu'elle est définie à l'article 1^er^, s'exerce par un Conseil, assisté d'un Secrétariat administratif, et par un Office spécial dont l'institution fera l'objet d'une Convention internationale entre les Pays adhérents.

ART. 4.

La cotisation annuelle est fixée, pour chaque pays, à un taux proportionnel au nombre de ses habitants, conformément au tableau suivant :

		Population en millions d'habitants.	Cotisation annuelle minimum.
Catégorie	A	de moins de 5	500 francs.
—	B	de 5 à 10	1,000 —
—	C	de 10 à 15	1,500 —
—	D	de 15 à 20	2,500 —
—	E	de 20 à 30	3,500 —
—	F	de plus de 30	4,500 —

Les habitants des colonies et protectorats d'un Pays, qui ne se gouvernent pas librement, sont comptés dans la population de ce pays, si celui-ci le désire et d'après les indications de son Gouvernement.

Tout membre de l'Union n'est engagé que pour les dépenses relatives à l'administration générale.

Toute autre dépense ne pourra lui incomber qu'après son approbation préalable.

Art. 5.

Tout membre peut se retirer de l'Union à condition d'avoir rempli ses obligations pour l'année en cours.

La radiation peut être prononcée pour non-paiement de la cotisation annuelle minimum, ou pour motifs graves, par le Conseil, à la majorité des trois quarts des membres présents ou représentés, le membre intéressé ayant été préalablement appelé à fournir ses explications.

Art. 6.

L'Union est administrée par un Conseil composé de délégués de chacun des Pays contractants, dont le nombre est fixé d'après leur catégorie, comme il est indiqué ci-après :

		Nombre de délégués.
Catégorie	A.	1 délégué.
—	B.	2 délégués.
—	C.	3 —
—	D.	4 —
—	E.	5 —
—	F.	6 —

Les délégués sont nommés pour trois ans par la Fédération nationale, le Conseil national ou, à leur défaut, par l'Association nationale représentant la Chimie, de leur Pays respectif, et sont rééligibles. Le Conseil est renouvelé par tiers chaque année.

Art. 7.

Le pouvoir exécutif du Conseil est confié à un Bureau composé d'un Président, de quatre Vice-Présidents et d'un Secrétaire général.

Le Conseil élit son Bureau dans son sein tous les trois ans à la majorité relative. Les membres du Bureau, excepté le Secrétaire général, ne sont pas rééligibles immédiatement dans les mêmes fonctions.

Le Président sera choisi parmi les Vice-Présidents sortants.

Art. 8.

Le Conseil se réunit au moins une fois par an, la veille de l'Assemblée générale annuelle, dans la ville où elle a lieu, et, en outre, chaque fois qu'il est convoqué par son Président, ou encore sur la demande du quart de ses membres.

Il est chargé d'indiquer les date et lieu de réunion, d'établir le budget et de décider des dépenses.

Pour les questions scientifiques, les résolutions sont prises à la majorité relative des délégués présents.

Pour les questions d'ordre administratif et financier, les suffrages sont exprimés par Pays, chaque Nation bénéficiant d'un nombre de voix égal à celui de ses délégués. Dans ce cas, il n'est pas nécessaire que ceux-ci soient tous présents. Un mandataire peut être désigné par les délégués d'une Nation pour les représenter et prendre part au vote en leur nom.

Le vote par correspondance est admis. Il ne pourra être voté que sur les questions portées à l'ordre du jour. S'il y a égalité de voix, celle du Président est prépondérante.

Art. 9.

Il sera tenu procès-verbal des séances; les minutes des procès-verbaux seront établies en deux exemplaires et signées par le Président et les Secrétaires de séance.

Le Secrétaire administratif aura la garde des archives et sera chargé de l'exécution des décisions prises par le Conseil et le Bureau, en particulier de l'envoi de l'ordre du jour.

Art. 10.

Le Bureau a pour fonctions :

1° De veiller à la stricte observation des statuts;

2° De fixer l'ordre du jour des réunions du Conseil;

3° D'enregistrer et d'exécuter le programme d'action élaboré par le Conseil;

4° D'accomplir, pendant tout le temps qui s'écoule entre deux réunions du Conseil, les actes d'administration nécessaires et d'en rendre compte par écrit aux membres du Conseil;

5° De soumettre au Conseil un projet de budget annuel;

6° De représenter l'Union ou de désigner ses représentants.

Art. 11.

Il sera institué, en dehors du Conseil, un Comité consultatif formé d'autant de Sections qu'il sera nécessaire pour assurer la représentation complète de la Chimie pure et appliquée, conformément au règlement de l'Union.

Art. 12.

L'Assemblée générale se compose des membres du Conseil et des délégués des diverses Fédérations nationales, Conseils nationaux ou Associations nationales représentant la Chimie.

L'Assemblée générale se réunit au moins une fois chaque année, en une session ordinaire, de préférence dans la ville où se tient le Congrès international de Chimie pure et appliquée et à la même époque.

L'Assemblée générale se réunit également chaque fois qu'elle est convoquée par le Conseil ou sur la demande de la moitié au moins des membres de l'Union.

L'Assemblée générale entend les rapports sur la gestion du Conseil, sur la situation financière et l'état général de l'Union.

Elle approuve les comptes de l'exercice clos, présentés par un commissaire financier rapporteur, pris en dehors du Conseil et nommé par l'Assemblée générale de l'année précédente.

Elle vote le budget de l'exercice suivant, délibère sur les questions mises à l'ordre du jour.

Le rapport annuel et les comptes sont adressés chaque année à tous les membres trois mois au moins avant la réunion de l'Assemblée générale annuelle.

L'ordre du jour de l'Assemblée est réglé par le Conseil et comporte obligatoirement toute question qui lui a été transmise par l'un des membres de l'Union, trois mois au moins avant la réunion de l'Assemblée générale.

Son Bureau est celui du Conseil.

Les votes sur les questions administratives et financières y sont exprimés par Pays, chacun d'eux ayant droit au nombre de voix indiqué pour les catégories prévues à l'article 6.

Les délégués d'un Pays peuvent désigner un ou plusieurs mandataires pour les représenter et prendre part au vote en leur nom.

Art. 13.

Les dépenses sont ordonnancées par le Président et réglées par le Secrétariat administratif.

L'Union est représentée dans tous les actes de la vie civile et en justice par le Président, qui peut déléguer ses pouvoirs à un membre du Conseil ou au Secrétaire administratif.

ART. 14.

Les délibérations du Conseil relatives aux acquisitions, échanges, aliénation des immeubles nécessaires au but poursuivi par l'Union, constitutions d'hypothèques sur lesdits immeubles, baux excédant neuf années, aliénations de biens et emprunts doivent être soumis à l'approbation de l'Assemblée générale.

ART. 15.

Une modification quelconque des statuts ne peut être soumise à l'Assemblée générale que sur la proposition du Conseil de l'Union ou sur la demande de l'une des Fédérations nationales, Conseils nationaux ou Associations nationales représentant la Chimie.

Les propositions de modifications figureront à l'ordre du jour de l'Assemblée générale, à la condition d'avoir été reçues par écrit par le Bureau du Conseil au moins trois mois à l'avance.

Les suffrages sont exprimés par Pays, conformément à l'article 8.

Le vote par correspondance est admis.

Les statuts ne peuvent être modifiés qu'à la majorité des deux tiers des suffrages exprimés.

ART. 16.

L'Assemblée générale appelée à se prononcer sur la dissolution de l'Union est convoquée spécialement à cet effet trois mois à l'avance. Elle doit comprendre au moins les trois quarts des délégués des membres de l'Union ou de leurs mandataires.

Si cette proportion n'est pas atteinte, l'Assemblée générale est convoquée de nouveau dans un délai minimum de six mois, et, cette fois, elle peut valablement délibérer, quel que soit le nombre des membres présents.

Le vote par correspondance est admis.

Dans tous les cas, la dissolution ne peut être votée qu'à la majorité des deux tiers des suffrages exprimés.

ART. 17.

En cas de dissolution, l'Assemblée générale désigne un ou plusieurs commissaires chargés de la liquidation des biens de l'Union.

Elle fait don de l'actif net à une Institution internationale.

ART. 18.

Le présent texte français servira exclusivement pour l'interprétation à donner aux articles des statuts.

ANNEXE XVII

PROJET DE STATUTS

DE

L'UNION INTERNATIONALE DE RADIOTÉLÉGRAPHIE SCIENTIFIQUE

(Approuvés en séance plénière, le 26 juillet 1919)

I. — Objets de l'Union et Conditions d'admission.

1. L'Union a pour but :

1° D'encourager les études scientifiques de radiotélégraphie ;

2° De susciter et organiser les recherches nécessitant une coopération internationale et permettre la discussion et la publication des résultats de ces recherches ;

3° De faciliter l'établissement de méthodes communes de mesures ainsi que la comparaison et l'étalonnage des instruments de mesure.

2. L'admission d'un Pays à l'Union est subordonnée aux conditions fixées par les statuts du Conseil international de Recherches.

II. — Comités nationaux.

3. Un Comité national est constitué dans chacun des pays adhérents à l'Union. Il est créé sur l'initiative, soit de son

Académie nationale, soit de son Conseil national de Recherches ou d'autres institutions ou groupements d'institutions nationales similaires, soit de son Gouvernement.

4. Les Comités nationaux ont pour attributions de faciliter et de coordonner, sur leurs territoires respectifs, l'étude des diverses branches de la Radiotélégraphie, envisagées principalement au point de vue international. Chaque Comité national, soit seul, soit de concert avec un ou plusieurs autres Comités nationaux, a le droit de soumettre à l'Union des questions à discuter rentrant dans la compétence de celle-ci.

Les Comités nationaux désignent les délégués chargés de les représenter aux Assemblées de l'Union.

III. — Administration de l'Union.

5. Les travaux de l'Union sont dirigés par l'*Assemblée générale* des délégués.

6. Le « Bureau » de l'Union comprend un Président, trois Vice-Présidents et un Secrétaire général élus par l'Assemblée générale; ils demeurent en fonctions jusqu'à la fin de la deuxième Assemblée générale ordinaire qui suit celle de leur élection. Exceptionnellement, le mandat du Président et de deux des Vice-Présidents (désignés par un tirage au sort) nommés à la fondation de l'Union, expire à la fin de la première Assemblée générale ordinaire qui suit celle de leur élection.

Ce Bureau forme le *Comité exécutif* de l'Union.

Les membres sortants sont rééligibles.

Le Comité exécutif peut pourvoir aux vacances qui surviendraient dans son sein. Toute personne désignée dans ces conditions demeure en fonctions jusqu'à la réunion de l'Assemblée générale suivante, qui doit procéder à une élection définitive. Le membre ainsi élu achève le mandat de celui qu'il s'agissait de remplacer.

Il existe, en outre, un *Bureau administratif*, qui, sous la direction du Secrétaire général de l'Union, expédie la correspondance, gère les ressources et assure la conservation des archives ainsi que la préparation et la distribution des publications approuvées par l'Assemblée générale.

IV. — COMMISSIONS.

7. L'Union nomme des *Commissions* pour l'étude de sujets déterminés.

Ces Commissions présentent des rapports sur les travaux dont elles sont chargées.

8. Le Président et les membres de chacune de ces Commissions sont élus par l'Assemblée générale sur la proposition du Comité exécutif de l'Union. Ils restent en fonctions jusqu'à la fin de l'Assemblée générale ordinaire suivante et sont rééligibles.

Les Commissions établissent elles-mêmes leur règlement d'ordre intérieur; elles peuvent s'adjoindre, par cooptation et à la majorité des deux tiers des voix, de nouveaux membres appartenant aux pays représentés près l'Union et qui ne sont pas nécessairement délégués.

9. Avec l'approbation du Comité exécutif, une Commission peut avoir ses propres publications et confier une partie quelconque de ses travaux à des institutions nationales ou même à des particuliers.

V. — ASSEMBLÉES GÉNÉRALES.

10. L'Union se réunit en principe tous les trois ans en Assemblée générale ordinaire. Si l'époque et le lieu de cette réunion n'ont pas été arrêtés par l'Assemblée générale précédente, ils sont fixés par le Comité exécutif et communiqués, quatre mois au moins à l'avance, aux organismes adhérents.

11. Dans des cas spéciaux, le Président peut, avec le consentement du Comité exécutif, convoquer une Assemblée générale extraordinaire; il est tenu de le faire à la demande d'un tiers des voix des pays adhérents.

12. Tous les membres des Comités nationaux peuvent assister aux réunions de l'Assemblée générale et prendre part aux discussions, mais seulement avec voix consultative.

Le Président de l'Union peut inviter des hommes de science, non délégués, mais appartenant à des pays adhérents, à assister, à titre consultatif, aux séances de l'Assemblée générale.

Les membres, non délégués, des Commissions mentionnées à l'article 8, ont le droit d'assister, dans les mêmes conditions, aux séances de l'Assemblée générale où sont traitées les questions rentrant dans leurs attributions.

13. L'ordre du jour d'une session est fixé par le Comité exécutif et communiqué au moins quatre mois avant l'ouverture de cette session. Toute question ne figurant pas à l'ordre du jour n'est prise en considération qu'avec l'assentiment préalable de la moitié au moins des voix des pays représentés à l'Assemblée générale.

VI. — BUDGET ET DROIT DE VOTE.

14. Le Comité exécutif prépare un budget de prévision pour chaque année de la période comprise entre deux sessions. Une Commission financière, nommée par l'Assemblée générale, est chargée de l'étude de ce budget et de la vérification des comptes de l'exercice précédent. Elle établit, sur ces deux questions, des rapports distincts qui sont soumis à l'Assemblée générale.

A la suite de cet examen financier, l'Union fixe le taux de la part contributive unitaire.

La cotisation due par un pays et le nombre correspondant de voix qui lui sont attribuées sont réglés d'après le barème suivant :

Population du pays.	Nombre de voix.	Nombre de parts unitaires contributives.
Moins de 5 millions d'habitants	1	1
Entre 5 et 10 id.	2	2
Id. 10 et 15 id.	3	3
Id. 15 et 20 id.	4	5
Plus de 20 id.	5	8

Les habitants des colonies et protectorats d'un pays sont comptés dans la population de ce pays, si celui-ci le désire, et d'après les indications de son Gouvernement.

Chaque Dominion (Afrique du Sud, Australie, Canada, Nouvelle-Zélande) a un nombre de voix correspondant à sa population et fixé d'après le barème précédent.

La cotisation unitaire perçue pendant la première période de la Convention ne pourra dépasser 200 francs annuellement.

Dans chaque pays, l'autorité qui adhère à l'Union est responsable du paiement de la cotisation de ce pays.

15. Les recettes de l'Union, provenant des contributions de divers pays, sont consacrées à payer :

1° Les frais de publication et les dépenses accessoires d'administration;

2° Les frais de réduction et de discussion des observations, y compris la rémunération d'assistants.

Les ressources provenant de dons sont utilisées par l'Union en tenant compte des désirs exprimés par les donateurs.

Tout pays qui se retire de l'Union abandonne de ce fait ses droits à l'actif de l'Association.

16. Dans les Assemblées générales, les résolutions concernant les questions d'ordre scientifique sont prises à la majorité des voix de tous les délégués présents. Pour les questions d'ordre administratif et pour les questions mixtes, le vote a lieu par État, le nombre de voix de chaque État étant fixé à l'article 14.

S'il y a doute sur la catégorie dans laquelle doit être rangée une question à discuter, le Président décide.

Dans les Commissions, les décisions sont prises à la majorité des voix des membres qui les composent et non par pays.

En toutes circonstances, s'il y a égalité de voix, celle du Président est prépondérante.

17. Pour les questions administratives figurant à l'ordre du jour, un pays qui n'est pas représenté peut envoyer par écrit son vote au Président. Pour être valable, ce vote doit être reçu avant le dépouillement du scrutin.

VII. — Règlements intérieurs.

18. L'Assemblée générale peut édicter des règlements intérieurs concernant, soit la conduite de ses travaux, soit les devoirs généraux qui incombent aux Membres du Comité de l'Union, soit, en général, tous objets non prévus dans les statuts.

De même, chaque Commission peut élaborer des règlements pour la conduite de ses propres travaux. Avant d'entrer en vigueur, ces règlements doivent être approuvés par l'Assemblée générale; aucun d'eux ne peut contenir de prescriptions contraires aux termes de la présente Convention.

VIII. — Durée de la Convention et Modifications.

19. La présente Convention est valable jusqu'au 31 décembre 1931. Après cette date, elle sera renouvelée pour une autre période de douze ans, avec l'assentiment des pays adhérents.

20. Aucun changement ne pourra être apporté aux termes de la présente Convention sans l'approbation des deux tiers des voix des pays intéressés.

21. Le présent texte français servira exclusivement pour l'interprétation à donner aux articles de la Convention.

ANNEXE XVIII

PROJET DE STATUTS

POUR UNE

UNION INTERNATIONALE DE MATHÉMATICIENS

I. — Objets de l'Union et Conditions d'admission.

1. L'Union a pour but de provoquer et de favoriser la coopération internationale dans l'étude de la Mathématique, et d'assurer :

a) L'encouragement de la Science pure;

b) Le rapprochement entre les mathématiques pures et les autres sciences;

c) L'orientation et le progrès de l'enseignement;

d) La coordination dans la préparation et la publication de résumés bibliographiques, de tables, de graphiques; l'établissement d'appareils, modèles, etc.

e) L'organisation de Conférences ou de Congrès internationaux.

2. L'admission d'un Pays à l'Union est subordonnée aux conditions fixées par les statuts du Conseil international de Recherches.

II. — COMITÉS NATIONAUX.

3. Un Comité national est constitué dans chacun des pays adhérents à l'Union. Il est créé sur l'initiative, soit de son Académie nationale, soit de son Conseil national de Recherches ou d'autres institutions ou groupements d'institutions nationales similaires, soit des Sociétés mathématiques de ce pays.

4. Les Comités nationaux ont pour objet de veiller dans chaque pays à la réalisation du programme exposé à l'article premier et de maintenir le contact avec l'Union internationale de mathématiciens. Ces comités ont le droit de faire des propositions dans les Conférences de l'Union internationale; ils désignent des délégués pour les représenter à ces Conférences.

III. — ADMINISTRATION DE L'UNION.

5. Les travaux de l'Union sont dirigés par l'*Assemblée générale* des délégués.

6. Le « Bureau » de l'Union comprend un Président, cinq Vice-Présidents au plus et un Secrétaire général élus par l'Assemblée générale; ils demeurent en fonctions jusqu'à la fin de la deuxième Assemblée générale ordinaire qui suit celle de leur élection. Exceptionnellement, le mandat du Président et de trois des Vice-Présidents (désignés par un tirage au sort) nommés à la fondation de l'Union, expire à la fin de la première Assemblée générale ordinaire qui suit celle de leur élection.

Ce Bureau forme le *Comité exécutif* de l'Union.

Les membres sortants ne sont pas immédiatement rééligibles.

Le Comité exécutif peut pourvoir aux vacances qui surviendraient dans son sein. Toute personne désignée dans ces conditions demeure en fonctions jusqu'à la réunion de l'Assemblée générale suivante, qui doit procéder à une élection définitive. Le membre ainsi élu achève le mandat de celui qu'il s'agissait de remplacer.

Il existe, en outre, un *Bureau administratif*, qui, sous la direction du Secrétaire général de l'Union, expédie la correspondance, gère les ressources et assure la conservation des archives ainsi que la préparation et la distribution des publications approuvées par l'Assemblée générale.

IV. — COMMISSIONS.

7. L'Union nomme des *Commissions* pour l'étude de sujets déterminés, pour l'encouragement d'entreprises collectives et pour l'examen de questions intéressant l'enseignement.

Ces Commissions présentent des rapports sur les travaux dont elles sont chargées.

8. Le Président et les membres de chacune de ces Commissions sont élus par l'Assemblée générale sur la proposition du Comité exécutif de l'Union. Ils restent en fonctions jusqu'à la fin de l'Assemblée générale ordinaire suivante et sont rééligibles.

Lorsqu'une Commission comprend des membres désignés en partie par l'Union de Mathématiciens et en partie par une autre Union rattachée au Conseil international de Recherches, elle a la faculté d'élire elle-même son Président.

Les Commissions établissent elles-mêmes leur règlement d'ordre intérieur; elles peuvent s'adjoindre, par cooptation et à la majorité des deux tiers des voix, de nouveaux membres appartenant aux pays représentés près l'Union et qui ne sont pas nécessairement délégués.

V. — ASSEMBLÉES GÉNÉRALES.

9. L'Union se réunit en principe tous les trois ans en Assemblée générale ordinaire. Autant que possible, on fera coïncider l'époque et le lieu de ces Assemblées avec ceux des Congrès internationaux des Mathématiciens.

10. Dans des cas spéciaux, le Président peut, avec le consentement du Comité exécutif, convoquer une Assemblée générale extraordinaire; il est tenu de le faire à la demande d'un tiers des voix des pays adhérents.

11. Tous les membres des Comités nationaux peuvent assister aux réunions de l'Assemblée générale et prendre part aux discussions, mais seulement avec voix consultative.

Le Président de l'Union peut inviter des hommes de science, non délégués, mais appartenant à des pays adhérents, à assister, à titre consultatif, aux séances de l'Assemblée générale.

Les membres, non délégués, des Commissions mentionnées à l'article 8, ont le droit d'assister, dans les mêmes conditions, aux séances de l'Assemblée générale où sont traitées les questions rentrant dans leurs attributions.

12. L'ordre du jour d'une session est fixé par le Comité exécutif et communiqué au moins quatre mois avant l'ouverture de cette session. Toute question ne figurant pas à l'ordre du jour n'est prise en considération qu'avec l'assentiment préalable de la moitié au moins des voix des pays représentés à l'Assemblée générale.

VI. — BUDGET ET DROIT DE VOTE.

13. Le Comité exécutif prépare un budget de prévision pour chaque année de la période comprise entre deux sessions. Une Commission financière, nommée par l'Assemblée générale, est chargée de l'étude de ce budget et de la vérification des comptes de l'exercice précédent. Elle établit, sur ces deux questions, des rapports distincts qui sont soumis à l'Assemblée générale.

A la suite de cet examen financier, l'Union fixe le taux de la part contributive unitaire.

La cotisation due par un pays et le nombre correspondant de voix qui lui sont attribuées sont réglés d'après le barème suivant :

Population du pays.				Nombre de voix.	Nombre de parts unitaires contributives.
Moins de 5 millions d'habitants.				1	1
Entre	5 et 10		id.	2	2
Id.	10 et 15		id.	3	3
Id.	15 et 20		id.	4	5
Plus de 20			id.	5	8

Les habitants des colonies et protectorats d'un pays sont comptés dans la population de ce pays, si celui-ci le désire, et d'après les indications de son Gouvernement.

Chaque Dominion (Afrique du Sud, Australie, Canada, Nouvelle-Zélande) a un nombre de voix correspondant à sa population et fixé d'après le barème précédent.

La cotisation unitaire perçue pendant la première période de la Convention ne pourra dépasser fr. 125 annuellement. Dans chaque pays, l'autorité qui adhère à l'Union est responsable du paiement de la cotisation de ce pays.

14. Les frais de publication et les dépenses accessoires d'administration seront couvertes par les recettes de l'Union provenant des contributions des divers pays.

Les ressources provenant de dons seront utilisées par l'Union en tenant compte des désirs exprimés par les donateurs.

Tout pays qui se retire de l'Union abandonne de ce fait ses droits à l'actif de l'Association.

15. Dans les Assemblées générales, les résolutions concernant les questions d'ordre scientifique sont prises à la majorité des voix de tous les délégués présents. Pour les questions d'ordre administratif et pour les questions mixtes, le vote à lieu par Etat, le nombre de voix de chaque Etat étant fixé à l'article 13.

S'il y a doute sur la catégorie dans laquelle doit être rangée une question à discuter, le Président décide.

Dans les Commissions, les décisions sont prises à la majorité des voix des membres qui les composent et non par pays.

En toutes circonstances, s'il y a égalité de voix, celle du Président est prépondérante.

16. Pour les questions administratives figurant à l'ordre du jour, un pays qui n'est pas représenté peut envoyer par écrit son vote au Président. Pour être valable, ce vote doit être reçu avant le dépouillement du scrutin.

VII. — Règlements intérieurs.

17. L'Assemblée générale peut édicter des règlements intérieurs concernant, soit la conduite de ses travaux, soit les devoirs généraux qui incombent aux Membres du Comité de l'Union, soit, en général, tous objets non prévus dans les statuts.

De même, chaque Commission peut élaborer des règlements pour la conduite de ses propres travaux. Avant d'entrer en vigueur, ces règlements doivent être approuvés par l'Assemblée générale; aucun d'eux ne peut contenir de prescriptions contraires aux termes de la présente Convention.

VIII. — DURÉE DE LA CONVENTION ET MODIFICATIONS.

18. La présente Convention est valable depuis le 1^er^ janvier 1920 jusqu'au 31 décembre 1931. Après cette date, elle sera renouvelée pour une autre période de douze ans, avec l'assentiment des pays adhérents.

19. Aucun changement ne pourra être apporté aux termes de la présente Convention sans l'approbation des deux tiers des voix des pays intéressés.

20. Le présent texte français servira exclusivement pour l'interprétation à donner aux articles de la Convention.

ANNEXE XIX

PROJET DE STATUTS

POUR UNE

UNION INTERNATIONALE DE PHYSIQUE

I. — Objets de l'Union et Conditions d'admission.

1. L'Union a pour but :

1° De créer et d'encourager une coopération internationale en physique;
2° De coordonner les efforts de préparation et de publication des extraits de mémoires et de tables de constantes de physique;
3° De réaliser une entente internationale sur les questions d'unités, d'étalonnage, de nomenclature et de notations;
4° D'aider la poursuite de recherches intéressantes;
5° D'organiser des Congrès internationaux ou des Conférences générales.

2. L'admission d'un Pays à l'Union est subordonnée aux conditions fixées par les statuts du Conseil international de Recherches.

II. — Comités nationaux.

3. Un Comité national est constitué dans chacun des pays adhérents à l'Union. Il est créé sur l'initiative, soit de son

Académie nationale, soit de son Conseil national de Recherches ou d'autres institutions ou groupements d'institutions nationales similaires, soit de son Gouvernement.

4. Les Comités nationaux ont pour attributions de faciliter et de coordonner, sur leurs territoires respectifs, l'étude des diverses branches de la Physique, envisagées principalement au point de vue international. Chaque Comité national, soit seul, soit de concert avec un ou plusieurs autres Comités nationaux, a le droit de soumettre à l'Union des questions à discuter rentrant dans la compétence de celle-ci.

Les Comités nationaux désignent les délégués chargés de les représenter aux Assemblées de l'Union.

III. — ADMINISTRATION DE L'UNION.

5. Les travaux de l'Union sont dirigés par l'*Assemblée générale* des délégués.

6. Le « Bureau » de l'Union comprend un Président, cinq Vice-Présidents au plus et un Secrétaire général élus par l'Assemblée générale; ils demeurent en fonctions jusqu'à la fin de la deuxième Assemblée générale ordinaire qui suit celle de leur élection. Exceptionnellement, le mandat du Président et de trois des Vice-Présidents (désignés par un tirage au sort) nommés à la fondation de l'Union expire à la fin de la première Assemblée générale ordinaire qui suit celle de leur élection.

Ce Bureau forme le *Comité exécutif* de l'Union.

Les membres sortants sont rééligibles.

Les cinq Vice-Présidents sont choisis de manière à représenter les différentes branches de la physique.

Le Comité exécutif peut pourvoir aux vacances qui surviendraient dans son sein. Toute personne désignée dans ces conditions demeure en fonctions jusqu'à la réunion de l'Assemblée générale suivante, qui doit procéder à une élection définitive. Le membre ainsi élu achève le mandat de celui qu'il s'agissait de remplacer.

Il existe, en outre, un *Bureau administratif*, qui, sous la direction du Secrétaire général de l'Union, expédie la correspondance, gère les ressources et assure la conservation des archives ainsi que la préparation et la distribution des publications approuvées par l'Assemblée générale.

IV. — COMMISSIONS.

7. L'Union nomme des *Commissions* pour l'étude de sujets déterminés de physique.

Ces Commissions présentent des rapports sur les travaux dont elles sont chargées.

8. Le Président et les membres de chacune de ces Commissions sont élus par l'Assemblée générale sur la proposition du Comité exécutif de l'Union Ils restent en fonctions jusqu'à la fin de l'Assemblée générale ordinaire suivante et sont rééligibles.

Lorsqu'une Commission comprend des membres désignés en partie par l'Union de Physique et en partie par une autre Union rattachée au Conseil international de Recherches, elle a la faculté d'élire elle-même son Président.

Les Commissions établissent elles-mêmes leur règlement d'ordre intérieur; elles peuvent s'adjoindre, par cooptation et à la majorité des deux tiers des voix, de nouveaux membres appartenant aux pays représentés près l'Union et qui ne sont pas nécessairement délégués.

9. Avec l'approbation du Comité exécutif, une Commission peut avoir ses propres publications et confier une partie quelconque de ses travaux à des institutions nationales ou même à des particuliers.

V. — ASSEMBLÉES GÉNÉRALES.

10. L'Union se réunit en principe tous les trois ans en Assemblée générale ordinaire. Si l'époque et le lieu de cette réunion n'ont pas été arrêtés par l'Assemblée générale précédente, ils sont fixés par le Comité exécutif et communiqués, quatre mois au moins à l'avance, aux organismes adhérents.

11. Dans des cas spéciaux, le Président peut, avec le consentement du Comité exécutif, convoquer une Assemblée générale extraordinaire ; il est tenu de le faire à la demande d'un tiers des voix des pays adhérents.

12. Tous les membres des Comités nationaux peuvent assister aux réunions de l'Assemblée générale et prendre part aux discussions, mais seulement avec voix consultative.

Le Président de l'Union peut inviter des hommes de science, non délégués, mais appartenant à des pays adhérents, à assister, à titre consultatif, aux séances de l'Assemblée générale.

Les membres, non délégués, des Commissions mentionnées à l'article 8, ont le droit d'assister, dans les mêmes conditions, aux séances de l'Assemblée générale où sont traitées les questions rentrant dans leurs attributions.

13. L'ordre du jour d'une session est fixé par le Comité exécutif et communiqué au moins quatre mois avant l'ouverture de cette session. Toute question ne figurant pas à l'ordre du jour n'est prise en considération qu'avec l'assentiment préalable de la moitié au moins des voix des pays représentés à l'Assemblée générale.

VI. — BUDGET ET DROIT DE VOTE.

14. Le Comité exécutif prépare un budget de prévision pour chaque année de la période comprise entre deux sessions. Une Commission financière, nommée par l'Assemblée générale, est chargée de l'étude de ce budget et de la vérification des comptes de l'exercice précédent. Elle établit, sur ces deux questions, des rapports distincts qui sont soumis à l'Assemblée générale.

A la suite de cet examen financier, l'Union fixe le taux de la part contributive unitaire.

La cotisation due par un pays et le nombre correspondant de voix qui lui sont attribuées sont réglés d'apres le barème suivant :

Population du pays.		Nombre de voix.	Nombre de parts unitaires contributives.
—		—	—
Moins de 5 millions	d'habitants	1	1
Entre 5 et 10	id.	2	2
Id. 10 et 15	id.	3	3
Id. 15 et 20	id.	4	5
Plus de 20	id.	5	8

Les habitants des colonies et protectorats d'un pays sont comptés dans la population de ce pays, si celui-ci le désire, et d'après les indications de son Gouvernement.

Chaque Dominion (Afrique du Sud, Australie, Canada, Nouvelle-Zélande) a un nombre de voix correspondant à sa population et fixé d'après le barème précédent.

La cotisation unitaire perçue pendant la première période de la Convention ne pourra dépasser 1500 francs annuellement.

Dans chaque pays, l'autorité qui adhère à l'Union est responsable du paiement de la cotisation de ce pays.

15. Les recettes de l'Union provenant des contributions des divers pays sont consacrées à payer :

1° Les frais de publication et les dépenses accessoires d'administration ;

2° Les frais de réduction et de discussion des observations, y compris la rémunération d'assistants.

Les ressources provenant de dons sont utilisées par l'Union en tenant compte des désirs exprimés par les donateurs.

Tout pays qui se retire de l'Union abandonne de ce fait ses droits à l'actif de l'Association.

16. Dans les Assemblées générales, les résolutions concernant les questions d'ordre scientifique sont prises à la majorité des voix de tous les délégués présents. Pour les questions d'ordre administratif et pour les questions mixtes, le vote a lieu par État, le nombre de voix de chaque État étant fixé à l'article 14.

S'il y a doute sur la catégorie dans laquelle doit être rangée une question à discuter, le Président décide.

Dans les Commissions, les décisions sont prises à la majorité des voix des membres qui les composent et non par pays.

En toutes circonstances, s'il y a égalité de voix, celle du Président est prépondérante.

17. Pour les questions administratives figurant à l'ordre du jour, un pays qui n'est pas représenté peut envoyer par écrit son vote au Président. Pour être valable. ce vote doit être reçu avant le dépouillement du scrutin.

VII. — RÈGLEMENTS INTÉRIEURS.

18. L'Assemblée générale peut édicter des règlements intérieurs concernant, soit la conduite de ses travaux, soit les devoirs généraux qui incombent aux Membres du Comité de l'Union, soit, en général, tous objets non prévus dans les statuts.

De même, chaque Commission peut élaborer des règlements pour la conduite de ses propres travaux. Avant d'entrer en vigueur, ces règlements doivent être approuvés par l'Assemblée générale; aucun d'eux ne peut contenir de prescriptions contraires aux termes de la présente Convention.

VIII. — DURÉE DE LA CONVENTION ET MODIFICATIONS.

19. La présente Convention est valable jusqu'au 31 décembre 1931. Après cette date, elle sera renouvelée pour une autre période de douze ans, avec l'assentiment des pays adhérents.

20. Aucun changement ne pourra être apporté aux termes de la présente Convention sans l'approbation des deux tiers des voix des pays intéressés.

21. Le présent texte français servira exclusivement pour l'interprétation à donner aux articles de la Convention.

ANNEXE XX

PROJET DE STATUTS

POUR UNE

UNION INTERNATIONALE DES SCIENCES BIOLOGIQUES

I. — Objets de l'Union et Conditions d'admission.

1. Il est constitué, sous le nom d'Union internationale des sciences biologiques, une Association dont l'objet est de faire progresser l'étude des différentes branches de la Biologie, notamment :

1° En provoquant et organisant des recherches que peut faciliter la coopération de plusieurs pays ;

2° En aidant à la discussion scientifique et à la publication des résultats de ces recherches ;

3° En facilitant l'établissement et le perfectionnement d'instituts de recherches accessibles aux travailleurs de toute nationalité ;

4° En favorisant l'organisation de Congrès internationaux ;

5° En facilitant la préparation et la publication de recueils de documentation bibliographiques.

2. L'admission d'un Pays à l'Union est subordonnée aux conditions fixées par les statuts du Conseil international de Recherches.

II. — COMITÉS NATIONAUX.

3. Un Comité national est constitué dans chacun des pays adhérents à l'Union. Il est créé sur l'initiative, soit de son Académie nationale, soit de son Conseil national de Recherches, ou d'autres institutions ou groupements d'institutions nationales similaires, soit de son Gouvernement.

4. Les Comités nationaux ont pour attributions de faciliter et de coordonner, sur leurs territoires respectifs, l'étude des diverses branches de la Biologie, envisagées principalement au point de vue international. Chaque Comité national, soit seul, soit de concert avec un ou plusieurs autres Comités nationaux, a le droit de soumettre à l'Union des questions à discuter rentrant dans la compétence de celle-ci.

Les Comités nationaux désignent les délégués chargés de les représenter aux Assemblées de l'Union.

III. — ADMINISTRATION DE L'UNION.

5. Les travaux de l'Union sont dirigés par l'*Assemblée générale* des délégués.

6. Le « Bureau » de l'Union comprend un Président, des Vice-Présidents et un Secrétaire général. Le Président et le Secrétaire général, élus par l'Assemblée générale, demeurent en fonctions jusqu'à la fin de la deuxième Assemblée générale ordinaire qui suit celle de leur élection. Exceptionnellement, le mandat du Président, élu à la fondation de l'Union, cesse à la fin de la première Assemblée générale ordinaire qui suit celle de son élection.

Ce Bureau forme le *Comité exécutif* de l'Union.

A l'exception du Secrétaire général, les membres sortants ne sont pas immédiatement rééligibles.

Les Présidents de Sections, élus comme il est dit à l'article 8, sont de droit Vice-Présidents de l'Union.

Le Comité exécutif peut pourvoir aux vacances qui surviendraient dans son sein. Toute personne désignée dans ces conditions demeure en fonctions jusqu'à la réunion de l'Assemblée générale suivante, qui doit procéder à une élection définitive. Le membre ainsi élu achève le mandat de celui qu'il s'agissait de remplacer.

Il existe, en outre, un *Bureau administratif,* qui, sous la direction du Secrétaire général de l'Union, expédie la correspondance, gère les ressources et assure la conservation des archives ainsi que la préparation et la distribution des publications approuvées par l'Assemblée générale.

IV. — SECTIONS.

7. L'Assemblée générale peut répartir les travaux de l'Union en un nombre indéterminé de Sections, se rapportant aux diverses branches des sciences biologiques : Biologie générale, Physiologie, Zoologie, Botanique, Sciences médicales, Biologie appliquée. Cette énumération n'est pas limitative.

Le contrôle des travaux non spécialement confiés à une Section appartient à l'Assemblée générale, qui peut en déléguer la direction à des Commissions spéciales.

8. Chaque Section élit son Président, son Vice-Président et son Secrétaire; ils demeurent en fonctions jusqu'à la fin de la deuxième Assemblée générale ordinaire qui suit celle de leur élection. Exceptionnellement, le mandat de la moitié des Présidents (désignés par un tirage au sort) élus à la fondation de l'Union, cesse à la fin de la première Assemblée générale ordinaire qui suit celle de leur élection.

Le mandat des Vice-Présidents élus à la fondation, cesse à la fin de la première Assemblée générale ordinaire qui suit celle de leur élection, lorsque le Président de leur Section reste en fonction au-delà de ce terme.

A l'exception du Secrétaire, les membres sortants ne sont pas immédiatement rééligibles.

Une Section peut avoir son Bureau central. Le Secrétaire y remplit les fonctions de Directeur; il est chargé de la correspondance, de la gestion des ressources de la Section, de la conservation des archives ainsi que de la préparation et de la distribution des publications.

Une Section peut nommer un *Comité exécutif*. Le Président, le Vice-Président et le Secrétaire en sont membres de droit.

La Section peut confier à des Commissions spéciales l'étude de certaines questions.

9. Les procès-verbaux d'une Section doivent être communiqués au Bureau de l'Union, mais n'exigent pas la ratification de l'Assemblée générale, à moins que, de l'avis de ce Bureau, ils ne concernent également, soit d'autres Sections, soit l'œuvre d'ensemble de l'Union.

Avec l'approbation de l'Union, une Section peut avoir ses propres publications et confier une partie quelconque de ses travaux à des institutions nationales ou même à des particuliers.

V. — Assemblées de l'Union et Séances des Sections.

10. L'Union se réunit en principe tous les trois ans en Assemblée générale ordinaire. Si l'époque et le lieu de la réunion n'ont pas été arrêtés par l'Assemblée générale précédente, ils sont fixés par le Comité exécutif et communiqués, quatre mois au moins à l'avance, aux organismes adhérents.

Chaque Section tient une séance ordinaire au cours de la session de l'Assemblée générale. Plusieurs Sections peuvent se réunir conjointement suivant un horaire fixé par le Bureau de l'Union, après entente avec les Bureaux des Sections intéressées.

11. Dans des cas spéciaux, le Président de l'Union peut, avec le consentement du Comité exécutif, convoquer une Assemblée générale extraordinaire; il est tenu de le faire à la demande d'un tiers des voix des pays adhérents.

De même, le Président d'une Section peut, avec le consentement de son Comité exécutif ,provoquer une Conférence extraordinaire de la Section.

12. Tous les membres des Comités nationaux peuvent assister aux réunions de l'Assemblée générale ou des Sections et prendre part aux discussions, mais seulement avec voix consultative.

Le Président de l'Union peut inviter des hommes de science non délégués mais appartenant à des pays adhérents à assister, à titre consultatif, aux séances de l'Assemblée générale. De même, un Président de Section peut, de sa propre initiative ou à la demande du Président du Comité national du pays intéressé, inviter des hommes de science à assister, à titre consultatif, aux séances de cette Section.

13. L'ordre du jour d'une session est fixé par le Comité exécutif et communiqué au moins quatre mois avant l'ouverture de cette session. Toute question ne figurant pas à l'ordre du jour n'est prise en considération qu'avec l'assentiment préalable de la moitié au moins des voix des pays représentés à l'Assemblée générale.

VI. — Budget et Droit de vote.

14. Le Comité exécutif prépare un budget de prévision pour chaque année de la période comprise entre deux sessions. Une Commission financière, nommée par l'Assemblée générale, est chargée de l'étude de ce budget et de la vérification des comptes de l'exercice précédent. Elle établit, sur ces deux questions, des rapports distincts qui sont soumis à l'Assemblée générale.

A la suite de cet examen financier, l'Union fixe le taux de la part contributive unitaire.

La cotisation due par un pays et le nombre correspondant de voix qui lui sont attribuées sont réglés d'après le barème suivant :

Population du pays.		Nombre de voix.	Nombre de parts unitaires contributives.
—		—	—
Moins de 5 millions d'habitants.		1	1
Entre 5 et 10	id.	2	2
Id. 10 et 15	id.	3	3
Id. 15 et 20	id.	4	5
Plus de 20	id.	5	8

Les habitants des colonies et protectorats d'un pays sont comptés dans la population de ce pays si celui-ci le désire et d'après les indications de son Gouvernement.

Chaque Dominion (Afrique du Sud, Australie, Canada, Nouvelle-Zélande) a un nombre de voix correspondant à sa population et fixé d'après le barème précédent.

La part unitaire contributive sera fixée par l'Union, pour chaque période triennale.

Chaque Comité national s'efforce de recueillir des dons et legs.

Dans chaque pays, l'autorité qui adhère à l'Union est responsable du paiement de la cotisation de ce pays.

15. Les recettes de l'Union sont consacrées à couvrir les dépenses :

1° D'administration (y compris la rémunération du personnel du secrétariat) ;

2° De publications, de subvention à des recherches ou explorations ;

3° De subvention aux recueils de documentation bibliographiques.

Les ressources provenant de dons sont utilisées par l'Union en tenant compte des désirs exprimés par les donateurs.

Tout pays qui se retire abandonne de ce fait ses droits à l'actif de l'Association.

16. En Assemblée générale ou en séance de Sections, les résolutions concernant les questions d'ordre scientifique sont prises à la majorité des voix de tous les délégués présents. Pour les questions d'ordre administratif et pour les questions mixtes, le vote a lieu par Etat, le nombre de voix de chaque Etat étant fixé à l'article 14.

S'il y a doute sur la catégorie dans laquelle doit être rangée une question à discuter, le Président décide. En toutes circonstances, s'il y a égalité de voix, celle du Président est prépondérante.

17. Pour les questions d'ordre administratif figurant à l'ordre du jour, un pays qui n'est pas représenté peut envoyer par écrit son vote au Président. Pour être valable, ce vote doit être reçu avant le dépouillement du scrutin.

VII. — Règlements intérieurs.

18. L'Assemblée générale peut édicter des règlements intérieurs concernant, soit la conduite de ses travaux, soit les devoirs généraux qui incombent aux Membres du Comité de l'Union, soit, en général, tous objets non prévus dans les statuts.

De même, chaque Section peut élaborer des règlements pour la conduite de ses propres travaux. Avant d'entrer en vigueur, ces règlements doivent être approuvés par l'Assemblée générale ; aucun d'eux ne peut contenir de prescriptions contraires aux termes de la présente Convention.

VIII. — Durée de la Convention et Modifications.

19. La présente Convention est valable jusqu'au 31 décembre 1931. Après cette date, elle sera renouvelée pour une autre période de douze ans, avec l'assentiment des pays adhérents.

20. Aucun changement ne sera apporté aux termes de la présente Convention sans l'approbation des deux tiers des voix des pays intéressés.

21. Le présent texte français servira exclusivement pour l'interprétation à donner aux articles de la Convention.

ANNEXE XXI

PROJET DE STATUTS

POUR UNE

UNION GÉOGRAPHIQUE INTERNATIONALE

I. — Objets de l'Union et Conditions d'admission.

1. L'Union géographique a pour but :

1° De favoriser l'étude des problèmes qui concernent la géographie.

2° De provoquer et coordonner les recherches exigeant la coopération de plusieurs pays, et en assurer la discussion scientifique ainsi que la publication.

2. L'admission d'un Pays à l'Union est subordonnée aux conditions fixées par les statuts du Conseil international de Recherches.

II. — Comités nationaux.

3. Un Comité national est constitué dans chacun des pays adhérents à l'Union. Il est créé sur l'initiative, soit de son

Académie nationale, soit de son Conseil national de Recherches, ou d'autres institutions ou groupements d'institutions nationales similaires, soit de son Gouvernement.

4. Les Comités nationaux ont pour attributions de faciliter et de coordonner, sur leurs territoires respectifs, l'étude des diverses branches de la Géographie, envisagées principalement au point de vue international. Chaque Comité national, soit seul, soit de concert avec un ou plusieurs autres Comités nationaux, a le droit de soumettre à l'Union des questions à discuter rentrant dans la compétence de celle-ci.

Les Comités nationaux désignent les délégués chargés de les représenter aux Assemblées de l'Union.

III. — ADMINISTRATION DE L'UNION.

5. Les travaux de l'Union sont dirigés par l'*Assemblée générale* des délégués.

6. Le « Bureau » de l'Union comprend un Président, des Vice-Présidents et un Secrétaire général. Le Président et le Secrétaire général, élus par l'Assemblée générale, demeurent en fonctions jusqu'à la fin de la deuxième Assemblée générale ordinaire qui suit celle de leur élection. Exceptionnellement, le mandat du Président élu à la fondation de l'Union cesse à la fin de la première Assemblée générale ordinaire qui suit celle de son élection.

Ce Bureau forme le *Comité exécutif* de l'Union.

Les membres sortants sont rééligibles.

Les Présidents de Sections, élus comme il est dit à l'article 8, sont de droit Vice-Présidents de l'Union.

Le Comité exécutif peut pourvoir aux vacances qui survdraient dans son sein. Toute personne désignée dans ces conditions demeure en fonctions jusqu'à la réunion de l'Assemblée générale suivante, qui doit procéder à une élection définitive. Le membre ainsi élu achève le mandat de celui qu'il s'agissait de remplacer.

Il existe, en outre, un *Bureau administratif*, qui, sous la direction du Secrétaire général de l'Union, expédie la correspondance, gère les ressources et assure la conservation des archives ainsi que la préparation et la distribution des publications approuvées par l'Assemblée générale.

IV. — SECTIONS.

7. La direction des travaux relatifs à des branches importantes de la Géographie est confiée à des Sections spéciales. Des Sections de cette nature seront tout d'abord constituées pour :

a) La Topographie et la Cartographie;

b) La Géomorphologie (y compris la Glaciologie et la Spéliologie);

c) La Géographie humaine et l'Ethnographie;

d) La Géographie historique.

e) La Géographie biologique.

D'autres sections pourront être créées, dans la suite, par décision de l'Assemblée générale.

Le contrôle des travaux non spécialement confiés à une Section appartient à l'Assemblée générale, qui peut en déléguer la direction à des Commissions spéciales.

8. Chaque Section élit son Président, son Vice-Président et son Secrétaire; ils demeurent en fonctions jusqu'à la fin de la deuxième Assemblée générale ordinaire qui suit celle de leur élection. Exceptionnellement, le mandat de la moitié des Présidents (désignés par un tirage au sort) élus à la fondation de l'Union, cesse à la fin de la première Assemblée générale ordinaire qui suit celle de leur élection.

Le mandat des Vices Présidents élus à la fondation, cesse à la fin de la première Assemblée générale ordinaire qui suit celle de leur élection, lorsque le Président de leur Section reste en fonction au-delà de ce terme.

Les membres sortants sont rééligibles.

Une Section peut avoir son Bureau central. Le Secrétaire y remplit les fonctions de Directeur; il est chargé de la correspondance, de la gestion des ressources de la Section, de la conservation des archives ainsi que de la préparation et de la distribution des publications.

Une Section peut nommer un *Comité exécutif*. Le Président, le Vice-Président et le Secrétaire en sont membres de droit.

La Section peut confier à des Commissions spéciales l'étude de certaines questions.

9. Les procès-verbaux d'une Section doivent être communiqués au Bureau de l'Union, mais n'exigent pas la ratification de l'Assemblée générale, à moins que, de l'avis de ce Bureau, ils ne concernent également, soit d'autres Sections, soit l'œuvre d'ensemble de l'Union.

Avec l'approbation de l'Union, une Section peut avoir ses propres publications et confier une partie quelconque de ses travaux à des institutions nationales ou même à des particuliers.

V. — Assemblées de l'Union et Séances des Sections.

10. L'Union se réunit en principe tous les trois ans en Assemblée générale ordinaire. Si l'époque et le lieu de la réunion n'ont pas été arrêtés par l'Assemblée générale précédente, ils sont fixés par le Comité exécutif et communiqués, quatre mois au moins à l'avance, aux organismes adhérents.

Chaque Section tient une séance ordinaire au cours de la session de l'Assemblée générale. Plusieurs Sections peuvent se réunir conjointement suivant un horaire fixé par le Bureau de l'Union, après entente avec les Bureaux des Sections intéressées.

11. Dans des cas spéciaux, le Président de l'Union peut, avec le consentement du Comité exécutif, convoquer une Assemblée générale extraordinaire. Il est tenu de le faire à la demande d'un tiers des voix des pays adhérents.

De même, le Président d'une Section peut, avec le consentement de son Comité exécutif, provoquer une réunion extraordinaire de la Section.

12. Tous les membres des Comités nationaux peuvent assister aux réunions de l'Assemblée générale ou des Sections et prendre part aux discussions, mais seulement avec voix consultative.

Le Président de l'Union peut inviter des hommes de science, non délégués, mais appartenant à des pays adhérents, à assister, à titre consultatif aux séances de l'Assemblée générale.

De même, un Président de Section peut, de sa propre initiative ou à la demande du Président du Comité national du pays intéressé, inviter des hommes de science à assister, à titre consultatif, aux séances de cette Section.

13. L'ordre du jour d'une session est fixé par le Comité exécutif, et communiqué au moins quatre mois avant l'ouverture de cette session. Toute question ne figurant pas à l'ordre du jour n'est prise en considération qu'avec l'assentiment préalable de la moitié au moins des voix des pays représentés à l'Assemblée générale.

VI. — BUDGET ET DROIT DE VOTE.

14. Le Comité exécutif prépare un budget de prévision pour chaque année de la période comprise entre deux sessions. Une Commission financière, nommée par l'Assemblée générale, est chargée de l'étude de ce budget et de la vérification des comptes de l'exercice précédent. Elle établit, sur ces deux questions, des rapports distincts qui sont soumis à l'Assemblée générale.

A la suite de cet examen financier, l'Union fixe le taux de la part contributive unitaire.

La cotisation due par un pays et le nombre correspondant de voix qui lui sont attribuées sont réglés d'après le barème suivant :

Population du pays.		Nombre de voix.	Nombre de parts unitaires contributives.
—		—	—
Moins de 5 millions d'habitants		1	1
Entre 5 et 10	id.	2	2
Id. 10 et 15	id.	3	3
Id. 15 et 20	id.	4	5
Plus de 20	id.	5	8

Les habitants des colonies et protectorats d'un pays sont comptés dans la population de ce pays, si celui-ci le désire et d'après les indications de son Gouvernement.

Chaque Dominion (Afrique du Sud, Australie, Canada, Nouvelle-Zélande) a un nombre de voix correspondant à sa population et fixé d'après le barème précédent.

La cotisation unitaire perçue pendant la première période de la Convention ne pourra dépasser fr. . . . . annuellement. Dans chaque pays, l'autorité qui adhère à l'Union est responsable du paiement de la cotisation de ce pays.

15. Les recettes de l'Union, provenant des contributions des divers pays, doivent être tout d'abord consacrées à payer :

1° Les frais de réduction et de discussion des observations, y compris la rémunération d'assistants ;

2° Les frais de publication et les dépenses accessoires d'administration ;

3° Dans des cas spéciaux, les honoraires des Directeurs des Bureaux administratifs.

L'excédent peut, avec l'agrément de l'Assemblée générale, être utilisé pour le progrès des œuvres générales de l'Union, définies à l'article premier.

Les ressources provenant de dons sont utilisées par l'Union en tenant compte des désirs exprimés par les donateurs.

Tout pays qui se retire de l'Union abandonne de ce fait ses droits à l'actif de l'Association.

16. En Assemblée générale ou en séance de Section, les résolutions concernant les questions d'ordre scientifique sont prises à la majorité des voix de tous les délégués présents. Pour les questions d'ordre administratif et pour les questions mixtes, le vote a lieu par État, le nombre de voix de chaque État étant fixé à l'article 14.

S'il y a doute sur la catégorie dans laquelle doit être rangée une question à discuter, le Président décide. En toutes circonstances, s'il y a égalité de voix, celle du Président est prépondérante.

17. Pour les questions administratives figurant à l'ordre du jour, un pays qui n'est pas représenté, peut envoyer, par écrit, son vote au Président. Pour être valable, ce vote doit être reçu avant le dépouillement du scrutin.

VII. — RÈGLEMENTS INTÉRIEURS.

18. L'Assemblée générale peut édicter des règlements intérieurs concernant, soit la conduite de ses travaux, soit les devoirs généraux qui incombent aux Membres du Comité de l'Union soit, en général, tous objets non prévus dans les statuts.

De même, chaque Section peut élaborer des règlements pour la conduite de ses propres travaux. Avant d'entrer en vigueur, ces règlements doivent être approuvés par l'Assemblée générale; aucun d'eux ne peut contenir de prescriptions contraires aux termes de la présente Convention.

VIII. — DURÉE DE LA CONVENTION ET MODIFICATIONS.

19. La présente Convention est valable jusqu'au 31 décembre 1931. Après cette date, elle sera renouvelée pour une autre période de douze ans, avec l'assentiment des pays adhérents.

20. Aucun changement ne pourra être apporté aux termes de la présente Convention sans l'approbation des deux tiers des voix des pays intéressés.

21. Le présent texte français servira exclusivement pour l'interprétation à donner aux articles de la Convention.

ANNEXE XXII

PROJET DE STATUTS

POUR UNE

UNION GÉOLOGIQUE INTERNATIONALE

I. — OBJETS DE L'UNION ET CONDITIONS D'ADMISSION.

1. L'Union géologique a pour but :

1° De favoriser l'étude des diverses branches de la géologie et des sciences connexes;
2° De provoquer et de coordonner les recherches exigeant la coopération de plusieurs pays et d'en assurer la discussion scientifique ainsi que la publication;
3° De faciliter les recherches spéciales d'intérêt général ;
4° L'organisation de Congrès internationaux et des Commissions qui en dépendent;
5° La coordination dans la préparation et la publication de résumés bibliographiques et l'élaboration des lexiques internationaux.

2. L'admission d'un Pays à l'Union est subordonnée aux conditions fixées par les statuts du Conseil international de Recherches.

II. — COMITÉS NATIONAUX.

3. Un Comité national est constitué dans chacun des pays adhérents à l'Union. Il est créé sur l'initiative, soit de son

Académie nationale, soit de son Conseil national de Recherches ou d'autres institutions ou groupements d'institutions nationales similaires, soit de son Gouvernement.

4. Les Comités nationaux ont pour attributions de faciliter et de coordonner, sur leurs territoires respectifs, l'étude des diverses branches de la Géologie, envisagées principalement au point de vue international. Chaque Comité national, soit seul, soit de concert avec un ou plusieurs autres Comités nationaux, a le droit de soumettre à l'Union des questions à discuter rentrant dans la compétence de celle-ci.

Les Comités nationaux désignent les délégués chargés de les représenter aux Assemblées de l'Union.

III. — Administration de l'Union.

5. Les travaux de l'Union sont dirigés par l'*Assemblée générale* des délégués.

6. Le « Bureau » de l'Union comprend un Président, trois Vice-Présidents au plus et un Secrétaire général élus par l'Assemblée générale ; ils demeurent en fonctions jusqu'à la fin de la deuxième Assemblée générale ordinaire qui suit celle de leur élection. Exceptionnellement, le mandat du Président et de deux des Vice-Présidents (désignés par un tirage au sort) nommés à la fondation de l'Union, expire à la fin de la première Assemblée générale ordinaire qui suit celle de leur élection.

Ce Bureau forme le *Comité exécutif* de l'Union.

Les membres sortants sont rééligibles.

Les trois Vice-Présidents sont choisis de manière à représenter les différentes branches de la géologie.

Le Comité exécutif peut pourvoir aux vacances qui surviendraient dans son sein. Toute personne désignée dans ces conditions demeure en fonctions jusqu'à la réunion de l'Assemblée générale suivante, qui doit procéder à une élection définitive. Le membre ainsi élu achève le mandat de celui qu'il s'agissait de remplacer.

Il existe, en outre, un *Bureau administratif*, qui, sous la direction du Secrétaire général de l'Union, expédie la correspondance, gère les ressources et assure la conservation des archives ainsi que la préparation et la distribution des publications approuvées par l'Assemblée générale.

IV. — Commissions.

7. L'Assemblée générale peut confier à des Commissions la direction des travaux relatifs à des branches importantes de la Géologie et des sciences connexes. Les Commissions seront tout d'abord instituées pour l'étude des questions se rapportant à :

a) La Minéralogie et la Lithologie;
b) La Paléontologie;
c) La Stratigraphie;
d) La Tectonique;
e) La Dynamique terrestre;
f) La Géologie appliquée;
g) La Carte géologique internationale;
h) La Bibliographie et les Comptes rendus.

8. Le Président et les membres de chacune de ces Commissions sont élus par l'Assemblée générale sur la proposition du Comité exécutif de l'Union. Ils restent en fonctions jusqu'à la fin de l'Assemblée générale ordinaire suivante et sont rééligibles.

Lorsqu'une Commission comprend des membres désignés en partie par l'Union géologique et en partie par une autre Union rattachée au Conseil international de Recherches, elle a la faculté d'élire elle-même son Président.

Les Commissions établissent elles-mêmes leur règlement d'ordre intérieur; elles peuvent s'adjoindre, par cooptation et à la majorité des deux tiers des voix, de nouveaux membres appartenant aux pays représentés près l'Union et qui ne sont pas nécessairement délégués.

9. Avec l'approbation du Comité exécutif, une Commission peut avoir ses propres publications et confier une partie quelconque de ses travaux à des institutions nationales ou même à des particuliers.

V. — Assemblées générales.

10. L'Union se réunit en principe tous les trois ans en Assemblée générale ordinaire. Si l'époque et le lieu de cette réunion n'ont pas été arrêtés par l'Assemblée générale précédente, ils sont fixés par le Comité exécutif et communiqués, quatre mois au moins à l'avance, aux organismes adhérents.

11. Dans des cas spéciaux, le Président peut, avec le consentement du Comité exécutif, convoquer une Assemblée générale extraordinaire; il est tenu de le faire à la demande d'un tiers des voix des pays adhérents.

12. Tous les membres des Comités nationaux peuvent assister aux réunions de l'Assemblée générale, et prendre part aux discussions, mais seulement avec voix consultative. Le Président de l'Union peut inviter des hommes de science, non délégués, mais appartenant à des pays adhérents, à assister, à titre consultatif, aux séances de l'Assemblée générale.

Les membres, non délégués, des Commissions mentionnées à l'article 8, ont le droit d'assister, dans les mêmes conditions, aux séances de l'Assemblée générale où sont traitées les questions rentrant dans leurs attributions.

13. L'ordre du jour d'une session est fixé par le Comité exécutif et communiqué au moins quatre mois avant l'ouverture de cette session. Toute question ne figurant pas à l'ordre du jour n'est prise en considération qu'avec l'assentiment préalable de la moitié au moins des voix des pays représentés à l'Assemblée générale.

VI. — Budget et Droit de vote.

14. Le Comité exécutif prépare un budget de prévision pour chaque année de la période comprise entre deux sessions. Une Commission financière, nommée par l'Assemblée générale, est chargée de l'étude de ce budget et de la vérification des comptes de l'exercice précédent. Elle établit, sur ces deux questions, des rapports distincts qui sont soumis à l'Assemblée générale.

A la suite de cet examen financier, l'Union fixe le taux de la part contributive unitaire.

La cotisation due par un pays et le nombre correspondant de voix qui lui sont attribuées sont réglés d'après le barème suivant :

Population du pays.	Nombre de voix.	Nombre de parts unitaires contributives.
—	—	—
Moins de 5 millions d'habitants.	1	1
Entre 5 et 10 id.	2	2
Id. 10 et 15 id.	3	3
Id. 15 et 20 id.	4	5
Plus de 20 id.	5	8

Les habitants des colonies et protectorats d'un pays sont comptés dans la population de ce pays, si celui-ci le désire, et d'après les indications de son Gouvernement.

Chaque Dominion (Afrique du Sud, Australie, Canada, Nouvelle-Zélande) a un nombre de voix correspondant à sa population et fixé d'après le barème précédent.

La cotisation unitaire perçue pendant la première période de la Convention ne pourra dépasser . . . francs annuellement.

Dans chaque pays, l'autorité qui adhère à l'Union est responsable du paiement de la cotisation de ce pays.

15. Les recettes de l'Union, provenant des contributions des divers pays, sont consacrées à payer :

1° Les frais de rédaction et de discussion des observations, y compris la rémunération d'assistants;

2° Les frais de publication et les dépenses accessoires d'administration;

3° Les honoraires du directeur du Bureau administratif.

Les ressources provenant de dons sont utilisées par l'Union en tenant compte des désirs exprimés par les donateurs.

Tout pays qui se retire de l'Union abandonne de ce fait ses droits à l'actif de l'Association.

16. Dans les Assemblées générales, les résolutions concernant les questions d'ordre scientifique sont prises à la majorité des voix de tous les délégués présents. Pour les questions d'ordre administratif et pour les questions mixtes, le vote a lieu par État, le nombre de voix de chaque État étant fixé à l'article 14.

S'il y a doute sur la catégorie dans laquelle doit être rangée une question à discuter, le Président décide.

En toutes circonstances, s'il y a égalité de voix, celle du Président est prépondérante.

17. Pour les questions administratives figurant à l'ordre du jour, un pays qui n'est pas représenté peut envoyer par écrit son vote au Président. Pour être valable, ce vote doit être reçu avant le dépouillement du scrutin.

VII. — Règlements intérieurs.

18. L'Assemblée générale peut édicter des règlements intérieurs concernant, soit la conduite de ses travaux, soit les devoirs généraux qui incombent aux Membres du Comité de l'Union, soit, en général, tous objets non prévus dans les statuts.

De même, chaque Commission peut élaborer des règlements pour la conduite de ses propres travaux. Avant d'entrer en vigueur, ces règlements doivent être approuvés par l'Assemblée générale; aucun d'eux ne peut contenir de prescriptions contraires aux termes de la présente Convention.

VIII. — Durée de la Convention et Modifications.

19. La présente Convention est valable jusqu'au 31 décembre 1931. Après cette date, elle sera renouvelée pour une autre période de douze ans, avec l'assentiment des pays adhérents.

20. Aucun changement ne pourra être apporté aux termes de la présente Convention sans l'approbation des deux tiers des voix des pays intéressés.

21. Le présent texte français servira exclusivement pour l'interprétation à donner aux articles de la Convention.

ANNEXE XXIII

PROJET DE STATUTS

POUR UNE

UNION INTERNATIONALE POUR LA BIBLIOGRAPHIE ET LA DOCUMENTATION

I. — Objet de l'Union et Conditions d'Admission.

1. L'Union pour la Bibliographie et la Documentation a pour objet l'organisation et le progrès général de la Bibliographie et de la Documentation. Elle exerce son action en provoquant et facilitant l'exécution de travaux, en établissant la liaison entre les divers travaux entrepris ou contrôlés par les Unions internationales particulières, en organisant les services d'utilité générale qui nécessitent la coopération des divers pays et des diverses associations.

2. L'admission d'un Pays à l'Union est subordonnée aux conditions fixées par les statuts du Conseil international de Recherches.

II. — Comités nationaux.

3. Un Comité national est constitué dans chacun des pays adhérents à l'Union. Il est créé sur l'initiative, soit de son Académie nationale, soit de son Conseil national de Recherches ou d'autres institutions ou groupements d'institutions nationales similaires, soit de son Gouvernement.

4. Les Comités nationaux ont pour attributions de faciliter et de coordonner, sur leurs territoires respectifs, l'étude des diverses branches de la Bibliographie et de la Documentation, envisagées principalement au point de vue international. Chaque Comité national, soit seul, soit de concert avec un ou plusieurs autres Comités nationaux, a le droit de soumettre à l'Union des questions à discuter rentrant dans la compétence de celle-ci.

Les Comités nationaux désignent les délégués chargés de les représenter aux Assemblées de l'Union.

III. — ADMINISTRATION DE L'UNION.

5. Les travaux de l'Union sont dirigés par l'*Assemblée générale* des délégués.

6. Le « Bureau » de l'Union comprend un Président, deux Vice-Présidents au plus et un Secrétaire général élus par l'Assemblée générale; ils demeurent en fonctions jusqu'à la fin de la deuxième Assemblée générale ordinaire qui suit celle de leur élection. Exceptionnellement, le mandat du Président et de l'un des Vice-Présidents (désigné par un tirage au sort) nommés à la fondation de l'Union, expire à la fin de la première Assemblée générale ordinaire qui suit celle de leur élection.

Ce Bureau forme le *Comité exécutif* de l'Union.

Les membres sortants sont rééligibles.

Le Comité exécutif peut pourvoir aux vacances qui surviendraient dans son sein. Toute personne désignée dans ces conditions demeure en fonctions jusqu'à la réunion de l'Assemblée générale suivante, qui doit procéder à une élection définitive. Le membre ainsi élu achève le mandat de celui qu'il s'agissait de remplacer.

Il existe, en outre, un Office international qui, sous le contrôle du Comité exécutif de l'Union, gère les ressources et assure la formation et la conservation des collections, ainsi que la préparation et la distribution des publications approuvées par l'Assemblée générale. L'administration de l'Office international est confiée à un ou plusieurs directeurs nommés par le Comité exécutif.

IV. — COMMISSIONS.

7. La responsabilité immédiate de l'organisation nationale appartient aux Conseils nationaux; celle de l'organisation par sciences appartient aux Unions et Associations internationales de chaque branche. L'Union elle-même agit en vue de coordonner l'organisation. Elle dresse le plan général des travaux et services, elle fixe le choix des méthodes; elle assure l'exécution par un ensemble de conventions conclues avec les organismes les mieux qualifiés.

L'Union peut se diviser en Commissions correspondant à chacune des branches essentielles des connaissances et de l'activité pratique. Chaque Commission envisage l'ensemble des questions de documentation concernant sa branche. Des Commissions envisagent les corrélations entre ces mêmes questions considérées dans l'ensemble des branches.

8. Le Président et les membres de chacune de ces Commissions sont élus par l'Assemblée générale sur la proposition du Comité exécutif de l'Union. Ils restent en fonctions jusqu'à la fin de l'Assemblée générale ordinaire suivante et sont rééligibles.

Lorsqu'une Commission comprend des membres désignés en partie par l'Union pour la Bibliographie et la Documentation et en partie par une autre Union rattachée au Conseil international de Recherches, elle a la faculté d'élire elle-même son Président.

Les Commissions établissent elles-mêmes leur règlement d'ordre intérieur; elles peuvent s'adjoindre, par cooptation et à la majorité des deux tiers des voix, de nouveaux membres appartenant aux pays représentés près l'Union et qui ne sont pas nécessairement délégués.

9. Avec l'approbation du Comité exécutif, une Commission peut avoir ses propres publications et confier une partie quelconque de ses travaux à des institutions nationales ou même à des particuliers.

Les fonctions d'une Commission peuvent être assumées par une Association internationale.

V. — ASSEMBLÉES GÉNÉRALES.

10. L'Union se réunit en principe tous les trois ans, en Assemblée générale ordinaire. Si l'époque et le lieu de cette réunion n'ont pas été arrêtés par l'Assemblée générale précédente, ils sont fixés par le Comité exécutif et communiqués, quatre mois au moins à l'avance aux organismes adhérents.

11. Dans des cas spéciaux, le Président peut, avec le consentement du Comité exécutif, convoquer une Assemblée générale extraordinaire; il est tenu de le faire à la demande d'un tiers des voix des pays adhérents.

12. Tous les membres des Comités nationaux peuvent assister aux réunions de l'Assemblée générale et prendre part aux discussions, mais seulement avec voix consultative. Le Président de l'Union peut inviter des hommes de science, non délégués, mais appartenant à des pays adhérents, à assister, à titre consultatif, aux séances de l'Assemblée générale.

Les membres, non délégués, des Commissions mentionnées à l'article 8, ont le droit d'assister, dans les mêmes conditions, aux séances de l'Assemblée générale où sont traitées les questions rentrant dans leurs attributions.

13. L'ordre du jour d'une session est fixé par le Comité exécutif et communiqué au moins quatre mois avant l'ouverture de cette session. Toute question ne figurant pas à l'ordre du jour n'est prise en considération qu'avec l'assentiment préalable de la moitié au moins des voix des pays représentés à l'Assemblée générale.

VI. — BUDGET ET DROIT DE VOTE.

14. Le Comité exécutif prépare un budget de prévision pour chaque année de la période comprise entre deux sessions. Une Commission financière, nommée par l'Assemblée générale, est chargée de l'étude de ce budget et de la vérification des comptes de l'exercice précédent. Elle établit, sur ces deux questions, des rapports distincts qui sont soumis à l'Assemblée générale.

A la suite de cet examen financier, l'Union fixe le taux de la part contributive unitaire.

La cotisation due par un pays et le nombre correspondant de voix qui lui sont attribuées sont réglés d'après le barème suivant :

Population du pays.		Nombre de voix.	Nombre de parts unitaires contributives.
—		—	—
Moins de 5 millions	d'habitants	1	1
Entre 5 et 10	id.	2	2
Id. 10 et 15	id.	3	3
Id. 15 et 20	id.	4	5
Plus de 20	id.	5	8

Les habitants des colonies et protectorats d'un pays sont comptés dans la population de ce pays, si celui-ci le désire, et d'après les indications de son Gouvernement.

Chaque Dominion (Afrique du Sud, Australie, Canada, Nouvelle-Zélande) a un nombre de voix correspondant à sa population et fixé d'après le barème précédent.

La cotisation unitaire perçue pendant la première période de la Convention ne pourra dépasser fr. . . . . annuellement.

Dans chaque pays, l'autorité qui adhère à l'Union est responsable du paiement de la cotisation de ce pays.

15. Les recettes de l'Union, provenant des contributions des divers pays, sont consacrées à payer les dépenses suivantes :

1° Frais d'administration, de publication et d'établissement des collections;

2° Indemnités du Secrétaire général, des Directeurs et du personnel des bureaux centraux;

3° Subventions ou rémunérations dues pour des travaux particuliers réclamés par l'Association;

4° Achat et entretien du matériel scientifique.

Les ressources provenant de dons sont utilisées par l'Union en tenant compte des désirs exprimés par les donateurs.

Tout pays qui se retire de l'Union abandonne de ce fait ses droits à l'actif de l'Association.

16. Dans les Assemblées générales, les résolutions concernant les questions d'ordre scientifique sont prises à la majorité des voix de tous les délégués présents. Pour les questions d'ordre administratif et pour les questions mixtes, le vote a lieu par Etat, le nombre de voix de chaque État étant fixé à l'article 14.

S'il y a doute sur la catégorie dans laquelle doit être rangée une question à discuter, le Président décide.

Dans les Commissions, les décisions sont prises à la majorité des voix des membres qui les composent et non par pays.

En toutes circonstances, s'il y a égalité de voix, celle du Président est prépondérante.

17. Pour les questions administratives figurant à l'ordre du jour, un pays qui n'est pas représenté peut envoyer par écrit son vote au Président. Pour être valable, ce vote doit être reçu avant le dépouillement du scrutin.

VII. — Règlements intérieurs.

18. L'Assemblée générale peut édicter des règlements intérieurs concernant, soit la conduite de ses travaux, soit les devoirs généraux qui incombent aux Membres du Comité de l'Union, soit, en général, tous objets non prévus dans les statuts.

De même, chaque Commission peut élaborer des règlements pour la conduite de ses propres travaux. Avant d'entrer en vigueur, ces règlements doivent être approuvés par l'Assemblée générale; aucun d'eux ne peut contenir de prescriptions contraires aux termes de la présente Convention.

VIII. — Durée de la Convention et Modifications.

19. La présente Convention est valable jusqu'au 31 décembre 1931. Après cette date, elle sera renouvelée pour une autre période de douze ans, avec l'assentiment des pays adhérents.

20. Aucun changement ne pourra être apporté aux termes de la présente Convention sans l'approbation des deux tiers des voix des pays intéressés.

21. Le présent texte français servira exclusivement pour l'interprétation à donner aux articles de la Convention.

TABLE DES MATIÈRES

	Pages.
Introduction	545
Conseil international de Recherches. — Assemblée constitutive	547
A. — Union astronomique internationale	554
B. — Union géodésique et géophysique internationale	555
C. — Union internationale de la Chimie pure et appliquée	561
D. — Union internationale de Radiotélégraphie scientifique	563
E. — Union internationale de Mathématiciens	563
F. — Union internationale de Physique	564
G. — Union internationale des Sciences biologiques	568
H. — Union géographique internationale	574
I. — Union géologique internationale	574
J. — Union internationale pour la Bibliographie et la Documentation	575
K. — Union technique internationale	576
L. — Brevets d'invention	579
Annexe I. — Discours de M. Harmignie	580
Annexe II. — Discours de M. Gravis	585
Annexe III. — Discours de M. Lacroix	591
Annexe IV. — Discours de M. Lacroix	594
Annexe V. — Discours de M. Pelseneer	599
Annexe VI. — Vœux pris en considération en séance plénière	601
Annexe VII. — Ordre du jour	603
Annexe VIII. — Composition des délégations	607
Annexe IX. — Statuts du Conseil international de Recherches	620
Annexe X. — Statuts de l'Union astronomique internationale	627

Pages.
ANNEXE XI. — Union astronomique internationale : composition des Commissions 634
ANNEXE XII. — Règlement d'ordre intérieur de la Commission internationale de l'Heure 639
ANNEXE XIII. — Règlement d'ordre intérieur du Bureau central international des télégrammes astronomiques 642
ANNEXE XIV. — Discours de M. Baillaud. 644
ANNEXE XV. — Statuts de l'Union géodésique et géophysique internationale 650
ANNEXE XVI. — Statuts de l'Union internationale de la Chimie pure et appliquée 658
ANNEXE XVII. — Statuts de l'Union internationale de Radiotélégraphie scientifique 666
ANNEXE XVIII. — Projet de statuts pour une Union internationale de Mathématiciens 673
ANNEXE XIX. — Projet de statuts pour une Union internationale de Physique 680
ANNEXE XX. — Projet de statuts pour une Union internationale des Sciences biologiques. 687
ANNEXE XXI. — Projet de statuts pour une Union géographique internationale 695
ANNEXE XXII. — Projet de statuts pour une Union géologique internationale 703
ANNEXE XXIII. — Projet de statuts pour une Union internationale pour la Bibliographie et la Documentation 710

◆

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Delage (*M.-Y.*). De l'origine des éléments figurés du sang chez les vertébrés. Historique de la question jusqu'en 1880. (Thèse pour le doctorat en médecine.) Paris, 1880; gr. in-8° (100 p.).

— Contribution à l'étude de l'appareil circulaire des crustacés édriophthalmes marins. Paris, 1881 ; gr. in-8° (175 p.).

— Sur le système nerveux et sur quelques autres points de l'organisation du peltogaster (Rathke). Contribution à l'histoire des kentrogonides. Paris, 1886; extr. in-8° (pp. 17-36).

— Histoire du *Balaenoptera musculus* échoué sur la plage de Langrune. Poitiers, 1886; gr. in-8° (132 p., planches).

— Pourquoi les canaux demi-circulaires sont disposés et conformés comme ils le sont. Versailles, 1900; extr. gr. in-8° (pp. 625-634).

— La nature des images hypnagogiques et le rôle des lueurs entoptiques dans le rêve. Paris, 1903 ; extr. gr. in-8° (pp. 5-16).

— Sur les mouvements de torsion de l'œil. Paris, 1904; extr. in-8° (pp. 1-48).

— Élevage des larves parthénogénétiques d'*asterias glacialis*. Paris, 1904; extr. in-8° (pp. 27-42, planches).

— Nouvelles expériences de parthénogénèse expérimentale. Paris, 1905; extr. gr. in-8° (pp. CLXIV-CLXVIII).

— Les problèmes de la biologie. Conférence faite à l'Institut général psychologique, le 10 avril 1905. Paris, 1905; extr. gr. in-8° (pp. 5-26).

— Sur les conditions de la parthénogénèse expérimentale et les adjuvants spécifiques de cette parthénogénèse. Paris, 1907 ; extr. gr. in-8° (pp. XXIX-XXXVII).

— Les idées nouvelles sur la parthénogénèse expérimentale. Paris, 1908; extr. gr. in-8° (pp. 3-23).

— La parthénogénèse électrique. Paris, 1908 ; extr. gr. in-8° (pp. XXX-XLIII, planches).

Delage (M.-Y.). Les vrais facteurs de la parthénogénèse expérimentale. Élevage des larves parthénogénétiques jusqu'à la forme parfaite. Paris, 1908; extr. gr. in-8° (pp. 445-508, planche).

— Comment pensent les bêtes. Paris, 1911; extr. gr. in-8° (pp. 5-14).

— La spongiculture à Tamaris. Monaco, 1911; extr. gr. in-8° (pp. 1-4).

— Les théories de l'évolution. Paris, 1911; in-8° (371 p.).

— La parthénogénèse expérimentale. (Extrait du *Verhandlungen des VIII. internationalen Zoologen-Kongresses zu Graz vom 15-20. August 1910*). Iéna, 1912; extr. gr. in-8° (pp. 100-162).

— Bathyrhéomètre à enregistrement continu des directions et des vitesses des courants de fond. Monaco, 1912; extr. gr. in-8° (pp. 1-20).

— La question du goémon de fond. Monaco, 1913; extr. gr. in-8° (pp. 1-8).

— Pour le contrôle des chevaux pensants d'Elberfeld, au moyen du « Questionneur muet ». Paris, 1913; extr. gr. in-8° (pp. 1-5).

— Psychologie du rêveur. Paris, 1913; extr. gr. in-8° (pp. 1-11).

— Études anatomiques et zoologiques sur les cynthiadées. Paris, s. d.; extr. gr. in-8° (pp. 519-534, planche).

— Nouvelles recherches sur la parthénogénèse expérimentale chez *Asterias glacialis*. Paris, s. d.; extr. gr. in-8° (pp. 213-240).

— La parthénogénèse naturelle et expérimentale. Paris, 1913; in-8° (342 p.).

— L'année biologogique. Comptes rendus annuels des travaux de biologie générale. Paris, 1907; gr. in-8° (xv-571 p.).

Menegaux (A.). L'éducation des chevaux pensants d'Elberfeld. Paris, 1913; extr. gr. in-8° (pp. 5-44).

◆

ERRATA

Sur les surfaces dont les lignes de courbure d'un système sont planes ou sphériques, etc., par M. A. **Demoulin**, nos 2-3, pp. 179-184, 1919 :

Page 182, ligne 1, *au lieu de :* sphère, *lire :* sphères.
Page 183, ligne 15, *au lieu de :* et Γ, *lire :* et à Γ.

Sur les systèmes Θ *et sur les systèmes* R, par M. A. **Demoulin**, nos 2-3, pp. 185-197, 1919 :

Page 188, ligne 11, *au lieu de :* la surface (M), *lire :* les surfaces (M).
Page 189, ligne 7, *au lieu de :* $C_2, \dots,$ *lire :* $C_2, \dots, C_{-1}, C_{-2}, \dots$.

Sur la transformation de Moutard et quelques-unes de ses applications géométriques, par M. A. **Demoulin**, no 4, pp. 261-284, 1919 :

Page 270, ligne 2, *au lieu de :* $i = 1, 2, \dots, n,$ *lire :* $i = 2, \dots, n$.
Page 270, ligne 13, *au lieu de :* $p_{\alpha_1},$ *lire :* p, p_{α_1}.
Note de la page 271, *au lieu de :* 8 mars, *lire :* 1er mars.

Sur les congruences de sphères cycliques et sur les systèmes triples orthogonaux à lignes de courbure planes ou sphériques dans un système, par M. A. **Demoulin**, no 5, pp. 339-359, 1919 :

Page 339, ligne 8, *au lieu de :* (S_3), *lire :* S_3.
Page 348, lignes 16 et 23, *au lieu de :* S_1, *lire :* S'_1.
Page 348, ligne 26, *au lieu de :* S', *lire :* (S'); *et au lieu de :* (no 1) *lire :* (no 2).
Page 348, ligne 28, *au lieu de :* S_3, *lire :* S'_3.
Page 349, lignes 3, 6 et 23, *au lieu de :* S_3, *lire :* S'_3.
Page 352, ligne 10, *au lieu de :* le, *lire :* la.
Page 356, ligne 4, *au lieu de :* $q, \xi, \lambda, \nu, p_1, \eta_1, \mu_1, \nu_1,$ *lire :* $q, \xi, \lambda, r, p_1, \eta_1, \mu_1, r_1$.
Page 357, ligne 10, *au lieu de :* nos 1 et 8, *lire :* nos 2 et 8.

TABLE DES MATIÈRES

CLASSE DES SCIENCES. — *Séance du 14 juin 1919.*

Élections : Sont élus membres titulaires : MM. J. Verschaffelt, G. Lecointe, Émile Marchal, Jules Cornet, Pierre Nolf et Jules Bordet; correspondant : Albert Brachet; associés : Henri Deslandres, G. Hale, Paul Appel, Haller, N. Lockyer, J.-J. Thomson, Viti Volterra, Lorentz, Charles Moureu, G. Urbain, Claude Guichard, Paul Marchal, E. de Margerie, Davenport, Sauvageau, Goodrich, Henry Fairfield Osborn, F. Mesnil, Guignard, Termier, Maurice Caullery, Charles Richet et Grassi 417

M. le Président de l'Académie annonce la présentation de deux candidatures aux fonctions de Secrétaire perpétuel 418

Correspondance : M^{lle} Jeanne Terby remercie pour le prix qui lui a été décerné. — M. Van de Sande Bakhuysen adresse des condoléances au sujet de la mort de M. Paul Mansion. — M. le D^r De Meyer offre de contribuer à la publication des planches de son mémoire. — M. L. Spelkens fait une communication relative à la *Quadrature du cercle.* — M. le Paige dépose un pli cacheté : *Détermination de l'orbite d'une planète par trois observations.* — M. Henri Wilmotte, de Dampremy, communique une annexe à son mémoire sur l'*Énergie dans son essence.* — M. Lucien Godeaux soumet à l'examen un travail intitulé : *Les surfaces bicanoniques doubles ayant un nombre fini de points de déramation.* — Un travail de M. Pienkowski : *La mesure des mobilités des ions par la méthode du compensateur plan.* — Hommages d'ouvrages 418

Fondation de Potter 419

Prix Deruyts 420

Choix d'une lecture pour la séance publique 420

Choix d'un éditeur pour les publications 420

Préparatifs pour la réunion des Académies interalliées . . . 421

Prix Deruyts. — Rapports de MM. Stuyvaert, Neuberg et le Paige 421

Communications et Lectures.

Géométrie infinitésimale. — *Sur les transformations de Ribaucour,* par M. A. Demoulin 425

Physique. — *Les différences de potentiel anodique et cathodique dans le transport de l'électricité par un électrolyte,* par J.-E. Verschaffelt 441

Physique mathématique. — *La Gravifique* (troisième communication), par Th. De Donder. 465

Séance du 5 juillet 1919.

M. le Directeur félicite M. Cesàro, lauréat du Prix Gegner, élu membre ordinaire de l'Académie des sciences physiques et mathématiques d'Italie, membre honoraire de la Société française de minéralogie, membre correspondant de l'Académie des sciences de Rouen; M. Paul Pelseneer, qui a obtenu le Prix Cuvier, et M. Charles Julin, élu correspondant de la Société de biologie de Paris 479

Correspondance : Arrêté royal approuvant les modifications aux articles 13 et 20 des statuts organiques. — Les nouveaux élus adressent leurs remerciements. — L. Godeaux remercie pour le Prix Deruyts. — La Société chimique de Belgique fait connaître qu'elle a rayé de la liste de ses membres tous ceux appartenant aux nations ennemies. — M. Henri Wilmotte demande à prendre copie de son mémoire sur la *Nature de l'énergie.* — M. Maurice Noblom, de Watermael, fait don de lettres de J.-B. Van Mons. — Lettre de M. Cesàro aux membres de la Classe 480

TRAVAUX A L'EXAMEN 482
RAPPORTS 483
HOMMAGES D'OUVRAGES 483
CHOIX D'UN ÉDITEUR 483
LES LITTÉRATEURS A L'ACADÉMIE 484
DÉLÉGATION DE LA CLASSE AU COMITÉ DE RECHERCHES 484

Communications et Lectures.

PHYSICO-CHIMIE. — *La loi de Faraday et l'action de l'effluve électrique sur les oxydes métalliques* (1 fig.) (deuxième communication), par A. de Hemptinne. 487
BOTANIQUE. — *Les « Taraxacum » de graine sont-ils différents des « Taraxacum » de bouture?* (1 figure), par Jeanne Terby 497

Assemblée générale extraordinaire des trois Classes du mardi 8 juillet 1919.

ÉLECTION DU SECRÉTAIRE PERPÉTUEL 503

Séance du 2 août 1919.

M. le Directeur félicite M. Demoulin, lauréat du prix décennal des sciences mathématiques pures; MM. Marchal, chevalier de l'Ordre de Léopold, et Brachet, chevalier de la Légion d'honneur 507
CORRESPONDANCE : M. Ch. Davenport remercie pour son élection. — M^me^ Victor Desguin fait part du décès de son mari. — Arrêté royal approuvant les élections. — M. A. Demoulin, lauréat du prix décennal de mathématiques pures. — M. Vincent, directeur honoraire de l'Institut royal météorologique, proteste au sujet du fait que cet établissement n'a pas été invité à participer aux réunions du Conseil international de Recherches. — Une lettre sera adressée à M. Spelkens au sujet de sa communication. — Hommages d'ouvrages 508
CONCOURS DÉCENNAUX 509
RAPPORTS 510
GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE. — *Sur les surfaces réglées, les surfaces cerclées et les surfaces à lignes de courbure sphériques dans un système*, par A. Demoulin 511
PHYSICO-CHIMIE. — *La loi de Faraday et l'action de l'effluve électrique sur les gaz*, par A. de Hemptinne 521
PHYSICO-CHIMIE. — *Sur les tensions de vapeur de l'anhydride sulfureux*, par W. Mund 529
CONSEIL INTERNATIONAL DE RECHERCHES. — Compte rendu de l'assemblée constitutive, présenté par MM. Pelseneer, Swarts et Lecointe 545
Annexes 580
BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE 719
ERRATA 721

Le fonds des publications académiques ayant été systématiquement pillé par les Allemands, il ne sera plus possible de donner suite aux demandes de combler les lacunes antérieures à 1919.

14-11-19.

ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

BULLETIN

DE LA

CLASSE DES SCIENCES

1919 — Nos 9-12

SMITHSONIAN INSTITUTION
OCT 12 1936
6
NATIONAL MUSEUM

BRUXELLES

Maurice LAMERTIN
LIBRAIRE-ÉDITEUR
Rue Coudenberg, 58-62

M. HAYEZ
IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE
Rue de Louvain, 112

1920

Séance du 1^er^ octobre 1919.

M. A. Gravis, vice-directeur, occupe le fauteuil.
M. Paul Pelseneer, secrétaire perpétuel.

Sont présents : MM. C. le Paige, J. Deruyts, Léon Fredericq, J. Neuberg, A. Lameere, Charles-J. de la Vallée Poussin, Max Lohest, Fr. Swarts, Jean Massart, A. Demoulin, A. Rutot, A. de Hemptinne, Victor Willem, Paul Stroobant, J. Verschaffelt, G. Lecointe, Émile Marchal, Jules Bordet, *membres ;* M. Stuyvaert, *correspondant.*

Absences motivées : MM. Charles Julin et P. Nolf, membres ; F. Van Aubel et A. Brachet, correspondants.

Avant d'aborder l'ordre du jour, M. le Directeur félicite M. le Paige, nommé Grand Officier de l'Ordre de la Couronne ; MM. Léon Fredericq et Gilkinet, Commandeurs de l'Ordre de Léopold, et MM. Cesàro, Jorissen, Julin et Lohest, Officiers de l'Ordre de Léopold. *(Applaudissements.)*

Il annonce également à la Classe que M. Louis Le Nain, qui fit fonctions de Secrétaire perpétuel pendant l'occupation, est nommé Commandeur de l'Ordre de Léopold.

CORRESPONDANCE.

M. le Ministre des Sciences et des Arts transmet trente exemplaires du rapport du jury chargé de décerner le prix décennal des sciences mathématiques pures pour la période de 1904 à 1913.

— L'Académie des sciences de Lisbonne félicite l'Académie de Belgique de l'heureuse issue de la guerre. — Remerciements.

— La revue scientifique anglaise *Nature* annonce qu'elle va célébrer son cinquantenaire et sollicite pour son numéro jubilaire un message du Directeur de la Classe.

— Les Services géologiques du Portugal annoncent la mort de M. Paul Choffat.

— MM. Osborn, J. J. Thomson, Hale et de Margerie remercient au sujet de leur élection comme associés.

— M. Henri Wilmotte demande le dépôt aux archives d'une suite à la note qu'il a communiquée à la séance d'avril. — Accordé.

HOMMAGE D'OUVRAGES.

— *Due dimostrazioni del postulate delle parallele*, par E. L. Martin.

— *Notions et données astronomiques*, par Paul Stroobant.

— Vingt brochures sur diverses questions d'hérédité, par C. B. Davenport, associé.

— *Notes minéralogiques*, par H. Buttgenbach.

— *Le bassin charbonnier de la Lukuga.* — *Le Silurocambrien du Brabant a-t-il joué le rôle d'un massif résistant?* — *Etude comparative des formations post-primaires de la Malagarasi, etc.*, par P. Fourmarier.

— *Rapport sur les observations sur le bord nord du bassin de Dinant entre les méridiens d'Acoz et de Binche,* par R. Anthoine.

— *Félix Le Dantec* (1869-1917), par Ch. Pérez

— *Revegetation of a denuded area,* par H. S. Conard.

— *Sur les familles normales de fonctions analytiques,* par P. Montel.

— Remerciements.

PLIS CACHETÉS.

La Classe accepte le dépôt d'un pli cacheté de M. P. Stroobant (sur l'étude des mouvements locaux de l'atmosphère) et d'un autre de M. Alfred Errera.

ÉLECTIONS.

Il est donné communication de la liste des candidats proposés par les sections.

RAPPORTS.

Il est donné lecture des rapports :

1° De M. Lecointe sur une lettre et une brochure de M. A. Meuris : *Problème de l'électricté.* — Dépôt aux archives;

2° De MM. Verschaffelt et de Hemptinne sur un travail de M. Pienkowski, intitulé : *Sur la mesure des mobilités des ions par la méthode du condensateur plan.* — Impression dans les *Mémoires* in-8°;

3° De MM. Bordet et Marchal sur un travail de M. Bertrand : *Une maladie des plaques photographiques due à un bacille sporulé aéro-anaérobie.* — Dépôt aux archives.

— M. Neuberg demande que M. Stuyvaert le remplace comme premier commissaire pour examiner le mémoire de M. Godeaux. *Sur les surfaces bicanoniques doubles*, etc. — Accepté.

TRAVAUX PRÉSENTÉS.

— M. Jorissen. *Recherches sur la cyanogenèse.* — Impression au *Bulletin.*

— M. Henriot. *Sur les invariants optiques*, présenté par M. Verschaffelt, avec rapport verbal concluant à l'impression au *Bulletin.* — Adopté.

— M. Remy. *La mensuration de la fatigue intellectuelle.* — Commissaires, MM. Fredericq et Willem.

— M. Droesbeke. I. *Calcul du rendement des hélices aériennes;* II. *Détermination de la hauteur du plafond.* — Renvoyé à l'examen de M. Ch.-J. de la Vallée Poussin.

— M. Gillis. *Isomérisation du sulfocyanure de méthyle*, présenté par M. Swarts, avec rapport verbal concluant à l'impression au *Bulletin*. — Adopté.

— M. Stevelinck. *Contribution à l'étude de l'aimantation.* — Renvoi à l'examen de MM. Verschaffelt et de Hemptinne.

— M. De Donder. *La gravifique* (4e communication), présenté par M. Stroobant, avec rapport verbal concluant à l'impression au *Bulletin*. — Adopté.

AUGMENTATION DU NOMBRE DES MEMBRES.

M. de Hemptinne estime que le nombre des membres de la Classe n'est pas en rapport avec le développement qu'ont pris les sciences expérimentales, notamment la physique et la chimie ainsi que leurs applications. Il cite de nombreux exemples des progrès récents de ces sciences appliquées ; il insiste également sur l'aide que l'industrie apporte au développement de la science pure. Il est d'avis que l'Académie ne peut se désintéresser des applications de la science et devrait comprendre au moins un représentant de la mécanique, de l'électrotechnique, de la télégraphie sans fil, etc.

M. Swarts insiste sur l'union des sciences pures et appliquées et sur les services mutuels qu'elles se rendent. Il ajoute quelques nouveaux exemples à ceux qui viennent d'être cités et appuie la proposition de M. de Hemptinne.

M. Lohest oppose à cette proposition le danger qu'il y aurait à mettre les applications sur le même pied que les sciences pures et à encourager ainsi l'esprit d'utilitarisme et d'affairisme. Il est d'avis que la Classe des sciences doit rester exclusivement consacrée au culte de la science pure et de la recherche désintéressée.

M. Lameere rappelle que bien des hommes de science qui s'occupaient d'applications, ont siégé à l'Académie; rien n'empêche que de tels exemples se reproduisent, sans rien modifier aux règlements ni au nombre des membres.

MM. Deruyts et Stroobant partagent complètement l'avis de MM. Lohest et Lameere.

MM. Swarts et de Hemptinne estiment qu'il ne faut pas s'enlever la possibilité d'augmenter un jour le nombre des membres.

La Classe adopte la résolution suivante :

« Constatant que l'Académie n'a jamais été fermée à aucune compétence scientifique, la Classe estime que, dans les circonstances présentes, il n'y a pas lieu de proposer l'augmentation du nombre de ses membres. »

PRIX DÉCENNAUX.

Consultée par M. le Ministre des Sciences et des Arts, au sujet des prix décennaux qui n'ont pu être décernés pendant la guerre, la Classe adopte la résolution suivante :

« Pour les concours des prix décennaux dont la période se termine entre le 4 août 1914 et le 31 décembre 1918, l'échéance est renouvelée jusqu'au 31 décembre 1920, — étant entendu que le nombre d'années ainsi ajouté à la durée de la période de chacun de ces concours, sera retranché de la durée de la période suivante des concours correspondants. »

FONDATION DE POTTER.

Sur la proposition de la Commission de la Fondation de Potter, MM. de la Vallée Poussin, Deruyts et Demoulin sont chargés de faire rapport sur un travail de M. Stuyvaert en vue d'une subvention.

COMMISSION DE LA BIOGRAPHIE NATIONALE.

La Classe procèdera à l'élection de sa délégation au cours d'une prochaine séance.

CONSEIL NATIONAL DE RECHERCHES.

Le rapport sur la constitution du Conseil national de Recherches scientifiques sera lu dans une prochaine réunion.

COMMUNICATIONS ET LECTURES.

CHIMIE VÉGÉTALE. — **Recherches sur la cyanogenèse. Une réaction de l'acide citrique,**

par A. M. JORISSEN, membre de l'Académie.

Dans une note publiée quelque temps avant la guerre (¹), nous avons montré que l'acide cyanhydrique prend rapidement naissance, à froid, quand des solutions aqueuses très diluées d'acide citrique sont exposées à la lumière diffuse en présence de faibles quantités de composés de fer et d'acide nitreux.

C'est ainsi, par exemple, qu'après vingt-quatre heures on peut constater la présence de l'acide prussique (²) dans 500 centi-

---

(¹) *Bull. Acad. roy. de Belgique* (Classe des sciences), mars 1914, nº 3, p 131.

(²) Rappelons que pour constater la présence de l'acide cyanhydrique dans des mélanges de cette nature par la réaction destinée à obtenir du ferrocyanure ferrique, nous procédons de la manière suivante : Le liquide est additionné de carbonate calcique en excès, puis est soumis à la distillation dans un courant de vapeur d'eau. On recueille 30 centimètres cubes de liquide distillé, on y ajoute quelques gouttes de solution de sulfate ferreux, un léger excès d'hydrate sodique, puis après quelques minutes on acidule par l'acide chlorgydrique dilué et on chauffe au bain-marie. Quand les quantités d'acide cyanhydrique sont minimes, le précipité bleu ne se dépose pas immédiatement, comme on le sait, et le liquide présente une coloration verte ou verdâtre. En pareil cas, le mieux est de laisser ce liquide en repos pendant vingt-quatre heures, puis de le faire passer à travers un petit filtre qui retient le précipité bleu. Il est inutile, à notre avis, d'ajouter du chlorure ferrique en même temps que le sulfate ferreux, car il se forme une quantité suffisante d'hydrate ferrique par l'oxydation partielle, en présence de l'air, du précipité d'hydrate ferreux résultant de l'action de l'hydrate iodique sur le sulfate ferreux.

mètres cubes d'une solution aqueuse contenant seulement 1 centigramme d'acide citrique, deux gouttes de la solution de chlorure ferrique (PS 1,128) et 1 centigramme de nitrite potassique, lorsque le mélange est exposé à froid à la lumière diffuse du laboratoire. Cette réaction, en raison de la concentration très faible des solutions réagissantes et de leur nature chimique (le chlorure ferrique peut être remplacé par le bicarbonate ferreux), s'effectue donc dans des conditions compatibles avec la vie de la cellule et constitue une synthèse intéressante au point de vue de l'origine des composés organiques azotés.

Dans les conditions indiquées, l'acide citrique est transformé en acide acétondicarbonique qui, réagissant sur des doses même très petites d'acide nitreux, donne l'acide cyanhydrique. Cette transformation s'effectue sous l'influence de divers agents d'oxydation (acide sulfurique concentré à chaud, composé de manganèse, etc.).

Elle se manifeste surtout quand on expose à la lumière, en présence de composés ferriques, des solutions diluées d'acide citrique.

Si l'on dépose sur l'appui d'une fenêtre un récipient en verre incolore et non bouché contenant un mélange renfermant en 100 centimètres cubes 10 centigrammes d'acide citrique et dix gouttes de la solution de chlorure ferrique (PS 1,128), on remarque que le liquide prend peu à peu une teinte rougeâtre et qu'après quarante-huit heures il est décoloré. Ajoute-t-on alors cinq gouttes de chlorure ferrique dissous, on constate l'apparition d'une coloration violette intense qui disparaît après quarante-huit heures et ne reparaît pas à la suite d'une nouvelle addition de composés ferriques.

Ces changements d'aspect qui se produisent à la lumière diffuse ne se manifestent pas quand le mélange est maintenu à l'obscurité.

Il est plus difficile de les observer quand on opère sur des solutions à un état de concentration notable, les acides libres, faisant disparaître la coloration rouge violacé due à l'action des sels ferriques sur l'acide acétondicarbonique.

La production de l'acide prussique par l'action de l'acide nitreux ou nitrique sur diverses substances organiques a été signalée à plusieurs reprises, et, d'après les auteurs, les composés répondant à la formule, ($CH^3CO.R$) ou qui sont susceptibles de donner naissance à ces derniers par oxydation, présenteraient surtout cette particularité Comme nous le faisons remarquer plus haut, dans les cas observés, la réaction ne se produit qu'en présence de doses notables d'acides ou bien à chaud. Von Pechman a signalé, il y a longtemps déjà, qu'en présence d'acide nitreux, l'acide acétondicarbonique donne de l'acide cyanhydrique, reconnaissable à son odeur, *à froid* et j'ai pu observer que cette réaction se produit aux dépens de faibles traces des composés en question.

Il est facile de constater qu'après un contact de vingt-quatre heures et à froid, l'acide cyanhydrique n'apparaît pas dans des liquides qui, par 100 centimètres cubes, contiennent 1 gramme des diverses substances organiques suivantes, 5 centigrammes de nitrite potassique et quelques gouttes d'acide acétique :

La formaldéhyde, l'acétaldéhyde, l'acide formique, l'acide acétique, l'acide oxalique, l'acide malique, l'acide tartrique, l'acide lactique, l'acide malonique, l'acide isobutyrique, l'acide lévulinique, le sucre saccharose, le sucre dextrose, la gélatine, la vanilline, l'acétylacétate d'éthyle et la diméthylcétone.

A noter que dans les conditions indiquées, la diméthylcétone, l'acide lactique et l'acide citrique lui-même en solution au centième ne donnent pas d'acide cyanhydrique en présence de 5 centigrammes de nitrite potassique, tandis que dans le même laps de temps, des composés ferriques étant présents, sous l'influence de la lumière diffuse, l'acide prussique se forme dans des mélanges contenant un cinq-millième d'acide citrique et une dose de nitrite potassique correspondant à moins d'un cent-millième d'acide nitreux. Il en résulte que cette réaction, intéressante au point de vue de l'étude de la cyanogenèse chez les végétaux, est également de nature à fournir d'utiles indications pour l'identification de l'acide citrique (¹).

Pour cette identification, on introduit 100 centimètres cubes de la solution à analyser dans un récipient en verre incolore, non bouché, avec 10 gouttes du soluté de chlorure ferrique (PS 1,128), 5 gouttes ou une quantité suffisante d'acide acétique pour que le milieu soit nettement acide, 5 centimètres cubes d'une solution de nitrite potassique au centième, et l'on expose le récipient à la lumière diffuse. Au bout de vingt-quatre heures, on ajoute un excès de carbonate calcique et on distille dans un courant de vapeur d'eau, de façon à recueillir 30 centimètres cubes de liquide. On cherche l'acide cyanhydrique dans ce liquide en opérant comme nous l'indiquons plus haut. Alors que l'acide citrique dissous à des doses variant de 10 centigrammes à 5 grammes par 100 centimètres cubes fournit par ce traitement une quantité d'acide cyanhydrique suffisante, pour que l'on obtienne un notable précipité de ferrocyanure ferrique, le résultat est négatif quand on opère de la façon indiquée sur 100 centimètres cubes de solutions au centième d'autres substances, telles que notamment l'acide oxalique, l'acide malique, l'acide tartrique, l'acide lactique, l'acide succinique, l'acide benzoïque, l'acide malonique, l'acide formique, l'acide acétique, la formaldéhyde, l'alcool méthylique, la diméthylcétone, l'acétaldéhyde, l'acétylacétate d'éthyle.

Ajoutons que la réaction décrite permet de déceler l'acide citrique en présence de l'acide oxalique et de l'acide malique,

---

(¹) Nous rappellerons à ce propos que dès 1886 (*Mém. cour. de l'Acad. roy. de Belgique,* t. XXXVIII, p. 88) nous avons montré que la lumière favorise la formation des composés de cyanogène dans les petites plantes de *Linum usitatissimum.* Au surplus, l'acide citrique est très répandu dans le règne végétal, et la linamarine, glucoside cyanogénétique du lin, donne, parmi ses produits de dédoublement, la diméthylcétone, laquelle prend aisément naissance aux dépens de l'acide acétonebicarbonique.

mais quand l'acide tartrique accompagne l'acide citrique, ce dernier ne donne pas la réaction dans les conditions indiquées.

Nous montrerons plus loin comment on peut tirer parti de la formation d'acide cyanhydrique aux dépens de l'acide acétonedicarbonique pour identifier l'acide citrique dans un mélange renfermant aussi de l'acide tartrique. En appliquant la méthode indiquée plus haut, on peut déceler facilement l'acide citrique dans le suc d'orange, la gelée de groseille et le lait de vache (on opère sur le sérum obtenu par l'action du chlorure ferrique).

La méthode qui vient d'être exposée a certes le défaut de comporter des opérations assez longues; si l'on songe cependant que les caractères distinctifs de l'acide citrique sont peu nombreux et que le traitement décrit aboutit à la formation de l'acide cyanhydrique, c'est-à-dire d'un composé qui peut être identifié si nettement par des réactions spéciales et particulièrement sensibles, on reconnaîtra que dans certains cas elle pourra être appliquée très avantageusement.

Mais, comme nous l'avons fait remarquer, l'action de la lumière en présence des composés de fer ne permet pas de déceler l'acide citrique quand ce dernier est accompagné d'acide tartrique, et l'on sait cependant que ces deux acides sont fréquemment associés dans les mélanges à analyser.

Or nous avons pu constater expérimentalement qu'il est facile de tirer parti de la propriété que possède l'acide citrique de donner aisément naissance à l'acide acétonedicarbonique sous l'influence d'agents d'oxydation autres que les sels de fer, pour identifier ces composés, même en présence d'acide tartrique.

Dans l'intéressant mémoire qu'il a publié en 1902, Denigès (1) a montré que par l'action du permanganate potassique, l'acide citrique fournit rapidement de l'acide acétonedicarbonique, et l'on sait que cette transformation s'effectue dans la première phase de la réaction que le savant chimiste de Bordeaux a décrite pour l'identification de l'acide citrique par le sulfate mercurique.

---

(1) *Les réactions analytiques de quelques fonctions organiques fondées sur leurs transformations en dérivés aldéhydiques et cétoniques.* (Ann. de chim. et de phys., 8e sér., t. XVIII, p. 189, 1909; Bull. Soc. chim., t. XXVIII, 1902, p. 13.)

Nous avons constaté qu'à froid, et aussi bien à l'obscurité qu'à la lumière, le peroxyde manganique oxyde peu à peu l'acide citrique dissous et qu'au contact d'un excès de ce produit, des solutions d'acide citrique ne contenant pas au delà de 5 centigrammes de ces acides par 100 centimètres cubes, renferment de l'acide acétonedicarbonique après vingt-quatre heures.

Nous avons donc donné la préférence au peroxyde manganique naturel et pulvérisé, dont l'excès peut être séparé par filtration avant l'addition du nitrite potassique.

Par l'intermédiaire de ce produit, l'identification de l'acide citrique s'effectue aisément quand on opère de la manière suivante :

100 centimètres cubes de la solution à examiner sont introduits dans un récipient avec 5 grammes de peroxyde manganique naturel et en poudre, en même temps que 5 gouttes d'acide acétique; on agite et laisse en contact vingt-qua-re heures. On filtre alors le liquide et l'on y ajoute 5 à 10 gouttes d'acide acétique, puis 5 centimètres cubes d'une solution aqueuse de nitrite potassique au centième. Après avoir agité, on abandonne le mélange au repos jusqu'au lendemain. On soumet alors le tout à la distillation dans un courant de vapeur d'eau et en présence d'un excès de carbonate calcique. On recueille environ 130 centimètres cubes de liquide, dans lequel on recherche l'acide cyanhydrique comme il est indiqué.

En opérant ainsi, on obtient un notable précipité de ferrocyanure ferrique quand on met en expérience 100 centimètres cubes d'une solution d'acide citrique contenant 1 gramme de ce composé (¹); dans les mêmes conditions, il ne se produit pas de précipité bleu quand l'acide citrique est remplacé par diverses autres substances, telles que l'acide isobutyrique, l'acide oxalique, l'acide tartrique, l'acide malique, l'acide lactique, l'acide succinique, l'acide acétique, la diméthylcétone, l'acétaldéhyde, la glycérine, l'alcool méthylique, le sucre saccharose, le dextrose, le lactose, la dextrine. Comme je l'ai montré déjà, la formation de l'acide cyanhydrique aux dépens de l'acide acétone-dicarbonique et de traces d'acide nitreux est indépendante de toute distillation. Le phénomène se manifeste à froid.

(¹) *Contribution à l'étude de la formation de l'acide cyanhydrique chez les végétaux.* (BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE [Classe des sciences], nº 3, mars 1914, pp. 135-136.)

PHYSIQUE THÉORIQUE. — **Sur les invariants optiques,**

par E. HENRIOT (*).

Les travaux de M. H.-A. Lorentz ont mis en évidence le fait que dans une substance isotrope l'indice varie avec la densité de telle manière que l'expression

$$\frac{n^2-1}{n^2+2}\cdot\frac{1}{d}$$

reste constante. Le même auteur a montré que certaines fonctions des indices principaux et de la densité doivent rester invariantes lorsque le corps passe d'une forme cristalline à une autre.

Je rappelle rapidement en quoi consiste la théorie qui a été reprise récemment par M. Brillouin (**).

Une molécule du milieu transparent se trouve soumise au champ alternatif électrique de l'onde lumineuse h_x h_y h_z et à un champ auxiliaire provenant de la polarisation des autres molécules h_x^p h_y^p h_z^p. Soient h'_x h'_y h'_z les composantes du champ total. Si la molécule est rapportée à ses trois axes principaux, si

---

(*) Présenté par M. J.-E. Verschaffelt.

(**) M. BRILLOUIN, Quelques considérations sur la structure des cristaux. (*Comptes rendus du deuxième Conseil de physique Solvay,* 1913.)

$f_1\, f_2\, f_3$ sont les coefficients d'élasticité principaux et e la charge de la particule vibrante, on aura

$$\left\{\begin{aligned} f_1 x &= e h'_x \\ f_2 y &= e h'_y \\ f_3 z &= e h'_z \end{aligned}\right.$$

x, y, z étant les écarts à partir de la position d'équilibre. Désignons par m_x, m_y, m_z les composantes du moment électrique suivant des axes xyz *quelconques*, nous aurons trois équations telles que :

$$\begin{aligned} m_x &= j_{xx}h'_x + j_{xy}h_y + j_{xz}h'_z \\ m_y &= j_{yx}h'_x + j_{yy}h'_y + j_{yz}h'_z \\ m_z &= j_{zx}h'_x + j_{zy}h'_y + j_{zz}h'_z \end{aligned}$$

où les j sont les composantes d'un tenseur.

Les composantes de la polarisation p_x, p_y, p_z sont telles que

$$p_x = \Sigma m_x,$$

la somme étant étendue à l'unité de volume. C'est-à-dire :

$$\begin{aligned} p_x &= (\Sigma j_{xx})h'_x + (\Sigma j_{xy})h'_y + (\Sigma j_{xz})h'_z \\ &= a_{xx}h'_x + a_{xy}h'_y + a_{zz}h'_z \end{aligned}$$

et deux équations analogues.

Les a sont les composantes d'un nouveau tenseur.

La somme des termes de la diagonale principale de ce tenseur

$$\begin{aligned} a_{xx} + a_{yy} + a_{zz} &= \Sigma j_{xx} + \Sigma j_{yy} + \Sigma j_{zz} \\ &= \mathrm{N}\left(\frac{e^2}{f_1} + \frac{e^2}{f_2} + \frac{e^2}{f_3}\right) \end{aligned}$$

est invariante et indépendante de l'orientation des molécules.

N représente le nombre de molécules par unité de volume.

La quantité

$$(a_{xx} + a_{yy} + a_{zz})\frac{1}{d} \tag{1}$$

doit donc être invariante, si d est la densité.

Le champ h' est la somme du champ h qui existerait en faisant abstraction de la polarisation des molécules voisines et d'un champ auxiliaire dont les composantes sont reliées à celles de la polarisation par une relation tensorielle

$$h_x^p = \eta_{xx}p_x + \eta_{xy}p_y + \eta_{xz}p_z$$

et deux équations analogues.

Supposons que nous prenions comme directions d'axes les directions principales du tenseur η; il reste

$$h_x^p = \eta_{xx}p_x, \qquad h_y^p = \eta_{yy}p_y, \qquad h_z^p = \eta_{zz}p_z.$$

Si ces directions sont les mêmes que celles du tenseur a, nous pourrons écrire, en désignant par k_{xx}, k_{yy}, k_{zz} les susceptibilités principales qui sont définies par la relation tensorielle

$$p_x = k_{xx}h_x,$$

l'équation

$$k_{xx}h_x = a_{xx}(h_x + \eta_{xx}p_x),$$

d'où

$$a_{xx} = \frac{k_{xx}}{1 + \eta_{xx}k_x} = \frac{\mathrm{K}_{xx} - 1}{4\pi + \eta_{xx}(\mathrm{K}_{xx} - 1)}.$$

K_{xx}, K_{yy}, K_{zz} sont les constantes diélectriques principales pour la fréquence de vibration de la lumière employée, ou encore les carrés des indices principaux.

La quantité

$$\left\{\frac{n_x^2 - 1}{4\pi + \eta_{xx}(n_x^2 - 1)} + \frac{n_y^2 - 1}{4\pi + \eta_{yy}(n_y^2 - 1)} + \frac{n_z^2 - 1}{4\pi + \eta_{zz}(n_z^2 - 1)}\right\}\frac{1}{d}$$

doit rester invariante. La formule serait susceptible de vérification expérimentale si nous connaissions les η.

On a admis en général que ces coefficients η diffèrent peu de ce qu'ils sont dans le cas d'une substance isotrope, c'est-à-dire qu'ils possèdent la valeur $\frac{4\pi}{3}$, ce qui conduit à l'invariance de l'expression

$$\left(\frac{n_x^2-1}{n_x^2+2}+\frac{n_y^2-1}{n_y^2+2}+\frac{n_z^2-1}{n_z^2+2}\right)\frac{1}{d}.$$

Relation entre les grandeurs η. — Supposons qu'il existe trois plans principaux pour les η. Plaçons l'origine des axes sur la molécule considérée et orientons-les dans les directions principales. L'action des molécules de coordonnées xyz, placées à une distance r de l'origine, sur la molécule considérée sera donnée par une relation tensorielle

$$h_x^p=\sum\left\{-\frac{1}{r^3}\left(1-\frac{3x^2}{r^2}\right)m_x+\frac{3xy}{r^5}m_y+\frac{3xz}{r^5}m_z\right\}$$

qui, étant donnée l'existence des plans principaux, donnera pour l'ensemble des molécules :

$$h_x^p=m_x\left\{\Sigma-\frac{1}{r^3}\left(1-\frac{3x^2}{r^2}\right)\right\}$$

$$h'_y=m_y\left\{\Sigma-\frac{1}{r^3}\left(1-\frac{3y^2}{}\right)\right\}$$

$$h'_z=m_z\left\{\Sigma-\frac{1}{r^3}\left(1-\frac{3z^2}{r^2}\right)\right\}.$$

D'autre part,

$$p_x=\mathrm{N}m_x,$$

d'où

$$\eta=-\frac{1}{\mathrm{N}}\sum\frac{1}{r^3}\left(1-\frac{3x^2}{r^2}\right).$$

Si la régularité était absolue dans la distribution des molécules aux nœuds du réseau, on aurait évidemment

$$\eta_{xx} + \eta_{yy} + \eta_{zz} = 0.$$

Mais cette régularité absolue ne correspond pas à une régularité physique.

Si on trace une surface de forme quelconque, mais possédant comme plans de symétrie les plans principaux et ayant une dimension suffisante, nous pourrons considérer séparément l'action des molécules extérieures et celle des molécules intérieures à la surface.

$$\eta_{xx} = C_{xx} + \zeta_{xx},$$

ζ_{xx} correspondant à l'action des molécules intérieures, sera considéré comme satisfaisant aux conditions de régularité

$$\zeta_{xx} + \zeta_{yy} + \zeta_{zz} = 0.$$

Relativement à C_{xx} provenant des molécules extérieures à la surface séparatrice, nous supposerons que l'action de ces molécules est la même que si la substance possédait une polarisation uniforme continue; or on sait qu'une telle polarisation uniforme produit le même effet à l'intérieur de la surface qu'une couche fictive d'électricité vraie de densité p_n répandue sur la surface, p_n étant la composante normale de la polarisation. Cette action sera donc

$$p_x \int \frac{\cos(r,x)\cos(n,x)}{r^2} dS + p_y \int \frac{\cos(r,x)\cos(n,y)}{r^2} dS$$
$$+ p_z \int \frac{\cos(r,x)\cos(n,z)}{r^2} dS.$$

Mais, étant donné la symétrie de la surface, nous aurons simplement :

$$C_{xx} = \int \frac{\cos(r,x)\cos(n,x)}{r^2}\,dS.$$

Il vient donc

$$C_{xx} + C_{yy} + C_{zz} = \int \frac{\cos(n,x)\cos(r,x) + \cos(n,y)\cos(r,y) + \cos(u,z)\cos(r,z)}{z^2}\cdot$$

$$= \int \frac{\cos(r,n)}{r^2}\,dS = 4\pi.$$

Si la cavité est sphérique,

$$C_{xx} = C_{yy} = C_{zz} = \frac{4\pi}{3}\cdot$$

Si elle est cylindrique (ellipsoïde infiniment allongé),

$$C_{xx} = 2\pi, \qquad C_{yy} = 2\pi, \qquad C_{zz} = 0.$$

Si elle est aplatie (ellipsoïde infiniment aplati),

$$C_{xx} = 0, \qquad C_{yy} = 0, \qquad C_{z} = 4\pi.$$

Nous aurons donc

$$\eta_{xx} + \eta_{yy} + \eta_{zz} = 4\pi. \tag{2}$$

Application aux biréfringences accidentelles. — Si la substance est isotrope ou cristallisée dans le système cubique, la relation précédente devient

$$\eta_{xx} = \eta_{yy} = \eta_{zz} = \frac{4\pi}{3}$$

Supposons que nous prenions une substance isotrope telle que le verre. Si nous la déformons par traction, par exemple, de manière à produire le phénomène de Kerr, l'isotropie disparaît et les η s'écartent légèrement de leur valeur commune $\frac{4\pi}{3}\cdot$

Nous pourrons poser

$$\eta_{xx} = \frac{4\pi}{3}(1 + \gamma_{xx}),$$

où γ_{xx} est petit.

$$a_{xx} = \frac{n_x^2 - 1}{4\pi + \frac{4\pi}{3}(1 + \gamma_{xx})(n_x^2 - 1)} = \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{n_x^2 - 1}{n_x^2 + 2 + \gamma_{xx}(n_x^2 - 1)},$$

ce qui, étant donnée la petitesse de γ_{xx}, peut s'écrire :

$$a_{xx} = \frac{3}{4\pi}\frac{n_x^2 - 1}{n_x^2 + 2}\left(1 - \gamma_{xx} \cdot \frac{n_x^2 - 1}{n_x^2 + 2}\right).$$

Soient d_a, d_c les densités avant et après déformation, n l'indice de la substance isotrope, n_0 et n_e les indices ordinaire et extraordinaire de la substance étirée. La relation 1 nous donne

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{d_c}\left\{2\frac{n_0^2 - 1}{n_0^2 + 2}\left(1 - \gamma_0\frac{n_0^2 - 1}{n_0^2 + 2}\right) + \frac{n_e^2 - 1}{n_e^2 + 2}\left(1 - \gamma_e\frac{n_e^2 - 1}{n_e^2 + 2}\right)\right\} \\ &\qquad = \frac{3}{d_a} \quad \frac{n^2 \quad 1}{n^2 + 2}. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Appelons ω et ε les variations supposées très petites de l'indice, telles que

$$n_0 = n + \omega$$
$$n_e = n + \varepsilon.$$

La relation (3) peut s'écrire :

$$3\,\frac{d_a - d_c}{d_a d_c} + \frac{1}{d_c} \cdot \frac{6n}{(n^2-1)(n^2+2)}(2\omega+\varepsilon)$$
$$-\frac{1}{d_c}\,\frac{n^2-1}{n^2+2}\left\{2\gamma_0+\gamma_e+\frac{12n}{(n^2-1)(n^2+2)}(2\gamma_0\omega+\gamma_e\varepsilon)\right\}.$$

Le dernier terme disparaît ; en effet, la relation (2) exige

$$2\gamma_0+\gamma_e=0,$$

et, d'autre part,

$$2\gamma_0\omega+\gamma_e\varepsilon$$

est du second ordre.

Il reste donc

$$2\omega+\varepsilon=\frac{d_c-d_a}{d_a}\cdot\frac{(n^2-1)(n^2+2)}{2n}.$$

Si la variation de densité était négligeable, on aurait

$$2\omega+\varepsilon=0,\qquad \frac{\omega}{\varepsilon}=-\frac{1}{2}\cdot \tag{4}$$

Il n'est pas sûr que ce terme puisse être négligé. En effet,

$$\frac{d_c-d_a}{d_a}=-\frac{\omega}{3}p,$$

ω étant le coefficient de compressibilité et p la tension. Pour le verre, $\frac{\omega}{3}$ est de l'ordre de 10^{-6} ; le second terme n'est donc pas négligeable.

Tout ceci est applicable aux biréfringences électrique et magnétique, et donne les mêmes résultats ; le terme $\frac{d_c-d_a}{d_a}$ représente les effets de l'électrostriction de la magnétostriction.

La relation (4) ne doit donc être vérifiée que si les effets de striction électrique ou magnétique peuvent être négligés. Il ne semble pas qu'il en doive être toujours ainsi, mais l'influence de ces effets est calculable. M. Pockels a déjà attiré l'attention sur ce point. L'influence de la longueur d'onde sur le phénomène peut être obtenue de la manière suivante.

Soient a_0 et a_e les valeurs

$$a_{xx} = a_{yy} = a_0$$
$$a_{zz} = a_e$$

correspondant aux directions principales

$$a_0 = \frac{3}{4\pi}\left\{\frac{n_0^2 - 1}{n_0^2 + 2} - \gamma_0\left(\frac{n_0^2 - 1}{n_0^2 + 2}\right)^2\right\}$$
$$a_e = \frac{3}{4\pi}\left\{\frac{n_e^2 - 1}{n_e^2 + 2} - \gamma_e\left(\frac{n_e^2 - 1}{n_e^2 + 2}\right)^2\right\}$$

Si on remplace γ_e par $-2\gamma_0$, comme l'exige la relation (2), en retranchant les deux expressions précédentes, il vient :

$$\omega - \varepsilon = \gamma_0 \cdot \frac{(n^2 - 1)^2}{2n} + \frac{4\pi}{3}(a_0 - a_e)\frac{(n^2 + 2)^2}{6n}.$$

La biréfringence totale est donc la somme de deux termes : le premier γ_0, que nous appellerons terme de structure, est indépendant de la longueur d'onde et ne dépend que du réseau ; le deuxième, qui contient $(a_0 - a_e)$ en facteur, provient de l'anisotropie optique de la molécule elle-même. MM. Cotton et Mouton, dans leur théorie de la biréfringence magnétique, admettent que ce terme est nul. La molécule, en s'orientant dans le champ, produit autour d'elle un commencement de structure qui rend γ_0 différent de zéro. La biréfringence, dans cette théorie, provient donc seulement de l'anisotropie du champ mécanique d'action de la molécule, mais non de l'anisotropie optique de la molécule elle-même.

Si on néglige le second terme, on voit que l'expression

$$(\omega - \varepsilon) \cdot \frac{n}{(n^2 - 1)^2}$$

doit être indépendante de la longueur d'onde.

Les expériences de MM. Cotton et Mouton montrent que cette dernière relation est vérifiée par l'expérience.

Cependant, il semble bien que si l'on s'approche des périodes propres de vibration de la molécule elle-même, c'est-à-dire au voisinage de l'absorption, le deuxième terme doit devenir prépondérant.

Il serait intéressant de voir si dans le cas des biréfringences produites mécaniquement, il en est de même, ce qui est probable, c'est-à-dire si

$$(\omega - \varepsilon) \frac{n}{(n^2 - 1)^2}$$

est indépendant de la longueur d'onde et si cette relation se maintient quand on s'approche des courtes longueurs d'onde pour lesquelles le verre est absorbant.

Cas des cristaux. — Dans le cas des cristaux, nous ne savons rien sur les grandeurs η_{xx}, η_{yy}, η_{zz}. Les vérifications qui ont été tentées ont consisté à poser

$$\eta_{xx} = \eta_{yy} = \eta_{zz} = \frac{4}{3}\pi. \qquad (5)$$

Comme dans un corps isotrope, on admettait que les η diffèrent peu de cette valeur. Je crois que cette hypothèse est trop simplificatrice.

Prenons par exemple le cas du quartz. On possède pour les indices de ce corps à l'état cristallisé et à l'état amorphe, ainsi que sur sa densité dans ces deux états, des évaluations dont la précision, sans être parfaite, est cependant suffisante pour montrer que l'écart des η d'avec la valeur (5) doit être assez grand.

J'ai adopté pour densités à l'état amorphe et cristallisé les valeurs $d_a = 2{,}504$, $d_c = 2{,}6506$.

Si on admet pour les trois η la valeur commune $\frac{4\pi}{3}$, on doit avoir

$$\left\{ 2\frac{n_0^2 - 1}{n_0^2 + 2} + \frac{n_e^2 - 1}{n_e^2 + 2} \right\} \frac{3}{d_c} = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \cdot \frac{9}{d_a}.$$

Les calculs m'ont donné le résultat suivant :

LONGUEUR D'ONDE.	INDICES.	$\left\{ 2\frac{n_0^2 - 1}{n_0^2 + 2} + \frac{n_e^2 - 1}{n_e^2 + 2} \right\} \frac{3}{d_c}$.	$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \cdot \frac{9}{d_a}$	DIFFÉRENCE.
$0^\mu{,}1854$	$n_0 = 1{,}67592$ $n_e = 1{,}69007$ $n = 1{,}57464$	1,284	1,349	— 0,065
$0^\mu{,}1935$	$n_0 = 1{,}66005$ $n_e = 1{,}67349$ $n = 1{,}56071$	1,260	1,322	— 0,062
$0^\mu{,}5086$	$n_0 = 1{,}54822$ $n_e = 1{,}55746$ $n = 1{,}46190$	1,083	1,120	— 0,037
$0^\mu{,}5893$	$n_0 = 1{,}54424$ $n_e = 1{,}55335$ $n = 1{,}45843$	1,077	1,115	— 0,038

L'accord n'est certainement pas satisfaisant, et les écarts ne peuvent être complètement attribués à des erreurs d'expérience.

Il peut être intéressant de voir ce que l'on aurait en faisant varier η_e entre 0 et 4π.

Pour chaque valeur de η_e, η_o a une valeur déterminée par l'équation

$$\eta_e + 2\eta_0 = 4\pi.$$

Prenons les cas extrêmes. Si le cas $\eta_e = 4\pi$, $\eta_o = 0$ était réalisé, en substituant ces valeurs dans l'équation (1) on voit que l'on devrait avoir

$$\left\{ 2n_0^2 - \frac{1}{n_e^2} - 1 \right\} \frac{1}{d_c} = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \cdot \frac{9}{d_a}.$$

Si, au contraire, on se place dans le cas

$$\eta_e = 0 \qquad \eta_0 = 2\pi,$$

on doit avoir

$$\left\{ 3 - \frac{8}{n_0^2 + 1} + n_e^2 \right\} \frac{1}{d_c} = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \cdot \frac{9}{d_a}.$$

LONGUEUR D'ONDE.	$\left\{ 2n_0^2 - \frac{1}{n_0^2} - 1 \right\} \frac{1}{d_c}$	$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \cdot \frac{9}{d_a}$	DIFFÉRENCE POUR $\eta_e = 4\pi$
$0^{\mu},1854$	1,609	1,349	+ 0,260
$0^{\mu},1935$	1,567	1,322	+ 0,245
$0^{\mu},5086$	1,276	1,120	+ 0,156
$0^{\mu},5893$	1,265	1,115	+ 0,150
—	$\left\{ 3 - \frac{8}{n_0^2 + 1} + n_e^2 \right\} \frac{1}{d_c}$	—	DIFFÉRENCE POUR $\eta_e = 0$
$0^{\mu},1854$	1,417	1,349	+ 0,068
$0^{\mu},1935$	1,385	1,322	+ 0,063
$0^{\mu},5086$	1,158	1,120	+ 0,038
$0^{\mu},5893$	1,150	1,115	+ 0,035

La différence change donc de sens quand η_e croît de 0 à $\frac{4\pi}{3}$, et encore une fois lorsque η_e croît de $\frac{4\pi}{3}$ à 0 ; il y a donc deux valeurs de η qui annuleront la différence. Ceci était évident, car si on substitue η_e dans l'équation d'invariance, et si on remplace $2\eta_o$ par $4\pi - \eta_e$, on obtient une équation qui est du second degré. Une seule des racines doit avoir un sens physique. Si donc on résout l'équation du second degré obtenue, on doit avoir deux racines dont on devra retenir seulement celle qui est indépendante de la longueur d'onde. Ce critérium est impossible à appliquer parce que la précision des mesures est insuffisante. L'inspection des nombres précédents montre que l'hypothèse $\eta_e = 0$, $\eta_o = 2\pi$ ne donne pas de discordance plus grande que $\eta_o = \eta_e = \frac{4\pi}{3}$. Pour essayer de préciser nos idées, j'ai entrepris un calcul direct des η dans le cas d'un réseau hexagonal, dont je donnerai prochainement les résultats. Quoi qu'il en soit, ce que nous venons de dire montre qu'il existe une valeur η_e comprise entre 0 et 4π annulant la différence. Il n'y a donc pas contradiction avec l'équation (2).

L'invariance optique dans le cas du passage du spath à l'aragonite a été étudiée par M. Brillouin.

J'ai fait les mêmes calculs que précédemment, en adoptant les valeurs suivantes (raie D) :

	n_x	n_y	n_z	Densité
Spath	1,6585	1,6585	1,4863	$d_s = 2,72$
Aragonite . . .	1,6859	1,6816	1,5301	$d_a = 2,93.$

L'hypothèse $\eta_{xx} = \eta_{yy} = \eta_{zz} = \frac{4\pi}{3}$ pour les deux cristaux conduit aux nombres suivants :

Spath.	Aragonite.	Différence.
$\left\{\sum \frac{n_x^2 - 1}{n_x^2 + 2}\right\} \frac{1}{d_s}$	$\left\{\sum \frac{n_x^2 - 1}{n_x^2 + 2}\right\} \frac{1}{d_a}$	
0,3765	0,3644	+ 0,0121

J'ai, comme précédemment, essayé des hypothèses

$$\eta_{xx} = 4\pi, \qquad \eta_{yy} = 0, \qquad \eta_{yy} = 0,$$

ou

$$\eta_{xx} = 2\pi, \qquad \eta_{yy} = 2\pi, \qquad \eta_{zz} = 0,$$

et celles qui s'en déduisent par permutation. Elles conduisent à des différences considérables, sauf toutefois l'hypothèse

$$\eta_{zz} = 4\pi, \qquad \eta_{xx} = 0, \qquad \eta_{yy} = 0,$$

appliquée aux deux cristaux :

Spath.	Aragonite.	Différence.
$\left\{ -\frac{1}{n_z^2} + n_x^2 + n_y^2 \right\} \frac{1}{d_s}$	$\left\{ -\frac{1}{n_z^2} + n_x^2 + n_y^2 \right\} \frac{1}{d_n}$	
1,491	1,457	+ 0,034

et l'hypothèse

$$\eta_{zz} = 0, \qquad \eta_{xx} = \eta_{yy} = 2\pi :$$

Spath.	Aragonite.	Différence.
$\left\{ 3 \quad 4\left(\frac{1}{n_x^2} + \frac{1}{n_y^2}\right) + n_z^2 \right\} \frac{1}{d_s}$	$\left\{ 3 - 4\left(\frac{1}{n_x^2} + \frac{1}{n_y^2}\right) \right\} \frac{1}{d_a}$	
0,846	0,860	— 0,014

Ici encore la nécessité se fait sentir de calculer à priori les valeurs de η pour un réseau rhomboédrique et orthorhombique; mais dans ces deux cas, l'hypothèse que les η sont voisins de $\frac{4\pi}{3}$ est inutile. Par contre, il n'y a rien dans les faits qui soit en contradiction avec l'équation (2).

Chimie physique. — **Essai sur l'analyse piézométrique** (*)

(Deuxième mémoire)

par Jean TIMMERMANS (**).

ÉTUDE DES SYSTÈMES DONT LA TEMPÉRATURE DE CONGÉLATION PEUT PASSER PAR UN MAXIMUM.

1. — *Substances pures.*

Dans mon premier mémoire, j'ai fait l'étude de substances se comportant, lors de la congélation sous pression élevée, le plus simplement possible : l'élévation de la pression élevait ou abaissait régulièrement la température de fusion (fig. 15, courbes A et B). Il est intéressant d'examiner maintenant la

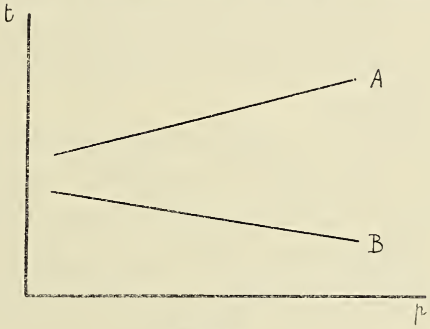


Fig. 15.

(*) Premier mémoire : *Bull. Acad. roy. de Belgique* (Classe des sciences), 1913, pp. 810-830.

(**) Présenté par MM. L. Crismer et J.-E. Verschaffelt.

transformation des diagrammes pour le cas, prévu par la théorie de Tammann, où, par compression, la température de fusion d'une substance pure, après s'être élevée jusqu'à un maximum, se remettrait à baisser sous des pressions encore plus fortes (fig. 16); à des pressions inférieures à celle de la température maxima de cristallisation, la congélation se fait alors avec diminution de volume; pour des pressions supérieures, la congélation entraîne au contraire une augmentation de volume; à la température maxima elle-même, le liquide et les cristaux ont le même volume spécifique.

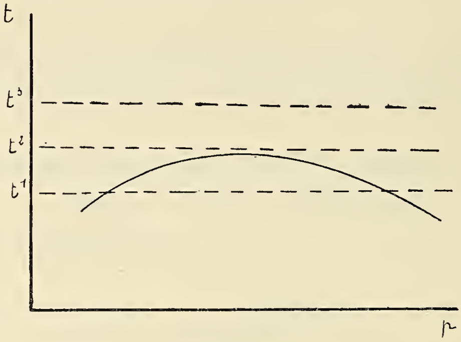


Fig. 16.

La courbe de chute de pression d'un tel corps, déterminée à la température t_1, inférieure au maximum, aurait l'allure indiquée dans la figure 17, étant formée de *cinq* sections; à partir d'une pression suffisamment élevée pour que la substance soit liquide à la température choisie pour l'expérience, on aurait successivement la simple expansion du liquide comprimé (section AB), puis sa congélation (palier BC) et l'expansion des cristaux formés (section CD), ensuite leur fusion (palier DE) et enfin de nouveau l'expansion du liquide (section EF). Ce serait là un exemple typique de « cristallisation rétrograde » (*), dont nous rencontrerons souvent les analogues dans la suite.

(*) Sur les phénomènes rétrogrades, voir Bakhuis-Roozeboom, *Heterogene Gleichgewichte,* 1904, t. II, 1er fasc., p. 347.

A des températures plus élevées, la section CD se raccourcit, tandis que les paliers BC et DE se rapprochent de plus en plus, tout en diminuant de durée, à cause de la différence de plus en plus faible des volumes spécifiques du liquide et des cristaux. A la température maximum de congélation t^2, la cristallisation ne s'amorce plus qu'un instant, pour cesser dès que la pression s'est abaissée davantage : sur la courbe de chute de pression, la section CD a disparu complètement, les paliers BC et DE coïncident, mais sont réduits à un simple point d'inflexion I. Enfin à toute température t^3, supérieure à t^2, toute trace de congélation a disparu et il ne reste plus qu'une courbe AF continue, correspondant à l'expansion progressive du liquide.

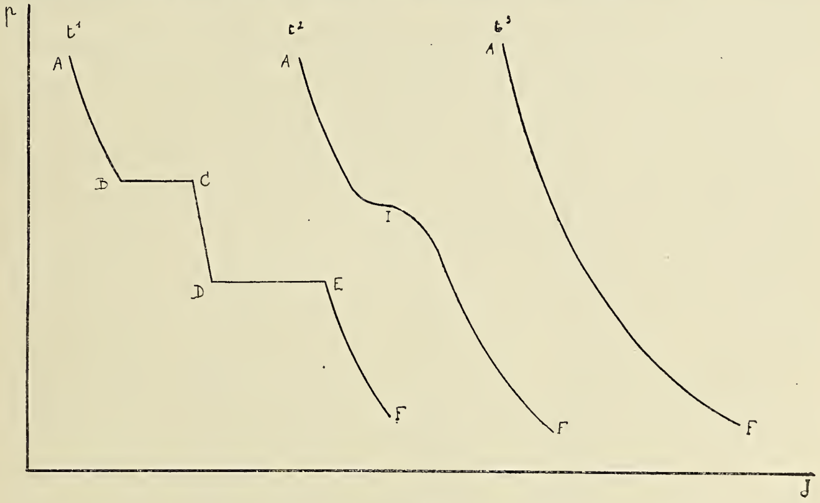


FIG. 17.

Il n'est pas jusqu'aujourd'hui de substance pour laquelle on ait pu atteindre la température maximum de congélation (*); la réalisation du schéma précédent reste donc hypothétique, mais nous allons voir que des phénomènes connexes sont fréquents pour les mélanges binaires.

(*) Voir P.-W. BRIDGMANN, *Proc. Nat. Acad. Sc.*, 1915, t. I, p. 513.

2. — *Mélanges binaires ; cas des solutions idéales.*

Considérons un mélange binaire dont les composants, pris à l'état pur, réaliseraient le type décrit dans le paragraphe précédent; supposons également que le mélange des composants fondus se fasse sans changement appréciable du volume total, chacun des composants conservant le volume qu'il aurait à l'état pur, et étudions, au moyen de la figure 18, la cristallisation de la solution idéale ainsi formée.

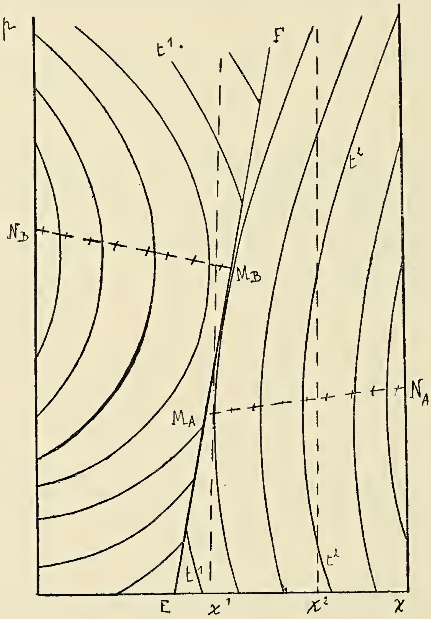


Fig 18.

Dans le diagramme *px* (fig. 18) sont représentées une série de courbes remarquables du solide *pxt*, projetées sur le plan de base. En N_A est représenté le point de fusion maximum du composant A pur, correspondant à une pression p_{N_A}. Par addition à ce composant de quantités croissantes du composant B, on obtient une série de solutions qui, par refroidissement, laissent déposer des cristaux du corps A à l'état pur; la température du début de congélation de chacune de ces solutions varie avec la pression; elle s'élève d'abord par compression, passe par un maximum, pour s'abaisser ensuite de nouveau sous des pressions suffisantes; l'ensemble de ces courbes de congélation constitue la surface de congélation du composant A. La ligne $N_A — M_A$ représente l'ensemble des températures maxima de congélation du composant A pour les solutions de diverses concentrations; cette ligne s'incline faiblement vers les basses pressions, car dans les solutions, la cristallisation de A entraîne une plus faible variation de volume que pour le corps pur; en effet, la congélation s'opère à température plus basse en solution que pour le corps pur, et le liquide étant plus dilatable que les cristaux, leurs volumes spécifiques tendent à se rapprocher par refroidissement; par conséquent, la pression sous laquelle les deux volumes deviennent égaux doit être un peu plus basse pour les solutions que pour les composants purs, ce qui entraîne l'inclinaison de la ligne $N_A — M_A$, lieu géométrique des pressions où l'égalité de volume est réalisée à la température maxima de cristallisation de chacune des solutions. A l'avenir, j'appellerai de pareilles lignes, *lignes neutres,* parce que le changement de volume lors de la cristallisation y passe d'une valeur positive à une valeur négative.

Les diverses courbes concentriques qui ont le point p_{N_A} pour centre sont des sections isothermes de la surface de congélation du composant A, sections faites à température d'autant plus basse que le diamètre des courbes est plus grand. Autour du point p_{N_B} rayonne de même l'ensemble des courbes isothermes formant la surface de congélation du composant B. Enfin la ligne EF est la ligne eutectique suivant laquelle les deux surfaces de congélation se coupent; on sait que cette ligne se rapproche de plus en plus du composant A dont, par hypothèse, les variations de température de congélation par compression sont plus lentes aux basses pressions que les variations correspondantes du composant B, encore plus éloigné que A de sa température maximum de congélation; enfin cette courbe eutectique s'élève d'abord par compression jusque sous des pressions supérieures à p_{M_A}, passe par une température maximum entre p_{M_A} et p_{M_B}, pour redescendre ensuite vers des températures de plus en plus basses (*).

3. — *Tracé des courbes de chute de pression.*

Ce tracé se déduit facilement du diagramme décrit dans le paragraphe précédent. Soit d'abord un système de concentration x_1 (fig. 18), étudié à une température t^1, inférieure à la température maximum de fusion de l'eutectique; la courbe de chute de pression aura l'allure indiquée par la figure 19, courbe I.

Le mélange est complètement liquide sous une pression suffisamment élevée pA; quand la pression baisse, il se dilate (section AB), puis la cristallisation du composant B commence (point B) et continue le long de l'isotherme correspondant à la section BC de la courbe de chute de pression, jusqu'à ce que, par appauvrissement en composant B, la solution atteigne la concentration eutectique; on a ensuite le palier de cristallisation eutectique (palier CD); la masse complètement solide continue à se dilater suivant la section DE; en E on coupe de nouveau la ligne eutectique et l'eutectique fond complètement (palier EF); ensuite l'excès du composant A cristallisé fond à son tour (section FG), et enfin le mélange complètement liquéfié continue à se dilater (section GH).

(*) Sur les variations de °/₀ et de t le long de la ligne eutectique, voir Bakhuis-Roozeboom, *loc. cit.*, pp. 418 et 423 à 425.

Répétons la même expérience pour une concentration x_2 et à une température t_2 intermédiaire entre la température maximum de congélation de l'eutectique et la température maximum de congélation du composant A; dans ces conditions, on n'aura jamais de cristallisation complète de la solution. Au moment où la ligne x_2 coupe l'isotherme considérée, la congélation commence ; ensuite, par une nouvelle pression, la masse de cristaux augmente, passe par un maximum au moment où l'isotherme coupe la ligne neutre et se remet ensuite à diminuer; quand la droite x_2 recoupe l'isotherme choisie, la liquéfaction est de nouveau complète. On retrouve ces différents stades sur la courbe de chute de pression (fig. 19, courbe II), la section BNG de la courbe correspondant à la congélation partielle de la liqueur; commencée en B, cette cristallisation passe par un maximum en N, où l'on observe un point d'inflexion de la courbe de chute de pression, et la liquéfaction est complète de nouveau en G.

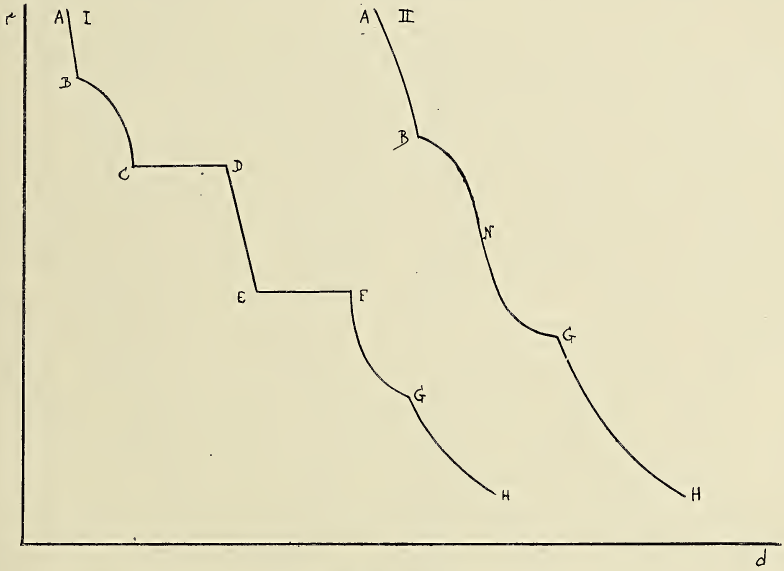


Fig. 19.

Nous assistons ici à un autre cas typique de « cristallisation rétrograde »; il correspond à un point d'inflexion de la courbe de chute de pression. Aucun mélange réalisant ce type dans tous ses détails n'a été étudié jusqu'ici.

4. — *Cas des solutions non idéales se formant avec diminution de volume.*

D'une manière générale, cette condition supplémentaire ne changera rien au tracé des diagrammes précédents; seules les lignes neutres seront un peu plus inclinées, car la diminution de volume qui se produit lors du mélange des deux composants fondus aura pour effet, en ce qui concerne les solutions concentrées, de diminuer encore davantage l'augmentation de volume

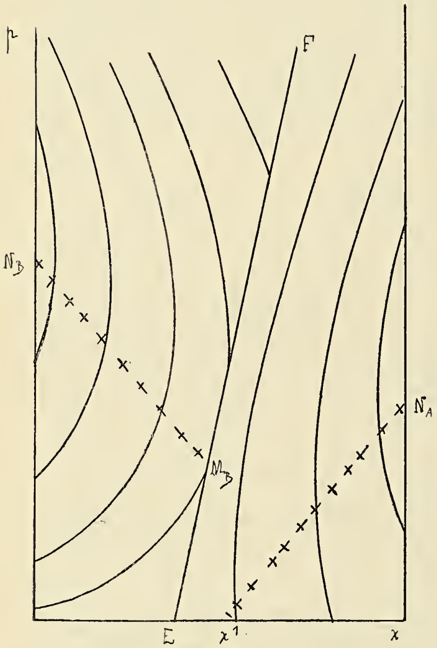


Fig. 20.

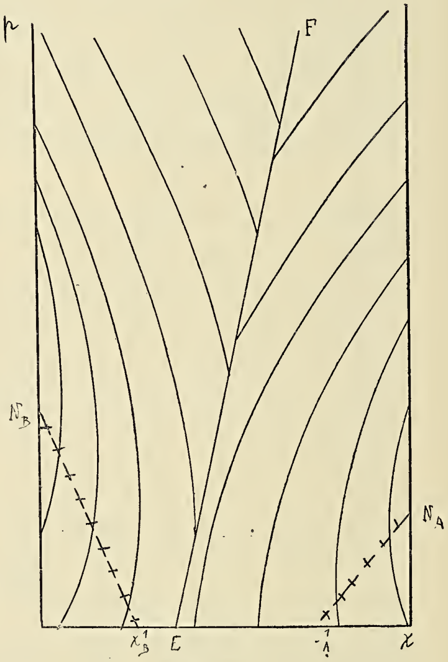


Fig. 21.

résultant de la fusion d'un des composants; dans ces conditions, on atteindra la ligne neutre à des pressions encore plus basses que précédemment et, de son côté, la température maximum de fusion de l'eutectique sera aussi réalisée pour des pressions relativement faibles.

De ce diagramme fondamental en dérivent une série d'autres très souvent rencontrés en pratique :

a) La ligne neutre de l'un des composants (fig. 20) ou des deux (fig. 21) peut ne pas encore avoir atteint la ligne eutectique sous la pression ordinaire. Cela signifie que dans certaines limites de concentration, la contraction due au mélange des composants fondus l'emporte sur la dilatation provenant de la fusion elle-même.

Il résulte de là que des mélanges plus concentrés en composant A que le mélange x_1 cristalliseront avec diminution de volume, c'est-à-dire que par compression la température s'élèvera, pour passer par un maximum et s'abaisser ensuite; la quantité de cristaux augmentera donc, pour passer par un maximum et diminuer ensuite; tandis que pour des mélanges moins riches en A que x_1, la congélation de A entraînera une *augmentation* de volume et que la température de cristallisation s'abaissera directement par compression ; enfin, pour le mélange x_1 lui-même, la variation de volume lors de la dissolution des cristaux de A dans la solution étant nulle, la pression sera d'abord sans influence sur la température de cristallisation; mais on atteindra bientôt à pression croissante le domaine des solutions qui cristallisent avec augmentation de volume.

b) Ensuite, la ligne neutre du composant A peut disparaître tout entière à des pressions inférieures à la normale, et subsister, au contraire, complètement (fig. 22) ou en partie (fig. 23) pour le composant B. C'est qu'alors le composant A cristallise avec dilatation à partir de toutes ses solutions, tandis que le composant B, qui fond avec augmentation de volume quand il est pur, peut changer d'allure à une pression suffisante et même sous la pression normale, mais alors seulement pour des solutions relativement riches en composant A et proches de la concentration eutectique.

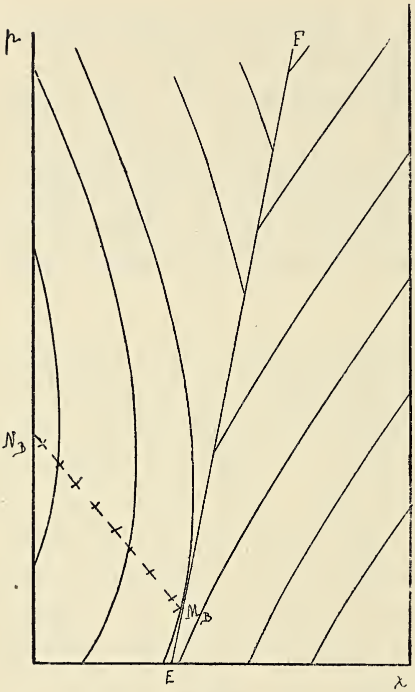


Fig. 22.

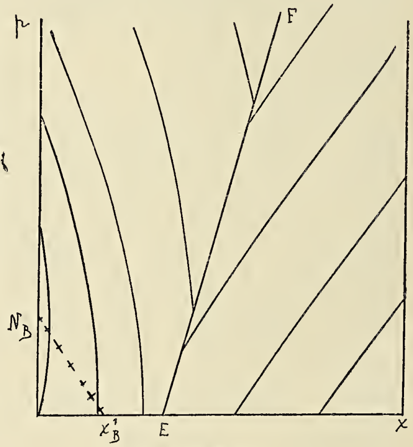


Fig. 23.

Les recherches dans ce domaine sont encore si rares que l'on ne connaît aucun mélange faisant partie de la catégorie *a* ; mais la catégorie *b* est bien représentée au point de vue expérimental. Le cas de la figure 23 est réalisé par les solutions de beaucoup de sels minéraux dans l'eau : la glace cristallise avec augmentation de volume, le sel pur avec diminution de volume ; les solutions concentrées en sel cristallisent avec augmentation de volume, ainsi que l'eutectique. Quant à la figure 22, elle est sans doute réalisée par les solutions aqueuses de sels ammoniacaux et de chlorhydrate d'hydroxylamine; en effet, l'augmentation de volume que subissent ces sels par la fusion, quand ils sont purs, est tellement forte qu'elle l'emporte sans doute jusqu'à l'eutectique sur la contraction assez faible due au mélange du sel fondu avec l'eau liquide (*).

c) Enfin, les lignes neutres des deux composants peuvent se trouver entièrement dans le domaine des pressions négatives; mais alors nous sommes ramenés au cas simple d'un mélange de corps qui fondent tous deux avec diminution de volume, cas qui a déjà été étudié dans mon premier mémoire.

On voit que tous les types que je viens d'envisager, si différents en apparence, ne sont que des modalités d'un même diagramme fondamental, pourvu que l'on accepte l'hypothèse de Tammann sur la forme des courbes de congélation des substances pures sous haute pression. Dans certaines modifications de ce type fondamental, appliqué aux mélanges binaires, on constate aussi que la température maximum de congélation est ramenée à la pression ordinaire et correspond à des phénomènes bien connus (fig. 20, 21 et 23), alors qu'elle n'a encore jamais pu être atteinte dans l'étude des substances pures.

5. — *Mélanges qui cristallisent en donnant des solutions solides.*

Supposons enfin que les deux composants forment une série ininterrompue de solutions solides, ne présentant pas de minimum ni de maximum de température de congélation *à pression constante* (dans le diagramme *tx*), et que chacun des composants isolés possède une température maximum de congélation *à*

(*) Sur le volume spécifique des solutions aqueuses de sels ammoniacaux, voir Bakhuis-Roozeboom, *loc. cit.*, pp. 400-404.

pression variable (dans le diagramme *px*), plus élevée pour le composant A que pour le composant *b*. Le diagramme d'état en *px*, correspondant à la figure 18 pour le cas où il n'y a pas de solutions solides, est facile à construire (fig. 24). En p_{N_A} et p_{N_B}, nous avons les pressions correspondant aux températures maxima de congélation des composants purs; pour les cristaux mixtes, on aura une série de températures maxima de cristallisation et de fusion, à des pressions intermédiaires entre p_{N_A} et p_{N_B}; la ligne neutre joindra donc directement ces points extrêmes. J'ai dessiné en outre quelques sections isothermes des surfaces de fusion et de cristallisation des cristaux mixtes; à la température t_a, inférieure aux températures maxima de congélation des

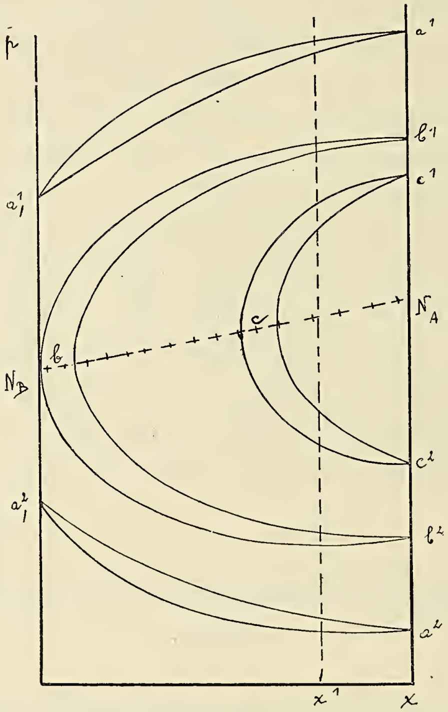


Fig. 24.

deux composants, on obtient deux paires de courbes tout à fait séparées (courbes $a_1a'_1$ et $a_2a'_2$); à la température maximum de fusion du composant B, plus fusible, t_b, ces deux paires de courbes se rejoignent en p_{N_B}, et y sont tangentes à l'axe des ordonnées (courbes bb_1b_2); à une température t_c, intermédiaire entre les températures maxima des deux composants, les courbes de cristallisation et de fusion sont continues, avec point d'inflexion là où elles coupent la ligne neutre (courbes c_1cc_2) en c' et ensuite retour vers l'axe des A (*). Avec ces données, le tracé des courbes de chute de pression est facile à se figurer; la seule particularité remarquable qu'elles présentent sera, lors de l'étude d'une solution de concentration x_1, prise à une température un peu inférieure au maximum de congélation de ce système : cette solution ne cristallisera jamais que partiellement et, de même que dans le cas de la solution x_2 du diagramme 18, sa courbe de chute de pression présentera un point d'inflexion au moment du passage de la ligne neutre.

Je crois inutile d'insister sur les complications qui pourront résulter de l'existence de lacunes dans les séries de solutions solides, et de combinaisons additionnelles entre composants, ce qui ne nous apprendrait rien de bien nouveau.

Remarquons enfin que si le mélange des composants fondus se faisait, non plus avec contraction comme je l'ai prévu dans le paragraphe 4, mais avec dilatation, cela n'aurait pas non plus une bien grande influence sur l'allure des diagrammes; car la dilatation observable dans ces circonstances reste toujours très faible; elle joue, au contraire, un rôle important dans les phénomènes que j'étudierai dans mon troisième mémoire.

(*) R. Les deux courbes de congélation et de fusion des cristaux mixtes ne sont pas tangentes en c, parce que cette température est bien un maximum dans le diagramme px, mais pas dans le diagramme tx. (Sur la loi de Gibbs-Konovalow, dont il est question ici, voir Bakhuis-Roozeboom, *loc. cit.*, p. 35.)

Conclusion.

Dans ce second mémoire concernant l'analyse piézométrique, j'ai étudié les modifications que subissent les diagrammes *px* et les courbes de chute de pression, quand les composants purs réalisent l'hypothèse de Tammann, c'est-à-dire que par compression leur température de cristallisation s'élève, passe par un maximum, pour finir par s'abaisser de nouveau aux pressions très élevées.

Essai sur l'analyse piézométrique

(*Troisième mémoire*)

par Jean TIMMERMANS.

La cristallisation sous pression élevée dans ses rapports avec la solubilité mutuelle des liquides.

1. — *Les volumes de congélation : fusion et solution.*

Notre étude sera facilitée par quelques considérations préliminaires sur les variations de volume qu'entraînent la fusion et la dissolution. La grandeur qui décide du sens dans lequel la compression fait varier la température de congélation d'une solution est ce que j'appellerai, par comparaison avec les grandeurs thermiques correspondantes, le « dernier volume de congélation » ou le « volume différentiel de congélation », soit V_c (*) ; c'est la variation de volume qui se produit quand une unité de poids d'un composant solide fond et se mélange à une très grande masse de la solution saturée avec laquelle ce solide est en équilibre ; dans le cas qui nous occupe, cette fusion sera obtenue par variation de la pression à température constante.

Quand V_c est positif, c'est-à-dire lorsque le volume de la dissolution finale est plus grand que celui du solide et de la solution saturée qui l'ont constituée, la compression élève la température de solidification commençante du système ;

(*) Sur les divers volumes de dissolution, voir Bakhuis-Roozeboom, *loc. cit.*, pp. 405-406. Sur les chaleurs de dissolution qui leur correspondent, voir V. Rothmund, *Löslichkeit*, 1907, p. 47.

au contraire, avec V_c négatif, la température de congélation (*) s'abaisse. Or, V_c est la somme des deux volumes V_f et V_s :

$$V_c = V_f + V_s.$$

V_f est le changement de volume qui résulte de la simple fusion d'un gramme du solide examiné (dans les conditions de t et de p choisies pour l'expérience) ; V_s est la variation de volume qui se produit par mélange d'un gramme du corps *fondu* avec une grande masse de la solution saturée avec laquelle il était en équilibre à l'état solide. Ces deux quantités peuvent être toutes deux positives ou négatives, et le signe de V_c est le résultat de leur addition algébrique (en signe et en grandeur).

Remarquons que, à p et t déterminées, le volume de fusion V_f est constant pour la substance étudiée, quelle que soit la concentration de la solution avec laquelle elle est en équilibre ; V_f positif ou négatif reste toujours assez faible. Quant au volume de solution V_s, c'est précisément la quantité que l'on étudie quand on examine la variation de volume qu'éprouve un système de deux liquides, d'abord simplement superposés et qu'on mélange intimement. C'est V_s qui, dans le cas de deux liquides dont la solubilité mutuelle est limitée, décide de l'influence de la pression sur la solubilité réciproque : si V_s est positif, le mélange des liquides se fait avec augmentation de volume, la solubilité mutuelle diminue par compression et la température critique de dissolution du système s'élève (T. C. S. *supérieure*) ; avec V_s négatif, au contraire, le mélange est favorisé par la compression et la T. C. S. supérieure s'abaisse.

Il me reste à rappeler que V_s négatif peut avoir une série de valeurs assez différentes, mais que V_s positif est toujours très petit : jamais la dilatation résultant du mélange de deux liquides n'est élevée (**).

(*) Dans la suite de ce mémoire, j'écris partout température de congélation, pour température de solidification *commençante*.

(**) Sur les rapports de V_s avec les variations de T.C.S., voir J.-P. Kuenen, *Verdampfung und Verflüssigung von Gemischen*, 1906, p. 156.

2. — *La ligne de dissolution et la ligne de congélation.*

La méthode la plus simple pour étudier les variations de solubilité mutuelle de deux liquides sous pression variable, est de déterminer leur T. C. S. (*) sous diverses pressions ; le lieu de toutes les T. C. S., porté sur un diagramme *pt*, forme ce que l'on appelle la « ligne critique de dissolution » ou tout simplement la « ligne de dissolution ». La loi des phases nous enseigne qu'à chaque *p* correspondent une T. C. S. et une concentration critique distinctes ; la ligne critique se rapporte donc à une série de systèmes de concentrations continuellement variables ; mais en pratique, il est utile de savoir que la variation de la concentration critique avec la pression est très lente (**).

Chacune des solutions de concentration critique a un point de congélation sous la même pression que la pression critique, mais à une température qui généralement diffère de la température critique ; le lieu des températures de congélation sous diverses pressions des solutions de concentration critique est ce que j'appellerai la « ligne de congélation » ; cette ligne se rapporte donc aussi à des solutions de pourcentage variable, mais égal pour chaque pression à la concentration de la solution qui atteint son point critique de dissolution sous la même pression.

Portons sur un même diagramme *pt* les deux lignes de dissolution et de congélation ; l'examen de la position réciproque

---

(*) T. C. S. : température critique de dissolution.

(**) Sur les variations de la concentration critique avec la pression, voir J. Timmermans, *Zittingsversl. Kon. Akad. v. Wetensch. Amsterdam,* 1910, pp. 569-571, et thèse, Bruxelles, 1911, pp. 65-69.

de ces deux lignes permettra de se rendre facilement compte de la manière dont la solution se comportera lors de la congélation, si elle sera homogène à cette température, etc.

Si ces deux lignes se coupent, c'est que la ligne critique de dissolution, jusque-là directement observable, disparaîtra sous la courbe de fusion pour le reste du diagramme ; ce point de rencontre constitue donc ce que Büchner appelle un point critique terminal (*).

Pour faciliter l'énumération des cas possibles, rappelons que :

a) Par compression, la température de congélation d'une solution peut s'élever ou s'abaisser, ou varier même successivement dans ces deux sens, en passant par un maximum de température là où l'on rencontre la ligne neutre (**). Ces variations de la température de congélation sont d'ailleurs toujours assez faibles, ne dépassant pas quelques centièmes de degré par atmosphère.

b) La T. C. S. peut être supérieure ou inférieure. Une T. C. S. supérieure peut s'élever par compression, mais alors l'élévation est toujours très lente ; au contraire, l'abaissement d'une T. C. S. supérieure peut prendre toutes les valeurs de 0 à l'infini.

Une T. C. S inférieure ne peut que s'élever plus ou moins vite par compression ; un abaissement par compression de la T. C. S. inférieure n'a jamais été observé, et la théorie des mélanges de Van der Waals permet d'en exclure la possibilité (***).

Cet ensemble de constatations est d'accord avec ce que nous avons dit plus haut des valeurs possibles de V_s.

(*) Sur les points critiques terminaux, voir C.-H. Büchner, *Zeitschrift für physik. Chemie*, 1906, t. LVI, p. 270.

(**) Sur la ligne neutre, voir mon second mémoire, paragraphe 2.

(***) Sur les valeurs possibles de $\frac{\partial t}{\partial p}$, voir ma thèse, p. 43, et Van der Waals-Kohnstamm, *Lehrbuch der Thermodynamik*, 1912, 2e partie, 4e division, *passim*.

3. — *Une température critique de dissolution inférieure.*

On se rappelle qu'une température critique de dissolution inférieure s'élève toujours par compression et que V_s est donc toujours négatif.

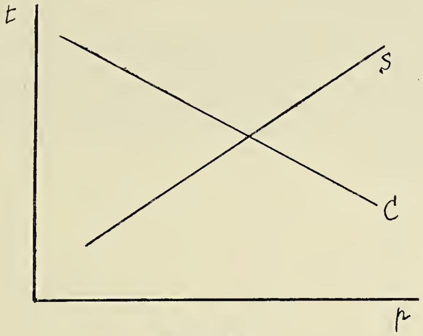


Fig. 25.

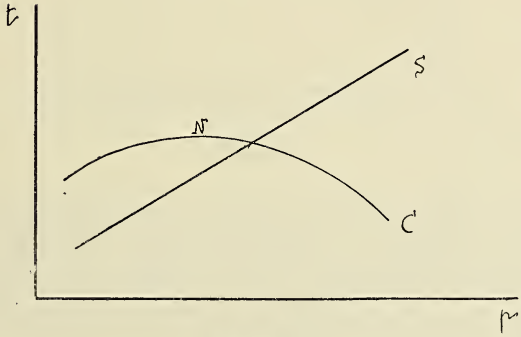


Fig. 26.

a) $-V_f - V_s = -V_c$; si V_f est négatif, V_c l'est également; la ligne de congélation s'abaisse, la ligne de dissolution s'élève; par compression, le système tend à devenir homogène à la température de congélation (fig. 25).

b) V_f est positif; $+V_f - V_s = \pm V_c$.

Si $V_f < V_s$, le signe de V_s l'emporte et la ligne de congélation s'abaissant tend à passer sous la ligne de dissolution (fig. 25).

R. On a donc une solution qui, entre certaines limites, *cristallise* avec augmentation de volume, tandis que les cristaux de ce composant pur *fondent* avec augmentation de volume. (Voir 2e mémoire, § 4.)

Si $V_f = V_s$, V_c est nul; la ligne de congélation coupe la ligne neutre (fig. 26, point N).

Si $V_f > V_s$, le signe de V_f l'emporte et V_c est positif; la ligne de congélation et la ligne de dissolution s'élèvent toutes deux, et la première pourra même éventuellement dépasser la seconde, si $V_c > V_s$ (fig. 27).

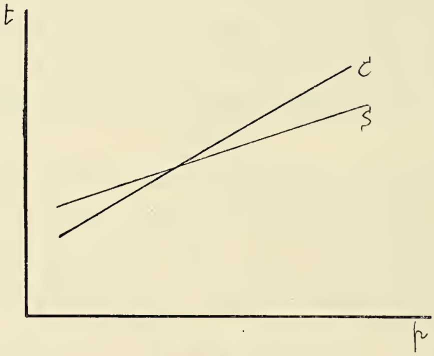


Fig. 27.

En résumé, dans presque tous les cas de température critique de dissolution inférieure, par compression, la solution tend à n'avoir qu'une phase liquide homogène à la température de congélation; il n'y a d'exception que si V_f est très grand et V_s inférieur très petit.

4. — *Une température critique de dissolution supérieure; la fusion du composant cristallisé se fait avec augmentation de volume.*

Considérons maintenant le cas le plus fréquent, celui d'une T. C. S. supérieure et d'une substance qui se dilate par fusion;

V_f est donc toujours positif; V_s peut être positif ou négatif, et voici les diverses alternatives à prévoir :

a) $$V_c = V_f + V_s.$$

V_s et par conséquent V_c sont positifs et $V_c > V_s$.

La ligne de congélation et la ligne de dissolution s'élèvent toutes deux vers les hautes températures quand la pression croît, mais la ligne de congélation tendra à dépasser la ligne de dissolution (fig. 27).

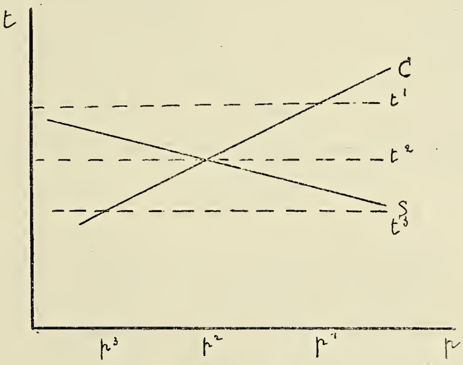


FIG. 28.

R. Ici la figure 27 se rapporte à des T. C. S. supérieures et non plus à des T. C. S. inférieures comme au paragraphe précédent; ici, par compression, la solution tend à n'avoir qu'une phase liquide homogène à la température de congélation, tandis que précédemment c'était l'inverse.

b) $$V_c = V_f - V_s.$$

V_s est négatif, la ligne de dissolution s'abaisse.

Si $V_f > V_s$, V_c sera positif; la ligne de congélation s'élève et tend à dépasser la ligne de dissolution (fig. 28).

Si $V_f = V_s$, V_c est nul; on atteint la ligne neutre, la ligne de congélation passe par un maximum de température (fig. 29, point N).

Si $V_f < V_s$, V_c est négatif; mais $V_s > V_c$; la ligne de congélation s'abaisse, mais moins vite que la ligne de dissolution; la ligne de congélation tendra donc ici également à dépasser la ligne de dissolution (fig. 29).

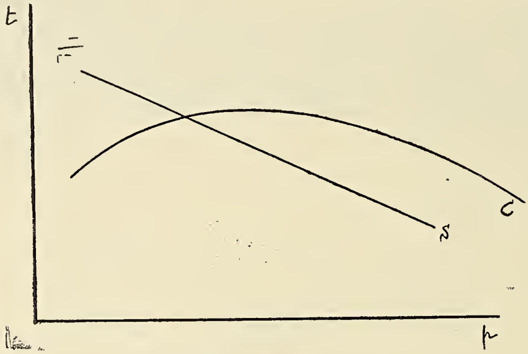


Fig. 29.

Dans tous les cas considérés, le mélange qui, à basse pression, avait deux phases liquides en équilibre avec les cristaux, sera homogène à la température de congélation sous des pressions suffisamment élevées.

5. — *Une température critique de dissolution supérieure; la fusion du composant cristallisé se fait avec diminution de volume.*

Ce cas se rencontre chaque fois que le composant qui cristallise est de l'eau; V_f est donc toujours négatif.

a) V_s est négatif, donc $-V_f - V_s = -V_c$, toujours négatif; la ligne de congélation s'abaisse, la ligne critique également, mais moins vite, car $-V_s < -V_c$ (fig. 30).

b) V_s est positif; V_s est toujours très petit (voir § 1) et très probablement moins grand que V_f; donc $-V_f + V_s = -V_c$;

le signe de V_f l'emporte; la ligne de dissolution s'élève, la ligne de congélation s'abaisse et tend donc à passer sous la ligne de dissolution (fig. 25).

R. Ici, de nouveau, la ligne de dissolution se rapporte à des températures critiques de dissolution supérieures et non plus, comme au paragraphe 3, à des températures critiques de dissolution inférieures; par compression, la solution tend donc à se séparer en deux phases liquides à la température de congélation, au lieu de devenir homogène comme précédemment.

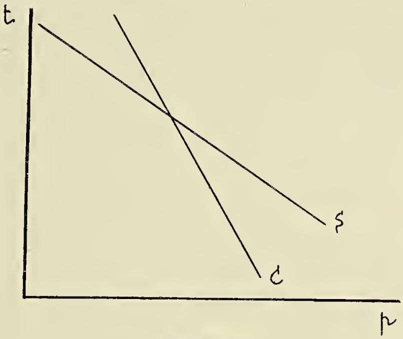


Fig. 30.

De l'ensemble des faits signalés dans les paragraphes 3, 4 et 5, il résulte donc que la compression a presque toujours pour conséquence de séparer l'un de l'autre les domaines de la démixtion et de la congélation tout d'abord contigus; il n'y a d'exception à cette règle que dans le cas d'une température critique de dissolution supérieure combinée avec la cristallisation d'un composant qui diminue de volume à la fusion.

L'ensemble des considérations que je viens d'exposer est en parfait accord avec les résultats obtenus précédemment, mais avec moins de détails, par Büchner (*), car dans son travail cet auteur se proposait un but différent du mien.

(*) Büchner, *loc. cit.*, pp. 280-304.

6. — *Diagrammes* px *et méthodes expérimentales.*

A l'aide des résultats que je viens d'obtenir, il serait facile de tracer, dans tous les cas possibles, les diagrammes *px* corres-

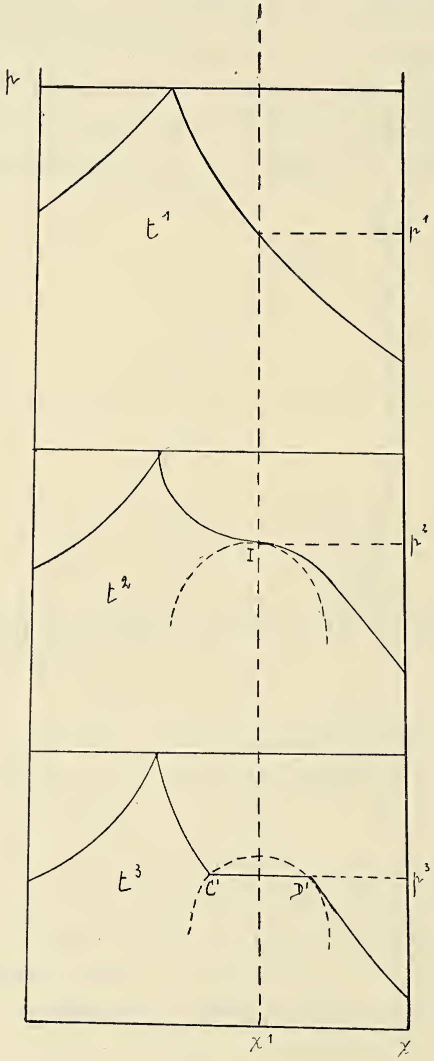


Fig. 31.

pondant à toute l'échelle des températures. Je me contenterai de le faire pour un système répondant aux conditions indiquées dans la figure 28, pour lequel la congélation est obtenue en élevant la pression à température constante, tandis que, en même temps, la température critique de dissolution supérieure s'abaisse quand la pression croît (voir fig. 31). A une température suffisamment élevée t^1, le mélange liquide est homogène à toutes les pressions, même les plus basses, et la cristallisation obtenue sous une pression très élevée conduit à une courbe de congélation d'un type tout à fait normal. (Comparer la courbe t^1 de la figure 3 au diagramme 7 de mon premier mémoire, 1913, p. 819.) A une température suffisamment basse t^3, le mélange liquide contient deux couches en équilibre subsistant encore au moment de la cristallisation, qui a lieu d'ailleurs sous une pression beaucoup plus faible qu'à la température t^1 (courbe t^3 de la fig. 31) ; la cristallisation de toutes les solutions où deux couches liquides sont en équilibre est un équilibre univariant (trois phases : $L^1 + L^2 + C$, pour deux composants), ce qui à t constant conduit au palier $C'D'$ de pression constante ; si par surfusion on parvenait à empêcher la cristallisation, la composition des deux couches liquides se rapprocherait de plus en plus, pour coïncider sous la pression critique de dissolution p^3. Enfin à la température t^2, intermédiaire entre t^1 et t^3, où la pression critique terminale p^2 coïncide précisément avec la pression de cristallisation, le palier $C'D'$ sera remplacé par un point d'inflexion I à tangente horizontale (courbe t^2 à la fig. 31); la pression du début de cristallisation p^2, elle aussi, est intermédiaire entre les pressions de cristallisation aux températures t^1 et t^2.

Les diagrammes px étant connus, il est facile de tracer les courbes de chute de pression en appliquant les règles générales énoncées à la fin de mon premier mémoire. La figure 32 contient trois courbes de chute de pression typiques correspondant à un même système de composition x_1 (voir fig. 31), étudié successivement aux températures t^1, t^2 et t^3. A la température t^1, la courbe de chute de pression est tout à fait ordinaire (comparer la courbe de t^1 de la figure 32 à la courbe *e* de la figure 8 de mon premier mémoire). A la température t^3, la branche CD de la courbe de chute de pression est coupée par le long palier C'D', correspondant à l'équilibre univariant $L^1 + L^2 + C$. Enfin, à la température t^2, la branche CD redevient continue, mais présente en I un point d'inflexion horizontal qui remplace le palier correspondant C'D' de la courbe t^3.

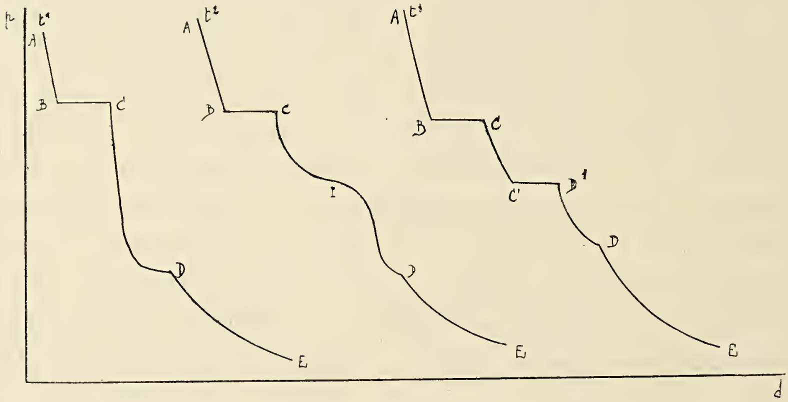


Fig. 32.

On voit que l'examen détaillé des courbes de chute de pression permettra ici également de faire une étude complète des équilibres polyphasiques auxquels prennent part des phases cristallines; mais s'il n'y a en présence que des phases liquides, les variations de volume résultant de leur dissolution sont trop peu marquées pour que la méthode des courbes de chute de pression soit d'un bon rendement, et il vaudra mieux faire appel à l'observation visuelle directe, au moyen d'appareils à regards du type de ceux qu'avons employés Wahl à Londres et moi-même à

Amsterdam (*). Une étude complète des équilibres dans le cas précédent nécessite donc l'emploi simultané des deux espèces de méthodes : observation visuelle et courbes de chute de pression.

7. — *Quelques résultats numériques.*

Au cours des recherches expérimentales que j'ai poursuivies dans le laboratoire de l'Institut de physique de l'Université d'Amsterdam, en collaboration avec M. le Prof^r Ph. Kohnstamm, j'ai eu l'occasion de réunir incidemment quelques données numériques, fragmentaires et approximatives, illustrant la théorie précédente; les résultats ont été obtenus par la combinaison de méthodes recommandées à la fin du paragraphe précédent : la chute de pression était obtenue en ouvrant très légèrement le robinet de détente du liquide compresseur de la pompe dont je faisais usage et faisant les lectures de p à intervalles de temps réguliers.

Dans les tableaux suivants, le second composant cité est celui qui cristallise; les températures critiques de dissolution sont empruntées à mes mémoires antérieurs (**).

a) *Système hexane normal + nitrobenzol.* T. C. ↑. T. C. S. ↓ (type : fig. 28).

$p = 1$ kilogr. (***)	T. C. = − 1°,5	T. C. S. = + 20°,8
825 id.	+ 13,8	+ 13,8

(*) W. Wahl, *Proceedings Royal Society*, 1913, t. LXXXVIII, a, p. 354. — Ph. Kohnstamm et J. Timmermans, *Zittingsversl. Kon. Akad. v. Wetensch. Amsterdam*, 1912, pp. 783-790.

(**) *Kon. Akad. v. Wetensch. Amsterdam, Proceedings*, octobre 1910 et novembre 1912.

(***) C'est par erreur que, dans mes publications antérieures, les pressions ont été données en atmosphères, et non pas en kilogrammes par c^2.

b) *Système décane (diisoamyle) + nitrobenzol.* T. C. ↑ T. C. S. $\underset{\rightarrow}{\downarrow\uparrow}$ (type : fig. 27).

$p = 1$ kilogr.	T. C. = + 1°5	T. C. S. = + 28°37
625 id.	+ 14	+ 26,40
1,300 id. (environ)	+ 28	+ 27,10

c) *Système pétrole + nitrobenzol.* T. C. ↑ T. C. S. ↑ (type : fig. 27).

$p = 1$ kilogr.	T. C. = < + 5°8	T. C. S. = + 13°95
925 id.	+ 16,35	+ 16,35

d) *Système aniline + cyclohexane.* T. C. ↑ T. C. S. ↑ (type : fig. 27).

$p = 1$ kilogr.	T. C. = — 1°1	T. C. S. = + 31°
1,200 id.	+ 42,50	+ 40,65

e) *Système méthyléthylcétone* + H^2O. T. C. ↓. T. C. S. inférieure ↑ (type : fig. 25).

$p = 10$ kilogr.	T. C. = — 8°5	T. C. S. inférieure = — 21° (extrapolé).
113 75 id.	— 9,5 (environ)	— 10
150 id.	> — 10	— 6,1

R. En cas de congélation avec diminution de volume, la température de congélation s'élève par compression, plus vite pour la solution que pour le composant pur, si le mélange des deux liquides se fait avec diminution de volume; car dans ce cas la variation de volume résultant de la congélation est plus forte pour le corps pur que pour la solution.

Exemple : $\frac{\partial t}{\partial p}$ par kilogramme de pression pour nitrobenzol. Pur : + 0°022 (*); avec hexane : + 0°018.

(*) Valeurs de $\frac{\partial t}{\partial p}$ pour glace et nitrobenzol purs, voir Tammann, *Krystallisieren und Schmelzen*, pp. 227 et 317.

C'est l'inverse qui se produit si, le mélange des liquides se faisant avec diminution de volume, la température de congélation s'abaisse; l'abaissement de *t* par compression est plus rapide pour la solution que pour le corps pur.

Exemple : $\frac{\partial t}{\partial p}$ pour la glace.

Pure : — 0°0075; avec méthyléthylcétone : — 0°01.

Si le mélange des liquides se fait avec augmentation de volume, l'influence sur *dt* est précisément l'inverse de ce qui est dit plus haut.

8. — *Deux cas intéressants d'équilibres non variants.*

Il me reste à signaler deux cas d'équilibres non variants particulièrement intéressants parce que deux phases liquides et deux phases cristallines d'un système binaire y sont en équilibre sous une *p* et une *t* bien déterminées.

a) **Polymorphisme du composant qui cristallise.**

Si deux phases liquides sont en équilibre avec les cristaux d'un composant qui possède des variétés polymorphiques énantiotropes, il peut arriver que les deux phases liquides subsistent encore au point de transformation des cristaux; on aura donc alors en présence les deux phases liquides et les deux variétés polymorphiques du composant cristallisé.

On rencontrera ce phénomène dans des mélanges tels que ceux de l'eau avec l'éther; la glace subit une transformation polymorphique à — 22° et sous une pression de 2,115 kilogrammes par centimètre carré (*). La présence d'éther n'aura

---

(*) Voir Tammann et Bridgmann, *loc. cit.*

guère d'influence sur la pression de transformation, mais l'on abaissera la température; d'autre part, j'ai pu constater expérimentalement qu'à — 16° et sous une pression de 3,000 kilogrammes, les deux couches liquides subsistaient. Dans ces conditions, l'ensemble des équilibres est représenté schématiquement par le diagramme *px* (fig. 33), établi pour la température de transformation (un peu plus bas que — 22°) : la ligne AF représente, pour les diverses pressions, la composition des eutectiques éther + glace α (forme stable sous la pression ordinaire, plus légère que l'eau), et la ligne BF, les eutectiques éther + glace β (forme plus lourde que l'eau, stable au-dessus de 2,115 kilogrammes); la pression *p* (CD) est la pression de transformation de la glace α en glace β en présence des deux phases liquides de composition C et D.

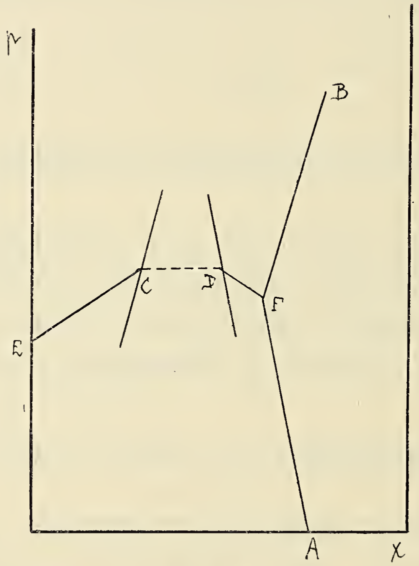


Fig. 33.

b) La composition de l'eutectique est intermédiaire entre celle des deux couches liquides.

Ce phénomène a surtout des chances de se présenter dans le cas de solutions dont l'un des composants cristallise avec augmentation de volume, tandis que l'autre composant cristallise avec diminution de volume; tel le système eau + acide valérianique. Ce mélange possède deux phases liquides qui sous la pression ordinaire cristallisent avec dépôt de glace; par compression, la température de fusion de la glace s'abaissera de plus en plus; l'acide valérianique normal, au contraire, cristallise à température relativement basse sous la pression ordinaire (— 34°5) (*), mais par compression la température de fusion s'élève. Dans ces conditions, on conçoit qu'à pression suffisamment haute, la température de fusion de l'acide puisse dépasser celle de la glace, et que dès lors, la surface de congélation de l'acide grandissant constamment aux dépens de celle de l'eau, les deux phases liquides finissent par être en équilibre, non pas comme au début, avec de la glace, mais avec de l'acide; entre ces deux états extrêmes, on rencontrera une pression et une température d'équilibre non variant, où ces deux phases liquides seront en équilibre à la fois avec de la glace et de l'acide cristallisé. L'ensemble de ces états d'équilibre est représenté sur le diagramme *px* (fig. 34) : la composition des deux phases liquides en équilibre avec les cristaux sous diverses pressions est représentée par les deux courbes L^1 et L^2; sous une faible pression (courbe α), la glace cristallise à une température plus élevée que l'acide, les lignes L^1 et L^2 coupent la courbe de congélation de la glace et l'eutectique, très pauvre en glace, se trouve dans la partie droite du diagramme ; sous une pression

---

(*) J. Timmermans, *Bulletin Société chimique de Belgique,* 1913, t. XXVII, p. 338.

très élevée (courbe γ), c'est l'acide dont la température de fusion est la plus élevée; les lignes L^1 et L^2 coupent la courbe de congélation de l'acide et l'eutectique, très riche en eau, se trouve dans la partie gauche du diagramme; à la pression intermédiaire correspondant à l'équilibre invariant (courbe β), l'eutectique a une composition moyenne, intermédiaire entre

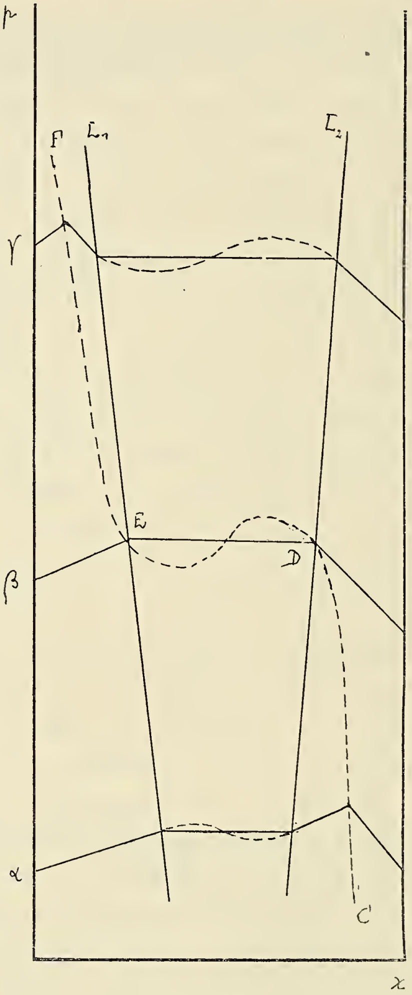


FIG. 34.

celle des couches liquides L^1 et L^2; la ligne eutectique CDEF peut donc être considérée comme une courbe continue, dont la partie théorique située entre les points D et E (en pointillé sur la figure) est remplacée par une horizontale isotherme et isobare qui est la courbe pratiquement réalisable (isotherme pratique de Van der Waals) (*).

CONCLUSION.

Dans ce troisième mémoire, j'ai étudié la congélation sous haute pression de systèmes possédant deux couches liquides; et j'ai fourni quelques données expérimentales inédites illustrant les résultats théoriques obtenus.

Université de Bruxelles,
octobre 1919.

(*) Ce phénomène a déjà été prévu par BÜCHNER, *loc. cit.*, p. 290.

Chimie. — Isomérisation et polymérisation du sulfocyanure de méthyle,

par J. GILLIS (*).

1. — *Introduction.*

J'ai déjà publié un premier travail (**) sur le sulfocyanure de méthyle, son isomère le sénévol méthylique et son trimère l'éther triméthylique de l'acide trithiocyanurique. Il portait spécialement sur les courbes de fusion et d'ébullition (sous 1 atm.) du système $CH_3SCN + CH_3NCS$, ainsi que sur les courbes de fusion des systèmes $CH_3SCN + (CH_3SCN)_3$ et $CH_3NCS + (CH_3SCN)_3$. Ces trois courbes de fusion me permirent ensuite d'établir l'allure probable du système pseudoternaire $CH_3SCN + CH_3NCS + (CH_3SCN)_3$.

Dans les pages qui vont suivre, je ferai mention des recherches qui furent entreprises en vue de réaliser l'état d'équilibre entre ces trois pseudocomposants. J'ai tenté d'abord d'établir l'emplacement de l'équilibre unaire du système pseudobinaire $CH_3SCN + CH_3NCS$.

A cet effet, j'ai repris l'expérience de Walden (***), qui fut le point de départ des recherches sur le sulfocyanure de méthyle. Walden détermina par ébullioscopie le poids moléculaire de l'iodure de tétraéthylammonium dans différents dissolvants et

---

(*) Présenté par M. F. Swarts.
(**) *Chemisch Weekblad*, t. XV (1918).
(***) *Zeit. phys. Chem.*, **55**, 297 (1906).

entre autres dans le sulfocyanure de méthyle. Il trouva ainsi que cet iodure déterminait dans ce dernier dissolvant un *abaissement* de la température d'ébullition. Il trouva le même résultat avec d'autres sels, par exemple : CdI_2 et NH_4SCN. MM. Smits et Vixseboxse (*) firent voir que le phénomène susdit devait être attribué à une isomérisation de CH_3SCN en CH_3NCS sous l'action catalytique des sels dissous. Je poursuivis alors ces recherches dans le but d'établir, à la faveur de divers catalyseurs, l'emplacement de l'équilibre unaire du système $CH_3SCN \rightleftarrows CH_3NCS$.

2. — *Reprise de l'expérience de Walden.*

Au lieu d'employer, comme Walden, l'appareil ordinaire de Beckmann pour mesures ébullioscopiques, je me suis servi de l'appareil du professeur Smits (**), qui convenait particulièrement bien pour des expériences de longue durée. J'ai introduit à chaque reprise dans l'appareil un poids déterminé de dissolvant, dont je commençais par déterminer le point d'ébullition. Après cela j'ajoutais des poids connus de différents sels, en annotant les variations du point d'ébullition. Ces expériences, avec le sulfocyanure de méthyle comme dissolvant, n'ont pas donné lieu en général à une grande régularité. C'est ainsi que, pour un même corps dissous, les différentes courbes température-concentration n'étaient pas concordantes du tout.

Contrairement à ce que trouva Walden, les différents sels dissous donnaient lieu au début à une élévation *normale* du point d'ébullition. Après un temps variable d'une expérience à l'autre, les sels dissous favorisent l'isomérisation du dissolvant et déterminent un lent abaissement du point d'ébullition. De

---

(*) *Versl. Kon. Akad. Wetensch. Amsterdam*, 31 mai 1913.

(**) Voir *Chem. Weekbl*, n° 15 (1918), p. 63.

plus, la plupart des sels décomposent à la longue le sulfocyanure de méthyle en colorant le dissolvant du jaune au brun foncé. Dans certains cas, l'odeur du sulfocyanure de méthyle se trouve altérée et devient franchement désagréable.

Walden affirme (*loc. cit.*) que le sulfocyanure de méthyle demeure inaltéré à la suite de l'ébullition avec un sel et notamment que « le dissolvant avait conservé après distillation son point d'ébullition normal ». Pour ma part, j'ai pu me convaincre que l'indice de réfraction du dissolvant après distillation avait changé dans toutes mes expériences et notamment qu'il était toujours plus élevé que celui du sulfocyanure de méthyle pur. La détermination du point d'ébullition, faite par Walden, ne comportait donc pas une sensibilité suffisante pour déceler l'isomérisation du dissolvant.

D'autre part, l'obtention du sulfocyanure de méthyle pur exige assez bien de précautions. Ainsi, à la température ordinaire, CH_3SCN est sensible à l'action de certains agents déshydratants tels que P_2O_5, $CaCl_2$. L'action catalytique du verre n'est pas à négliger non plus. Aussi ai-je pris soin de n'opérer qu'avec du sulfocyanure de méthyle fraîchement préparé et fractionné dans le vide. Les sels employés étaient purifiés avec soin et desséchés complètement. Je fais suivre quelques résultats de la reprise de l'expérience de Walden avec différents corps dissous.

NH_4SCN.

Deux expériences successives donnèrent l'élévation normale du point d'ébullition, en prenant comme constante celle déduite de la règle de Trouton : $K = \frac{0.02\ T.M}{21} = 28.06$.

Empiriquement Walden avait trouvé, à l'aide de composés organiques inertes, $K = 26.4$. Ces deux expériences ont été poursuivies jusqu'à des concentrations de 1.09 et 1.8 % en poids. L'indice de réfraction de quelques gouttes de liquide provenant de la distillation du dissolvant à la fin de la mesure était respectivement $n_{40}^{D} = 1.4592$ et 1.4600, tandis que pour le sulfocyanure de méthyle pur $n_{40}^{D} = 1.4582$.

Une troisième expérience, exécutée avec un nouvel échantillon de sulfocyanure de méthyle, accusa après dix minutes d'ébullition un abaissement de 0°,3 par addition de 0.82 °/₀ en poids de NH_4SCN. Pour une concentration de 2 °/₀, le point d'ébullition se releva jusqu'à atteindre la valeur du dissolvant pur.

Après deux heures d'ébullition dans les mêmes conditions, la solution était devenue légèrement brune et avait une odeur nettement ammoniacale. Les premières gouttes du distillat avaient un indice de réfraction de 1.4612, ce qui prouve une formation plus abondante d'isosulfocyanure de méthyle.

Il est extraordinaire que le sulfocyanure de méthyle se comporte si différemment, quoique l'on opère dans des conditions absolument analogues. Il faut donc croire que les différences proviennent du sulfocyanure lui-même qui, suivant son degré de pureté, peut renfermer des traces de composés fortement catalytiques. Hofmann (*) fit voir également que le sulfocyanure de méthyle se transforme à 180° en son polymère $(CH_3SCN)_3$, mais que, pour des préparations *particulièrement* pures, la formation du trimère ne se produit pas. Une trace d'acide suffisait alors pour amener la formation de $(CH_3SCN)_3$. J'estime qu'il s'agit ici d'un cas analogue : l'influence catalytique du sel dissous est probablement minime, mais des traces de composés dont nous ignorons la nature activent considérablement l'isomérisation du sulfocyanure de méthyle.

(*) *Ber. Chem. Ges.*, **18**, 2197 (1898).

KSCN.

Pour éviter la formation d'ammoniaque, observée dans le cas précédent, j'ai recherché l'action de KSCN sur le sulfocyanure de méthyle. $4^{gr}246$ de CH_3SCN furent additionnés de $0^{gr}0491$ de KSCN.

A cette concentration, la solution était déjà saturée et le point d'ébullition ne se modifia pas, même après quatre heures de vive ébullition. Dans ces conditions, le sulfocyanure de potassium n'exerce donc aucune action catalytique apparente. Cette circonstance est d'ailleurs très avantageuse et doit faire préférer l'emploi de KSCN sur NH_4SCN dans la préparation du sulfocyanure de méthyle par la méthode de Walden (*).

CdI_2.

En employant l'iodure de cadmium comme corps dissous, les résultats furent assez variés, de même que pour NH_4SCN. Ou bien l'élévation du point d'ébullition était d'abord normale et suivie d'un abaissement, ou bien la chute de la température se faisait jour dès le début. Les différentes expériences furent entreprises dans le même appareil, avec le même échantillon de CdI_2, mais avec des portions différentes de CH_3SCN nouvellement préparé ou fractionné.

Deux déterminations conduisirent à peu près aux mêmes résultats.

(*) *Ber. Chem. Ges*, **40**, 3215 (1907).

N° 1. — Point d'ébullition de CH_3 SCN pur : 131°0 sous 762 millimètres (non cor.).

Pour cent en poids CdI_2.	Point d'ébullition.	Δ	
0.75	130.8	— 0°2	Immédiatement brun.
2.95	130.6	— 0°4	Idem.
7.85	130.8	— 0°2	Idem.
17.8	131.1	+ 0°1	Idem.

N° 2.

1.4	129.9	— 0°1	Incolore (trouble).
3.96	129.9	— 0°1	Jaune clair.
7.95	130.15	+ 0°15	Jaune.
10.0	130.3	+ 0°3	Brun.
16.3	130.8	+ 0°8	Brun.

On voit donc que dès le début le point d'ébullition s'abaisse, mais que l'abaissement est compensé bientôt par de nouvelles additions de CdI_2. Si l'on réunit les données ci-dessus dans un diagramme des températures et des concentrations, la courbe, dès qu'elle se relève, redevient à peu près parallèle à la direction normale.

Le fait que la réfraction s'est élevée démontre le changement de composition du dissolvant. Le diagramme qui relie la concentration et l'indice de réfraction des divers mélanges de CH_3SCN et CH_3NCS (*) nous apprend que l'indice $n^D_{40°} = 1.4595$ trouvé ici correspond à 2.5 °/₀ de sénévol méthylique. D'autre part, le premier point de solidification (**) de quelques gouttes du distillat était situé à — 54°5, ce qui entraîne la présence de

---

(*) Voir le premier travail (*l. c.*).

(**) Quelques gouttes du distillat furent introduites dans un petit tube étroit qui fut ensuite scellé à la lampe. Le premier point de solidification fut établi ensuite dans un vase de Dewar non argenté à moitié rempli d'alcool et refroidi par l'anhydride carbonique. J'ai employé la méthode de disparition des derniers cristaux.

2 °/o de sénévol méthylique. L'isomérisation du dissolvant était prouvée du même coup.

N° 3. — Une autre expérience fournit un résultat différent. Point d'ébullition CH_3SCN : 130°65 sous 760 millimètres (non corr.).

Pour cent en poids CdI_2.	Point d'ébullition.	Temps.	
2.3	de 130.8	après 2′	
	à 130.75	id. 20′	
13.3	de 131	id. 1′	
	à 130.6	id. 30′	Légèrement jaune.
24 5	de 130.8	id. 2′	Brun clair.
	à 130.7	id. 1 heure.	

L'élévation du point d'ébullition immédiatement après l'addition de CdI_2 est normale dans le cas actuel $\left(\Delta = \frac{26.4 \times 2.3}{366.4} = 0.16\right)$. Mais après une vingtaine de minutes, le point d'ébullition s'était déjà abaissé de 0°05. Après chaque addition de CdI_2, on observe le même phénomène : d'abord une élévation du point d'ébullition suivie d'un abaissement lent. Il est clair qu'ici encore nous avons affaire à l'isomérisation du dissolvant, qui provoque la chute de température. De plus, j'ai réussi à démontrer qu'il y a formation simultanée du trimère (CH_3SCN_3). (Voir plus loin.)

N° 4. — Une dernière mesure ébullioscopique conduisit à des résultats semblables.

Point d'ébullition CH_3SCN : 130°7 sous $762^{\text{mm}}2$.

Pour cent en poids CdI_2.	Point d'ébullition.	Temps.	Coloration.
0.33	130.75	pendant 15′	
1.40	de 130.85	après 5′	Incolore.
	à 130.8	id. 25′	
2.36	130.9	pendant 2 heures.	Jaune.
9.0	131		Brun clair.

Cette fois encore on observe au début à peu près l'élévation normale, mais, pour la concentration de 9 °/₀₀, l'élévation du point d'ébullition est déjà beaucoup trop faible.

En moyenne les premières gouttes du distillat avaient comme indice de réfraction 1.4590.

Cette valeur accuse une nouvelle fois la formation de CH_3NCS.

$CdBr_2$.

Le bromure de cadmium ne donna lieu ni à une élévation, ni à un abaissement du point d'ébullition. Sa solubilité dans le sulfocyanure de méthyle est presque nulle.

H_2SO_4.

L'acide sulfurique concentré provoque un abaissement notable du point d'ébullition. Environ 3 gouttes de H_2SO_4 produisirent un abaissement de 0°8 sur 5 grammes de CH_3SCN.

Le liquide reste incolore, mais bientôt un composé blanc se dépose sur les parois de l'appareil. L'analyse m'a montré qu'il s'agit d'un sel et notamment $(NH_4)_2SO_4$ ou $(NH_4)HSO_4$. En effet, si on déverse la solution, qu'on lave l'appareil avec quelques centimètres cubes d'eau et que l'on porte une goutte de cette solution sur un porte-objet, on obtient par évaporation de jolis cristaux rhombiques formant de nombreuses macles et fortement réfringents. Ces cristaux sont absolument analogues à une préparation-contrôle de $(NH_4)_2SO_4$. D'autre part, traitée par le réactif de Nessler, la solution donne un épais précipité brun et sous l'action de H_2PtCl_6 on obtient de beaux octaèdres de chloroplatinate d'ammonium. Hofmann, qui étudia (*loc. cit.*) l'action de H_2SO_4 sur le sulfocyanure de méthyle, signale la formation d'ammoniaque d'après la réaction

$$2\,CH_3SCN + 3\,H_2O = (CH_3S)_2CO + 2\,NH_3 + CO_2.$$

L'ammoniaque serait fixée alors par H_2SO_4 en excès. D'autre part, la réfraction des premières gouttes du distillat était de $n^D_{40^0} = 1.4612$, ce qui correspond à 4.5 °/₀ de CH_3NCS.

Acide succinique.

Comme l'abaissement important du point d'ébullition de CH_3SCN sous l'action de H_2SO_4 aurait pu être dû à la présence de l'eau, j'ai recherché l'action d'un acide anhydre sur CH_3SCN. L'acide succinique que j'ai employé à cet effet n'était cependant pas suffisamment soluble et ne produisit qu'une faible élévation du point d'ébullition. Un dépôt blanc se forma également sur les parois. Dissous dans l'eau, celui-ci donnait naissance à des ions NH_4, de sorte qu'il s'agissait probablement du succinate d'ammonium.

3. — *Polymérisation de* CH_3SCN *à 130°.*

J'ai pu constater non seulement l'isomérisation de CH_3SCN à 130°, mais encore sa transformation partielle en son trimère $(CH_3SCN)_3$.

C'est au cours de l'expérience 3 avec CdI_2 que j'ai pu m'en rendre compte. J'avais essayé d'obtenir une solution saturée de CdI_2 dans CH_3SCN, mais bientôt je reconnus qu'il était possible d'ajouter jusqu'à 45 °/₀ en poids de CdI_2 sans atteindre la saturation. Cette solution était devenue brune et légèrement visqueuse. Je l'ai chauffée au bain-marie de manière à chasser le sulfocyanure de méthyle, après quoi j'ai extrait plusieurs fois le résidu à l'eau chaude.

La matière brunâtre qui restait alors fut placée sur une petite plaque métallique et sublimée avec précaution sur un porte-objet placé à un demi-centimètre au-dessus de lui. L'examen microscopique permit de reconnaître de petites aiguilles à forte réfringence. En sublimant une plus grande quantité au bain de graphite, je pus recueillir sur un verre de montre une quantité de cristaux suffisante pour en déterminer le point de fusion (187°).

D'après Hofmann, le point de fusion du trimère du sulfocyanure de méthyle est de 188°. Il était donc établi que CH_3SCN se polymérise déjà sensiblement à 130° en présence de CdI_2.

Il n'était pas exclu à priori que le système CH_3SCN et $(CH_3SCN)_3$ ne présentât un minimum dans sa courbe d'ébullition. De cette manière, l'abaissement du point d'ébullition signalé par Walden eût pu trouver son origine dans une polymérisation partielle du dissolvant. Pour contrôler cette hypothèse, j'ai observé l'élévation du point d'ébullition du polymère dans le sulfocyanure de méthyle.

N° 1. Point d'ébullition sulfocyanure de méthyle : 130°4 sous 759 millimètres (non corr.).

Poids de trimère sur 100 gr. CH_3SCN. —	Élévation observée. —	Élévation calculée $K = 28°06$. —
0.022	+ 0°35	+ 0°28
0.045	0°70	0°58
0.099	1°40	1°27
0.213	2°7	2°7

N° 2. Point d'ébullition sulfocyanure de méthyle : 130°7 sous 760 millimètres (non corr.).

Poids de trimère par 100 gr. CH_3SCN. —	Élévation observée. —	Élévation calculée. —
0.0025	+ 0°05	+ 0°03
0.0064	0°1	0°08
0.016	0°25	0°21

L'élévation du point d'ébullition est donc plus grande qu'on ne s'y attendrait, ce qui doit être dû à une dissociation partielle.

A mesure que la concentration devient plus forte, le degré de dissociation diminue également et pour 0.2 °/o l'élévation est déjà devenue normale (*). Il n'y a donc pas de minimum dans la courbe d'ébullition du système CH_3SCN et $(CN_3SCN)_3$, ce qui était d'ailleurs fort peu probable, puisque, dans ce cas, la phase vapeur aurait dû être plus riche en trimère que la phase liquide coexistant avec elle.

4. *Élévation du point d'ébullition avec l'isosulfocyanure de méthyle comme dissolvant.*

Le sénévol méthylique n'a pas encore été étudié jusqu'à présent, pour autant que je sache, comme dissolvant pour mesures ébullioscopiques. L'élévation moléculaire du point d'ébullition peut être évaluée de la manière ordinaire à l'aide de la règle de Trouton.

$$K = \frac{0.02\,T.M.}{21} = \frac{0.02 \times 390.5 \times 73}{21} = 27.2.$$

L'étude du sulfocyanure de méthyle avait déjà montré que la constante empirique de ce composé ne diffère pas considéra-

---

(*) La grandeur moléculaire de l'éther triméthylique de l'acide trithiocyanurique a été établie par Hofmann par analogie avec le dérivé oxygéné correspondant. Une détermination directe du poids moléculaire n'avait pas encore été faite. Les mesures ébullioscopiques signalées ici prouvent que ce composé est bien le trimère du sulfocyanure de méthyle. De plus, j'ai déterminé le poids moléculaire de $(CH_3\,SCN)_3$ par voie ébullioscopique dans le benzol. Voici les résultats obtenus : (Élévation moléculaire du point d'ébullition pour le benzène : 27.3).

Poids du dissolvant.	Poids du corps dissous.	Élévation du point d'ébullition.	P. M. trouvé.	P. M. calculé pour $(CH_3\,SCN)_3$.
—	—	—	—	—
14.07	0.1172	0°105	222	219
	0.4107	0°355	224	
	0.6162	0°535	224	

blement de celle déduite de la règle de Trouton. J'ai pu me rendre compte qu'il en est de même pour l'isosulfocyanure de méthyle. Le corps dissous était le sulfocyanure d'ammonium.

Expérience 1. Point d'ébullition de CH_3NCS : 117°4 sous 754 millimètres.

Pour cent en poids NH_4SCN.	Élévation du point d'ébullition.	Élévation calculée $K = 27\ 2$.	Durée.
—	—	—	—
1.68	+ 0°6	+ 0°66	3 heures.

Expérience 2. Point d'ébullition de CH_3NCS : 117°2 sous 750 millimètres.

2.03	+ 0°7	+ 0°75	5 heures.

La solution était devenue légèrement jaune, ce qui fait supposer une légère décomposition du dissolvant. Nous verrons d'ailleurs plus loin que cette décomposition s'accompagne de la formation de $(CH_3)_2S$. Aussi n'y aurait-il rien d'étonnant à ce que le léger écart entre l'élévation observée et calculée soit dû à la présence de ce composé.

J'ai entrepris la même expérience avec l'iodure de cadmium au lieu du sulfocyanure d'ammonium, mais la solubilité de CdI_2 dans $CH_3\ NCS$ est tellement faible que je n'ai pu constater aucun changement dans la température d'ébullition, pas même après vingt et une heures de chauffe.

Pour le sulfocyanure de potassium, il en est comme pour l'iodure de cadmium. Pendant dix-neuf heures le point d'ébullition du dissolvant est resté inchangé.

J'ai recherché également l'influence de traces d'acide sulfurique concentré sur le sénévol méthylique. L'extrémité du thermomètre humecté de H_2SO_4 fut introduite dans $CH_3\ NCS$ bouillant. Il se produisit localement un léger dégagement gazeux (COS?) et le dissolvant se colora légèrement en jaune. Le point d'ébullition toutefois ne se modifia pas.

On peut donc conclure de ce qui précède que l'essence de moutarde méthylique se comporte comme dissolvant d'une façon normale et qu'elle ne subit aucune action catalytique de la part des corps dissous. Tout au plus peut-on parler d'une légère décomposition qui se caractérise par le jaunissement de la solution.

Résumé de la première partie.

L'influence des divers corps dissous est assez variable et, sauf pour CdI_2 et H_2SO_4, l'action catalytique en faveur de l'isomérisation et de la polymérisation est minime. Le degré de pureté du dissolvant a une grande influence sur les transformations du sulfocyanure de méthyle. C'est là, je suppose, la cause prédominante des divergences entre les expériences de Walden et les miennes. J'ai pu démontrer que CH_3SCN s'isomérise déjà sensiblement à 130°, en m'appuyant sur l'analyse thermique et sur l'analyse réfractométrique des premières portions de la distillation.

De même, à 130°, la polymérisation se laisse déjà observer nettement. J'ai mesuré par la méthode ébullioscopique le poids moléculaire du polymère formé.

En me servant du sénévol méthylique comme dissolvant ébullioscopique, j'ai pu observer que la constante empirique de ce composé est en concordance avec la constante déduite de la règle de Trouton.

5. — *Essais en vue d'établir l'emplacement de l'équilibre unaire.*

L'emplacement probable de l'équilibre d'isomérisation à la température de 130° peut être évalué approximativement par le calcul. Nous savons, en effet, que la chaleur de transformation du sulfocyanure de méthyle en isosulfocyanure doit être voisine, d'après Thomson (*), de 7 calories et, d'après Berthelot (**), de 8.5 calories. Nous pouvons admettre que la chaleur d'isomérisation de CH_3SCN à l'état gazeux sera du même ordre de grandeur que les données calorimétriques qui précèdent. Appliquons alors la formule de van 't Hoff sous sa formule intégrée :

$$ln\,K = -\frac{Q}{RT}.$$

Si $T = 403$ et $Q = 8000$ (moyenne des valeurs de Thomson et Berthelot), on a :

$$\log K = \frac{-8000}{2.3 \times 2 \times 403} = \text{environ} - 4$$

$$\text{d'où} \quad K = 10^{-4} \qquad \text{et} \qquad \frac{C_1}{C_2} = \frac{1}{10000}.$$

L'équilibre, à l'état gazeux, aura donc, à 130°, une situation très unilatérale et voisine de l'essence de moutarde. Comme, généralement, entre des limites de température assez rapprochées, l'équilibre varie fort peu, nous pouvons admettre que vers 130° l'isomérisation de CH_3SCN sera pratiquement totale. L'équilibre à l'état liquide pouvant être supposé, en première analyse, peu différent de l'équilibre à l'état gazeux, j'ai recherché jusqu'à quel point le passage de CH_3SCN à la forme iso était une réaction totale.

Toutefois, à côté de l'isomérisation du sulfocyanure de méthyle, j'ai dû tenir compte également de la polymérisation de celui-ci d'après l'équation

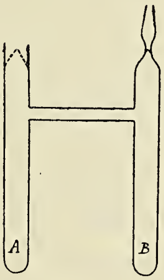
$$3\,CH_3SCN = (CH_3SCN)_3.$$

(*) *Thermochemische Untersuchungen*, p. 297.

(**) *Comptes rendus*, **130**, 441, et *Bulletin* [3], **23**, 344.

C'est pourquoi le système, au lieu d'avoir l'allure pseudobinaire, prit l'aspect pseudoternaire, les pseudocomposants étant CH_3SCN, CH_3NCS et $(CH_3SCN)_3$.

Pour pouvoir analyser des mélanges de ces trois composés, j'ai opéré comme suit : Deux éprouvettes en verre épais furent réunies par un tube en verre transversal, comme l'indique la figure ci-dessous. L'extrémité ouverte de A fut scellée à la lampe après y avoir introduit le mélange à analyser contenu dans un tube en verre. La branche A fut placée alors dans l'air liquide, après quoi le vide complet fut fait dans l'ensemble et le tube B scellé au chalumeau. Ensuite, l'extrémité B fut placée dans l'air liquide et A abandonné à l'air libre ou chauffé légèrement. Le trimère reste de cette manière en A, tandis que l'essence de moutarde et le sulfocyanure de méthyle distillent en B. La quantité de trimère peut s'établir alors par pesée et le rapport des quantités de CH_3SCN à CH_3NCS à l'aide du point de fusion et de la réfraction.



Un essai de vérification donna les résultats suivants :

	EMPLOYÉ.	TROUVÉ.	ERREUR EN %.
CH_3NCS	4.4549	4.4330	0.4 %
CH_3SCN	0.0567	0.0653	14 %
$(CH_3SCN)_3$. . . .	1.4064	1.4153	0.9 %

Ces chiffres montrent que la méthode est susceptible de donner lieu à des erreurs assez considérables dans le cas où l'un des constituants est présent en de faibles proportions. D'autre part, il y aura intérêt à pousser la distillation aussi loin que possible, pour éviter des chiffres trop élevés pour le trimère.

Je fais suivre maintenant un aperçu des résultats qui furent obtenus en soumettant le sulfocyanure de méthyle et son isomère à l'action simultanée de divers catalyseurs et de différentes températures. Je me servis de tubes en verre épais qui, après l'introduction d'un poids connu de substance, furent placés dans l'air liquide et scellés après avoir été évacués à la pompe de Gaede. De cette manière, l'action de l'oxygène de l'air était éliminée.

1° *Expériences à 180°-185°* (dans l'étuve pour tubes scellés).

J'ai chauffé d'abord le sulfocyanure de méthyle pendant cinq heures et demie à 180° sans ajouter de catalyseur. Le liquide était devenu légèrement brunâtre, laissait déposer de fins cristaux de trimère et présentait une forte odeur de moutarde. Après distillation dans l'appareil décrit ci-dessus, le distillat renfermait 12 °/₀ d'essence de moutarde méthylique (d'après le premier point de solidification : — 59°52), ou bien 12.2 °/₀ de sénévol (d'après la réfraction $n^{D}_{40^\circ} = 1.4667$). Le point d'eutexie était situé à — 64°9, donc 0°7 au-dessous du point d'eutexie d'un mélange analogue de $CH_3SCN + CH_3NCS$. Cet abaissement, ainsi que la différence entre les pourcentages en CH_3NCS, pourrait bien être dû à la présence de petites quantités d'un produit de la décomposition partielle de l'isosulfocyanure de méthyle. (Voir plus loin.)

J'ai repris ensuite la même expérience dans les mêmes conditions, mais en ajoutant une trace d'acide sulfurique concentré. Qualitativement, on retrouve les mêmes phénomènes que ci-dessus, mais quantitativement on observe un accroissement notable du pourcentage d'isosulfocyanure de méthyle. Le premier point de solidification était situé cette fois à + 2°5, ce qui représente 67 °/₀ de CH_3NCS. Toutefois, je n'ai pu observer le point d'eutexie. Des traces d'acide sulfurique ont donc une influence catalytique très marquée sur l'isomérisation du sulfocyanure de méthyle. De plus, la production de trimère s'accroît notablement et passe du simple au triple.

J'ai maintenu ensuite l'essence de moutarde méthylique pure pendant quinze heures et demie à la température de 180°. Le contenu du tube scellé était devenu brun et ne se solidifiait plus par refroidissement. La distillation dans le tube de Faraday fournit un liquide qui se solidifie à 22°6. Je n'ai pas observé de point d'eutexie. La réfraction du distillat était de 1.5234 à 40°. L'indice de réfraction et le premier point de solidification fournissent des résultats contradictoires. En effet, si on consulte la ligne des réfractions du système $CH_3SCN + CH_3NCS$, on trouve qu'à l'indice 1.5234 correspond une teneur de 96.4 °/₀ de CH_3NCS. Au contraire, d'après la courbe de fusion on trouve 85.5 °/₀. Il doit donc s'être formé un autre composé que le sulfocyanure de méthyle. J'ai pu établir, comme on le verra ci-dessous, qu'il s'était formé une petite quantité de sulfure neutre de méthyle $(CH_3)_2S$.

En chauffant en effet l'essence de moutarde méthylique pendant huit heures à 180° en présence d'une trace d'H_2SO_4, j'ai obtenu par refroidissement un liquide brun et sirupeux ne possédant plus l'odeur piquante caractéristique du sénévol, mais rappelant nettement celle des mercaptans. Après distillation dans le tube de Faraday, le distillat ne se solidifiait pas dans le mélange de CO_2 et d'alcool. Ce liquide, examiné par la méthode de Smith (*), améliorée par Smits et Vixseboxse (**), commençait à bouillir vers 50°. Le point d'ébullition présentait

---

(*) *J. Amer. Chem. Soc.*, **32**, 897 (1910).

(**) *Versl. Kon. Akad. Wetensch. Amsterdam*, 31 mai 1913.

un trajet de 15°. D'autre part, le même liquide, additionné d'iodure de méthyle, donna lieu à la formation d'un précipité cristallin qu'un examen microscopique montra identique à un échantillon d'iodure de triméthylsulfinium préparé aux dépens de ses constituants. L'odeur repoussante des sulfures alcooliques, l'abaissement notable du point d'ébullition et la formation de l'iodure de triméthylsulfinium concourent à démontrer que le composé formé aux dépens du sénévol méthylique est bien le thioéther $(CH_3)_2S$ (point d'ébullition 37°5).

La réaction de décomposition du sénévol sera selon toute probabilité :

$$2CH_3NCS = (CH_3)_2S + CN - N = C = S.$$

L'isosulfocyanure de cyanogène $CN - N = C = S$ a déjà été décrit par Hantzsch et Wolvekamp (*) comme étant un liquide jaune, assez volatil (distillant vers 83°), à odeur ni désagréable ni piquante, et qui se polymérise après quelque temps avec formation de cristaux jaunes.

Je n'ai pu identifier sûrement ce composé, mais en distillant à chaud et dans le vide le résidu noirâtre de la branche A du tube de Faraday, j'ai obtenu en majeure partie un liquide jaunâtre, se prenant partiellement après un temps assez court en une masse cristalline qui, dissoute dans le benzol, y produit une belle fluorescence (jaune par transparence, verte par réflexion).

Vers la fin de la distillation, j'ai recueilli également une substance solide jaune, fondant à 50° environ, et en tout dernier lieu un composé qui, lavé au benzol, avait un point de fusion à 230°. Tout au plus pourrait-il y avoir quelque analogie entre le sulfure de cyanogène C_2N_2S fondant à 60° et le composé jaune fondant à ± 50°.

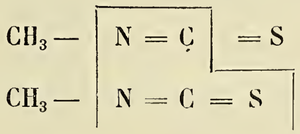
(*) *Annalen*, **331**, 289.

Ces derniers composés n'étaient présents que pour une faible part, ce qui me permettra de laisser en suspens leur véritable nature.

Il est étrange à priori de voir l'isosulfocyanure de méthyle se décomposer suivant l'équation

$$2\,CH_3NCS = (CH_3)_2S + C_2N_2S.$$

C'est Hofmann (*) qui a prouvé, en 1868, que pour les essences de moutarde le groupement alkylique est fixé directement à l'atome d'azote. Il semble donc à première vue que la formation de $(CH_3)_2S$ soit en contradiction avec les résultats de Hofmann. Ceux-ci ne sont cependant pas contestables, puisque par hydrolyse et par réduction des sénévols on obtient les amines correspondantes. Si donc il se forme du sulfure de méthyle sous l'action de la chaleur sur CH_3NCS, on est forcé d'admettre que ce composé est entièrement disloqué et que la réaction se produit d'après le schéma :



$$\begin{array}{l|l|l|}
CH_3 - & N = C & = S \\
\cline{3-3}
CH_3 - & N = C & = S
\end{array}$$

Les groupements méthyliques seraient donc détachés de l'azote pour être fixés par un atome de S libéré par la formation du composé C_2N_2S.

Il résulte de ce qui précède que le sénévol méthylique se décompose partiellement avec formation de sulfure de méthyle et que cette décomposition est catalysée notablement par la présence de CdI_2 et de H_2SO_4. Pour recueillir des données se rapportant uniquement à l'équilibre d'isomérisation du sulfo-

---

(*) *Berichte*, **1**, 177.

cyanure de méthyle, il fallait donc recourir à des températures plus basses et éviter la décomposition de l'un des pseudo-composants.

2° *Expériences à 150°-160°* (étuve à tubes scellés).

Deux tubes scellés chargés de sulfocyanure de méthyle furent chauffés respectivement pendant dix jours avec une trace de CdI_2 et de KSCN. Les tubes renfermaient alors un liquide brun noirâtre, se solidifiant en partie par refroidissement. Ce liquide n'avait pas l'odeur de l'essence de moutarde, mais plutôt l'odeur alliacée de $(CH_3)_2S$. On doit donc admettre que l'essence de moutarde, formée par isomérisation, s'était décomposée à la longue d'après l'équation

$$2\,CH_3NCS = (CH_3)_2S + C_2N_2S.$$

Et en effet la masse solide, après lavage à l'alcool, contenait à côté d'une quantité notable de trimère $(CH_3SCN)_3$ une partie appréciable du même liquide jaunâtre (C_2N_2S) décrit plus haut.

L'essence de moutarde méthylique fut soumise au même traitement que le sulfocyanure de méthyle. Après dix jours, les tubes à KSCN et CdI_2 renfermaient un liquide brun noirâtre, se solidifiant par refroidissement. L'odeur du sénévol avait de nouveau fait place à une odeur alliacée et la substance solide, distillée dans le vide, fournissait d'abord un liquide jaunâtre se polymérisant bientôt, puis un composé solide jaune à point de fusion voisin de 130°, pouvant être le polymère de l'isosulfocyanure de méthyle, décrit par Pallazo (*).

Les températures comprises entre 150° et 160° ne pouvaient donc convenir pour nos recherches.

(*) *Gazetta Chimica Italiana,* **38** [1], 668.

3° *Expériences à 140°* (vapeur de xylol bouillant).

Le sulfocyanure de méthyle, additionné d'un petit cristal de KSCN, fut chauffé pendant trente-huit heures en tube scellé dans la vapeur de xylol bouillant.

Je pus observer, après refroidissement, la formation abondante de trimère $(CH_3SCN)_3$. Le distillat obtenu comme plus haut avait un indice de réfraction $n^D_{40^\circ} = 1.4785$, ce qui correspond à 31 °/o d'essence de moutarde. Le premier point de solidification du mélange était situé à — 58°, ce qui correspond à 26 °/o d'essence de moutarde. La température d'eutexie était de — 64°4. Les deux points de solidification ont donc une valeur déprimée par rapport aux données de la réfraction.

D'autre part, le sulfocyanure de méthyle, traité dans les mêmes conditions que ci-dessus, mais additionné cette fois d'une trace d'acide sulfurique, fournit des résultats plus concordants.

Voici les données d'une analyse complète :

Poids de trimère : $0^{gr}408$.

Poids du distillat : $5^{gr}23$.

Réfraction $n^D_{40} = 1.4637$, soit 8.4 °/o isosulfocyanure de méthyle.

Premier point de solidification : — 57°5, soit 8 °/o isosulfocyanure de méthyle.

Deuxième point de solidification : — 64°5.

D'où la composition en °/o moléculaires :

CH_3SCN : 89.3 °/o CH_3NCS : 8.2 °/o $(CH_3SCN)_3$: 2.5 °/o.

La transformation en présence de l'acide sulfurique se produit donc assez lentement, mais d'une façon régulière, la décomposition de l'essence de moutarde étant presque nulle aux concentrations réalisées.

Pour diminuer la durée de l'expérience et éviter ainsi qu'une chauffe prolongée n'altérât le sénévol, je suis parti directement d'un mélange de CH_3SCN et de CH_3NCS. De cette manière je réalisais d'emblée un état qui n'aurait été atteint qu'après un temps fort long. J'ai pu constater ainsi que l'isomérisation du sulfocyanure de méthyle peut être considérée comme une réaction totale.

Première expérience : mélange de 61.5 °/₀ d'isosulfocyanure de méthyle et 38.5 °/₀ de sulfocyanure.

Ce mélange fut chauffé pendant trente-huit heures à 140° avec une trace de H_2SO_4. La formation de trimère était sensible et le distillat avait un premier point de fusion situé à 13°5, ce qui lui assigne une teneur de 77 °/₀ en sénévol.

Deuxième expérience : mélange de 89.5 °/₀ de sénévol et de 10.5 °/₀ de sulfocyanure de méthyle (catalyseur : H_2SO_4).

Cette fois il ne s'était pas formé de trimère et le distillat avait un indice de réfraction $n_{40}^{D} = 1.5220$, ce qui correspond à 96 °/₀ d'essence de moutarde. Nous voyons de nouveau que le sulfocyanure de méthyle se transforme en faveur de son isomère. J'ai dû m'arrêter à cette concentration de 96 °/₀, étant donné que dès ce moment les erreurs inhérentes au procédé d'analyse deviennent trop importantes. Le résultat atteint n'en est pas moins fort intéressant, puisqu'il démontre que l'isomérisation du sulfocyanure de méthyle est une réaction pratiquement totale.

4° *Expériences à 111°* (toluol bouillant).

En chauffant le sulfocyanure de méthyle pur pendant trente-trois heures à 111°, j'ai observé une légère variation de son point de fusion (— 53°7 au lieu de — 53°58) et de son indice de réfraction (1.4588 au lieu de 1.4582). En admettant la formation unique de CH_3NCS, il ne se serait donc pas formé 1 °/₀ d'isosulfocyanure. D'autre part, en évaporant cinq gouttes du liquide sur un verre de montre, j'ai obtenu un faible résidu formé de petits cristaux blanchâtres. L'examen microscopique permit de les identifier avec les cristaux du trimère $(CH_3SCN)_3$.

L'addition de minimes quantités de substances étrangères a pour effet de catalyser sensiblement l'iso et la polymérisation. Ainsi, le sulfocyanure de méthyle, chauffé dans les mêmes conditions, mais avec une trace d'acide sulfurique, donne naissance après refroidissement à des cristaux abondants de trimère $(CH_3SCN)_3$. D'autre part, le liquide présentait l'odeur caractéristique de l'essence de moutarde. Son point de fusion était — 55°5 et sa réfraction 1.4608, ce qui équivaut à plus de 4 °/₀ de CH_3NCS.

5 grammes de sulfocyanure de méthyle chauffés pendant trente-trois heures à 111° et additionnés de 0gr2 de CdI_2, s'isomérisèrent abondamment. Le liquide avait une forte odeur de moutarde et son indice de réfraction (1.4673) indiquait la présence de 14 °/₀ environ de CH_3NCS. Par contre, le refroidissement ne donnait pas lieu à une précipitation de trimère. L'iodure de cadmium semble donc catalyser avant tout la réaction d'isomérisation.

Quand, au lieu de CdI_2 ou de H_2SO_4, on ajoute du KSCN au sulfocyanure de méthyle dans les mêmes conditions que ci-dessus, il se forme 10.8 °/₀ d'essence de moutarde (réfraction 1.4650), ou bien 10.5 °/₀, d'après le premier point de solidification. Le second point de solidification n'était abaissé que de 0.3. De plus, il y a précipitation abondante du trimère $(CH_3SCN)_3$.

J'ai chauffé encore à 111° un mélange de 91.2 °/₀ d'essence de moutarde méthylique, de 8.6 °/₀ de sulfocyanure de méthyle et de 0.2 °/₀ de KSCN. La durée de chauffe fut cette fois de huit jours. J'ai obtenu par distillation un mélange fondant à 29°33 et renfermant donc 95.2 °/₀ de sénévol méthylique. L'indice de réfraction était d'ailleurs de $n^D_{40^\circ} = 1.5199$. La quantité de trimère formé était cette fois très minime.

Il semble donc que la température de 111° était fort propice pour nos recherches. Pourtant il n'en est rien. J'ai pu me rendre compte, en effet, que l'essence de moutarde méthylique se décompose encore à cette température. Trois tubes scellés, contenant, l'un, de l'essence de moutarde pure, l'autre une trace de H_2SO_4 et le troisième un petit cristal de KSCN, furent chauffés simultanément pendant septante-huit heures à 111°. Après refroidissement, le premier tube renfermait un liquide brunâtre se solidifiant complètement, tandis que le contenu des deux autres tubes, devenu brun également, refusait de se solidifier complètement à la température ordinaire; il s'était donc produit une décomposition du sénévol. Un mélange de CH_3SCN et de CH_3NCS pur, qui ne se solidifie pas à 18°, aurait dû contenir 20 °/₀ de CH_3SCN, ce qui est contraire à ce que nous savons de l'emplacement de l'équilibre, situé certainement au delà de 90 °/₀ de CH_3NCS.

5° *Expériences à 20°.*

Je rappellerai l'expérience faite par Vixseboxse (*) avec du sulfocyanure de méthyle maintenu pendant six semaines à 20° en présence de CdI_2 en excès. Le point d'ébullition du liquide, mesuré d'après la méthode de Smith, était abaissé de 7°8, ce qui prouve, d'après la courbe des points d'ébullition des mélanges de CH_3NCS et CH_3SCN (**), qu'il s'était formé près de 52 °/₀ de sénévol méthylique.

D'autre part, si l'on abandonne du sulfocyanure de méthyle à la température ordinaire pendant quelques mois sur du $CaCl_2$ fondu, on observe la formation d'un précipité jaune, qui, filtré, se dissout dans HNO_3 concentré et reprécipite par addition d'eau. Ce précipité est formé essentiellement du trimère $(CH_3SCN)_3$,

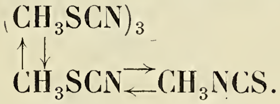
---

(*) *Versl. Kon Akad. Wetensch. Amsterdam,* 31 mai 1913, p. 49.
(**) *Chem. Weekbl.,* t. XV (1918).

comme j'ai pu l'établir par l'examen microscopique. L'isomérisation et la polymérisation du sulfocyanure de méthyle s'effectuent donc même à la température ordinaire.

En résumé, j'ai pu vérifier que l'emplacement de l'équilibre du système $CH_3SCN \rightleftarrows CH_3NCS$ est très unilatéral, comme le faisait prévoir le calcul. Ainsi, à 140°, il est certainement situé au delà de 96 °/₀, limite ultime que j'ai pu repérer par suite de la décomposition de l'isosulfocyanure de méthyle, d'une part, et de l'erreur croissante due à la méthode d'analyse, d'autre part. A 110°, l'équilibre sera encore plus unilatéral, puisque la réaction $CH_3SCN \rightarrow CH_3NCS$ est exothermique. A cette température, l'extrême lenteur de l'isomérisation et la même cause que ci-dessus m'ont empêché de pousser plus loin mes recherches.

6. — *Emplacement probable de l'équilibre unaire*



$$\begin{tikzcd} (CH_3SCN)_3 \arrow[d, shift left] \\ CH_3SCN \arrow[u, shift left] \arrow[r, shift left] & CH_3NCS. \arrow[l, shift left] \end{tikzcd}$$

J'ai déjà signalé dans ma première communication que les points de fusion des mélanges de $CH_3SCN + (CH_3SCN)_3$ s'élèvent lentement en fonction du temps.

Ainsi, pour un mélange de 59.4 °/₀ en poids de trimère, le point de fusion s'élève au bout de deux heures de 149 6 à 150°3. De même, pour un mélange de 82.8 °/₀ en poids de trimère, on passe au bout de deux heures et demie de 170° à 171°5. Il se produit donc une polymérisation du sulfocyanure de méthyle, mais d'autre part il y a également isomérisation, comme j'ai pu le constater par l'odeur de l'essence de moutarde formée.

J'ajouterai encore que le point de fusion d'un mélange de 95.67 °/₀ moléculaires de trimère et de sulfocyanure de méthyle, chauffé pendant six heures à 190°, s'élève de 187°6 à 187°8. Comme, par suite de l'isomérisation concomitante, les trois pseudocomposants se trouvent ici en présence, le système en équilibre unaire devra être constitué presque exclusivement de trimère et son point de fusion devra être compris entre 187°8 et 188°5.

Ce qui confirme encore cette manière de voir, c'est que le trimère, chauffé pendant dix jours dans la vapeur d'aniline bouillante, acquiert à peine une faible odeur ne moutarde. On peut donc dire qu'à la longue c'est le trimère qui se formera aux dépens des deux autres pseudocomposants CH_3SCN et CH_3NCS. Le caractère fortement unilatéral de cet équilibre ne me permit pas d'en établir l'emplacement avec plus de précision.

Résumé de la seconde partie.

1. L'isomérisation du sulfocyanure de méthyle avec formation d'isosulfocyanure est pratiquement totale.
2. D'autre part, il y a toujours formation simultanée plus ou moins rapide de trimère $(CH_3SCN)_3$.
3. L'addition de substances étrangères catalyse différemment soit l'isomérisation, soit la polymérisation. Ainsi CdI_2 accélère notablement la formation de CH_3NCS, tandis que H_2SO_4 favorise plutôt la formation de $(CH_3SCN)_3$.
4. Dans tous les cas, il semble qu'à la longue la polymérisation doive l'emporter sur l'isomérisation (*).

Amsterdam. Laboratoire de chimie générale.

(*) Cette conclusion justifie l'échec de la tentative de Bremer, *Liebig's Ann.*, **378**, 192, en vue de préparer l'essence de moutarde aux dépens du sulfocyanure de méthyle. En effet, la majeure partie du sulfocyanure se polymérise et le rendement s'en trouve diminué d'autant. Pour se placer dans les conditions les plus favorables, il faudrait opérer en présence de CdI_2 comme catalyseur et assez rapidement pour que la polymérisation n'atteigne pas des valeurs appréciables. D'autre part, le faible écart des points d'ébullition des deux isomères constitue un obstacle important à leur séparation soignée.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — **La Gravifique**

(*Quatrième communication*) (*),

par TH. DE DONDER.

14. *Cas de la statique pure.* — Quand les vitesses u^1, u^2, u^3 sont identiquement nulles ainsi que les potentiels g_{14}, g_{24}, g_{34}, et quand, en outre, les autres potentiels sont indépendants de x_4, nous dirons que nous sommes dans le cas de la *statique pure.*

Il en résulte que (52) :

$$\left.\begin{aligned} u_\alpha &= 0 \qquad \alpha = 1, 2, 3 \\ u_4 &= g_{41}\frac{dx_4}{ds}. \end{aligned}\right\} \tag{160}$$

On aura, d'autre part (48) :

$$\frac{ds}{dx_4} = \sqrt{g_{44}}. \tag{161}$$

Dans le cas de la statique pure, les équations différentielles (57) du champ gravifique deviennent :

$$\left.\begin{aligned} k\sqrt{-g}\,G_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{2}\rho g_{\alpha\beta} \qquad \alpha, \beta = 1, 2, 3 \\ k\sqrt{-g}\,G_{\alpha 4} &= 0 \\ k\sqrt{-g}\,G_{44} &= \frac{1}{2}\rho g_{44} \end{aligned}\right\}. \tag{162}$$

(*) Présenté par M. Stroobant.

Les trois premières communications ont paru dans les *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique* (Classe des sciences), mars, avril et juin 1919.

Les valeurs explicites des symboles $G_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 1, 2, 3, 4)$ qui figurent dans (162) ont été données par T. Levi-Civita (*); on a :

$$\left.\begin{aligned} G_{\alpha\beta} &\equiv G^{(3)}_{\alpha\beta} + \frac{\Lambda_{\alpha\beta}}{\Lambda}\cdot \qquad && \alpha, \beta = 1, 2, 3 \\ G_{\alpha 4} &\equiv 0 \\ G_{44} &\equiv - \Lambda \Delta \Lambda \end{aligned}\right\} \tag{163}$$

où l'on a posé :

$$\left.\begin{aligned} \Lambda &\equiv \sqrt{g_{44}} \\ \Lambda_{\alpha} &\equiv \frac{\partial \Lambda}{\partial x_{\alpha}}, \qquad && \alpha = 1, 2, 3. \\ \Lambda_{\alpha\beta} &\equiv \frac{\partial \Lambda_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} - \sum_{\gamma} \left\{\begin{matrix}\alpha\beta \\ \gamma\end{matrix}\right\}^{(3)} \Lambda_{\gamma} && \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3 \\ \Delta \Lambda &\equiv \frac{1}{\sqrt{-a}} \sum_{\alpha} \frac{\partial \left(\sqrt{-a}\, \Lambda^{\alpha}\right)}{\partial x_{\alpha}}; \end{aligned}\right\} \tag{164}$$

Ajoutons que a représente le déterminant des $g_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 1, 2, 3)$, que $a^{\alpha\beta}$ est le mineur algébrique de $g_{\alpha\beta}$ dans a, divisé par a, et que l'on a aussi posé :

$$\left.\begin{aligned} \Lambda^{\alpha} &\equiv \sum_{\beta} a^{\alpha\beta} \Lambda_{\beta} \\ \begin{bmatrix}\alpha\beta \\ \lambda\end{bmatrix}^{(3)} &\equiv \frac{1}{2} \left(g_{\alpha\lambda,\,\beta} + g_{\lambda\beta,\,\alpha} - g_{\alpha\beta,\,\lambda}\right) \\ \left\{\begin{matrix}\alpha\beta \\ \gamma\end{matrix}\right\}^{(3)} &\equiv \sum_{\lambda} a^{\gamma\lambda} \begin{bmatrix}\alpha\beta \\ \lambda\end{bmatrix}^{(3)} \\ & \qquad \alpha, \beta, \gamma, \lambda = 1, 2, 3. \end{aligned}\right\} \tag{165}$$

(*) *Rendiconti R. Acc. Lincei* (Cl. dei scienze fisiche, matematiche e naturali), 1917, 1918 et 1919. Dans ces mémoires, M. T. Levi-Civita a intégré les équations $G_{\mu\nu} = 0$ dans plusieurs cas nouveaux.

Enfin, le symbole $G^{(3)}_{\alpha\beta}$ n'est autre que le symbole $G_{\alpha\beta}$ (15), mais appliqué à la forme quadratique à *trois* variables :

$$\sum_{\gamma}\sum_{\lambda} g_{\gamma\lambda}\delta x_{\gamma}\delta x_{\lambda} \qquad \gamma, \lambda = 1, 2, 3.$$

On voit, d'après (163), que les équations $G_{\alpha 4} = 0$ (162) sont identiquement satisfaites.

Considérons, en particulier, la dernière équation du système (162) ; en vertu de (163) et de (164), elle pourra s'écrire :

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial(\sqrt{-a}\,\Lambda^{\alpha})}{\partial x_{\alpha}} = -\frac{\rho}{2k}; \qquad (166)$$

pour s'en assurer, il suffira de remarquer que $g \equiv a g_{44}$.

L'équation (166) qui relie le potentiel g_{44} à la densité ρ pourrait s'appeler l'*équation de Poisson généralisée.*

15. *Calcul de la constante universelle* k. — Il est naturel de supposer que la constante universelle k est en relation étroite avec la *constante* f *de la gravitation universelle :*

$$F = f\frac{mm'}{r^2} \qquad (167)$$

et avec la *vitesse* c *de la lumière dans l'espace-temps non déformé* (ou le champ c). Pour trouver cette relation, calculons d'abord les dimensions de ces trois grandeurs physiques.

Remarquons que les dimensions de l'invariant de courbure C sont $\frac{1}{\lambda^2}$, en désignant par λ la dimension d'une longueur.

Les dimensions de L se calculeront d'après (28) et d'après (325) de mon mémoire II cité dans ma première communication ; on trouve $\frac{\mu}{\tau^3}$, en désignant par μ la dimension de la masse (ordinaire ou pondérable) et par τ la dimension du temps.

En vertu de (4), on conclura que les dimensions de k sont $\lambda\mu\tau^{-2}$.

D'autre part, les dimensions de f sont (167) : $\frac{\lambda^3}{\mu\tau^2}$.

On aura donc

$$[kf]=[c^4]; \tag{168}$$

les *crochets* se liront : *dimensions de.*

En vertu de ce qui précède et de (168), on aura

$$k=n\frac{c^4}{f}, \tag{169}$$

où n représente un *nombre abstrait* à déterminer une fois pour toutes. Pour trouver ce nombre n, nous allons considérer un champ matérialitique pur, à l'état statique pur et très peu différent du champ c; autrement dit, nous considérons un champ gravifique défini par

$$g\equiv\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \psi \end{vmatrix} \tag{170}$$

où ψ *est une fonction de* (x_1, x_2, x_3), peu différente de c^2 dans tout le champ.

Appliquons à ce cas l'équation de Poisson généralisée (166) ; on aura, en vertu de (169) :

$$\frac{\partial^2(\psi c)}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2(\psi c)}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2(\psi c)}{\partial x_3^2}=-\frac{1}{2n}f\left(\frac{\rho}{c^3}\right). \tag{171}$$

Remarquons que $\frac{\rho}{c^3}$ a précisément les dimensions de la *densité massique,* c'est-à-dire $\mu\lambda^{-3}$; représentons par D cette densité de la masse ; on aura (*)

$$\frac{\rho}{c^3} \sim \mathrm{D}. \tag{172}$$

Les résultats obtenus au § 13 de notre troisième communication nous amènent à rapprocher (171) de (172) et à nous reporter à l'équation classique de Poisson ; on en conclura que

$$-\frac{1}{2n} = 4\pi \tag{173}$$

et que (ψc) joue le rôle du potentiel ordinaire ou classique.

Les relations (169) et (173) donnent immédiatement la valeur cherchée de k :

$$k = -\frac{c^4}{8\pi f}. \tag{174}$$

Ce nombre est donc négatif ; sa valeur absolue est, dans le système C. G. S., de l'ordre de grandeur de 10^{47}.

16. *Champ matérialitique pur : Cas du fluide parfait.* — Considérons un fluide parfait ou sans viscosité ; en chaque point de ce fluide, la force agissant normalement sur un élément de surface $\delta\mathrm{S}$ passant par ce point vaut $p\delta\mathrm{S}$; p est une fonction positive de x_1, x_2, x_3, x_4 ; c'est la *pression,* au sens ordinaire de ce terme. Les dimensions de p sont $\lambda^{-1}\mu\tau^{-2}$.

(*) D'une manière *générale,* nous poserons $\rho \equiv \mathrm{D}(-g)\mathrm{V}$, où g représente le déterminant des potentiels g_{ij} $(i, j = 1, 2, 3, 4)$ et où $\mathrm{V} \equiv \sqrt{\sum_i \sum_j g_{ij} v^i v^j}$ (84). L'expression $\rho\mathrm{V}^{-1}$ ou $\mathrm{D}(-g)$ fournira la *densité du contenu énergétique de la matière.*

Appliquons à ce fluide le principe d'Hamilton généralisé (4); pour cela, posons, par extension de (50) :

$$L = \rho S - p\sqrt{-g}. \tag{175}$$

Les calculs qui vont suivre ne sont que l'extension immédiate de ceux que nous avons effectués dans notre seconde communication (voir équations 51 à 96); autrement dit, les résultats que nous allons obtenir se réduiront à ceux qui ont été signalés dans cette communication, quand on supposera que p est identiquement nul.

Ainsi l'extension de (51) au cas des fluides parfaits est donnée par

$$\mathfrak{T}_{\mu\nu} = \mathfrak{T}_{\nu\mu} = -(1+\varepsilon_{\mu\nu})\frac{dL}{dg^{\mu\nu}} = \rho u_{\mu} u_{\nu} - p\sqrt{-g}\, g_{\mu\nu}. \tag{176}$$

Pour déduire de ce tenseur symétrique le tenseur asymétrique, nous utiliserons la définition (12); d'où

$$\begin{aligned} T_{\alpha}^{\beta} \equiv \sum_{\gamma} g^{\gamma\beta}\mathfrak{T}_{\gamma\alpha} &= \sum_{\gamma} g^{\gamma\beta}\left(\rho u_{\gamma} u_{\alpha} - p\sqrt{-g}\, g_{\gamma\alpha}\right) \\ &= \rho u_{\alpha} u^{\beta} - p\sqrt{-g}\, \varepsilon_{\alpha\beta} \qquad (177) \\ &\qquad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

C'est l'extension de la relation (55).

De (177), on déduit (48) :

$$T \equiv \sum_{\alpha} T_{\alpha}^{\alpha} = \rho - 4p\sqrt{-g}. \tag{178}$$

Les équations différentielles du champ gravifique dans le fluide parfait considéré peuvent s'écrire (17) :

$$k\sqrt{-g}\, G_{\mu\nu} = \rho\left(u_{\mu} u_{\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\right) + p\sqrt{-g}\, g_{\mu\nu}. \tag{179}$$

Voyons maintenant ce que devient le théorème du tenseur asymétrique (§ 3). Dans (21) ou dans (58), substituons les valeurs du tenseur asymétrique T_σ^ν données par (177) ; d'où

$$0 = \sum_\nu \left[\frac{d(\rho u_\sigma u^\nu)}{dx_\nu} - \frac{1}{2} \sum_\mu \sum_\alpha g_{\mu\alpha,\sigma} g^{\mu\nu} \rho u_\nu u^\alpha \right] + A^\sigma \qquad (180)$$

$$\sigma = 1, 2, 3, 4$$

en posant

$$A^\sigma \equiv \sum_\nu \left[\frac{d(-p\sqrt{-g}\,\varepsilon_{\sigma\nu})}{dx_\nu} + \frac{p}{2}\sqrt{-g} \sum_\mu \sum_\alpha g_{\mu\alpha,\sigma} g^{\mu\nu} \varepsilon_{\nu\alpha} \right]. \qquad (181)$$

Effectuons les dérivations indiquées dans (181) ; en utilisant la formule

$$\frac{d\sqrt{-g}}{dg^{im}} = -\frac{1}{2}(2 - \varepsilon_{im})\sqrt{-g}\, g_{im} \qquad (182)$$

et l'identité

$$\sum_i (g_{im,\sigma} g^{im} + g_{im} g^{im,\sigma}) \equiv 0, \qquad (183)$$

déduite par dérivation de

$$\sum_i g_{im} g^{im} \equiv 1, \qquad (184)$$

on obtient aisément :

$$A^\sigma \equiv -\frac{dp}{dx_\sigma}\sqrt{-g}. \qquad (185)$$

En vertu de (180) et de (185), on aura donc

$$\rho \sum_\nu u^\nu \left(\frac{du_\sigma}{dx_\nu} - \frac{1}{2} \sum_\mu g_{\mu\nu,\sigma} u^\mu \right) + u_\sigma \sum_\nu \frac{d(\rho u^\nu)}{dx_\nu} = \sqrt{-g}\,\frac{dp}{dx_\sigma}. \qquad (186)$$

C'est l'extension des équations (60).

Mais on a, en outre (52) :

$$\sum_{\nu} \frac{du_\sigma}{dx_\nu} u^\nu = \sum_{\mu} \sum_{\nu} \left(g_{\nu\sigma,\,\mu} u^\mu u^\nu + g_{\mu\sigma} \frac{du^\mu}{dx_\nu} u^\nu \right). \tag{187}$$

Substituons (187) dans (186); d'où

$$\rho \sum_{\mu} \sum_{\nu} \left(g_{\mu\sigma} \frac{du^\mu}{dx_\nu} u^\nu + \begin{bmatrix} \mu\nu \\ \sigma \end{bmatrix} u^\mu u^\nu \right) + u_\sigma \sum_{\nu} \frac{d(\rho u^\nu)}{dx_\nu} = \sqrt{-g}\, \frac{dp}{dx_\sigma} \tag{188}$$

$$\sigma = 1, 2, 3, 4.$$

C'est l'extension de l'équation (62) (*).

Multiplions les deux membres de (186) par u^σ et sommons par rapport à l'indice σ; d'où, en vertu de (187) :

$$\left.\begin{aligned} \rho \sum_{\sigma} u^\sigma \sum_{\nu} u^\nu \left(\frac{du_\sigma}{dx_\nu} - \frac{1}{2} \sum_{\mu} g_{\mu\nu,\,\sigma} u^\mu \right) + \sum_{\sigma} u_\sigma u^\sigma \sum_{\nu} \frac{d(\rho u^\nu)}{dx_\nu} \\ = \sqrt{-g} \sum_{\sigma} \frac{dp}{dx_\sigma} u^\sigma \end{aligned}\right\} \tag{189}$$

Mais en vertu de (48) :

$$\sum_{\mu} \sum_{\nu} g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu \equiv 1; \tag{190}$$

on aura, en dérivant par rapport à x_σ :

$$\sum_{\mu} \sum_{\nu} \left(g_{\mu\nu,\,\sigma} u^\mu u^\nu + 2 g_{\mu\nu} \frac{du^\mu}{dx_\sigma} u^\nu \right) \equiv 0,$$

ou

$$\sum_{\mu} \sum_{\nu} \left(g_{\mu\nu,\,\sigma} u^\mu u^\nu + 2 \frac{d(g_{\mu\nu} u^\mu)}{dx_\sigma} u^\nu - 2 g_{\mu\nu,\,\sigma} u^\mu u^\nu \right) \equiv 0,$$

(*) Dans la formule (62) de notre deuxième communication, il y a deux erreurs typographiques; le facteur ρ a été omis devant la double somme; d'autre part, devant la somme $\sum_{\nu}$ il faut lire u_σ au lieu de u^σ.

ou, en vertu de (52) :

$$\sum_{\nu} 2\frac{du_{\nu}}{dx_{\sigma}}u^{\nu} - \sum_{\mu}\sum_{\nu} g_{\mu\nu,\sigma}u^{\mu}u^{\nu} \equiv 0. \tag{191}$$

Multiplions les deux membres de (191) par u^{σ} et sommons par rapport à l'indice σ; d'où

$$\sum_{\sigma}\sum_{\nu}\frac{du_{\sigma}}{dx_{\nu}}u^{\nu}u^{\sigma} - \frac{1}{2}\sum_{\mu}\sum_{\nu}\sum_{\sigma} g_{\mu\nu,\sigma}u^{\mu}u^{\nu}u^{\sigma} \equiv 0. \tag{192}$$

En vertu de (192) et de (190), la relation (189) devient (*) :

$$\sum_{\nu}\frac{d(\rho u^{\nu})}{dx_{\nu}} = \sqrt{-g}\sum_{\sigma}\frac{dp}{dx_{\sigma}}u^{\sigma}. \tag{193}$$

C'est l'*équation de continuité généralisée* du fluide parfait considéré.

On peut aussi l'écrire :

$$\sum_{\nu}\frac{d(\rho u^{\nu})}{dx_{\nu}} = \sqrt{-g}\,\frac{dp}{ds} \tag{194}$$

$$= \sqrt{-g}\,\frac{dp}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}, \tag{195}$$

où t représente le temps, c'est-à-dire x_4.

Remarquons d'abord qu'on aura (195), dans le cas particulier où $p \equiv 0$ (fluide incohérent) :

$$\sum_{\nu}\frac{d(\rho u^{\nu})}{dx_{\nu}} \equiv 0; \tag{196}$$

(*) Dans une note récente (*Comptes rendus de l'Acad. des sciences de Paris*, 30 décembre 1918), M. Vessiot a obtenu, par une tout autre voie, un résultat analytique analogue à l'équation (193); l'interprétation *physique* de M. Vessiot diffère de la nôtre donc l'équation (63) est une *conséquence analytique* des équations précédentes; autrement dit, la relation (63) exprime, non pas une hypothèse, mais un théorème.

Retournons au cas du fluide parfait à pression p; supposons qu'il y règne un champ gravifique peu différent du champ c ou de l'espace-temps non déformé; supposons, en outre, que les vitesses du fluide soient petites comparativement à la vitesse c de la lumière dans le champ c. On aura alors

$$\sum_{\nu} \frac{d(\mathrm{D} v^{\nu})}{dx_{\nu}} \sim 0; \qquad v = 1, 2, 3, 4 \qquad (197)$$

autrement dit, l'*équation ordinaire de continuité* sera approximativement satisfaite.

Assemblée générale des trois Classes
du lundi 3 novembre 1919.

M. Henri Pirenne, président de l'Académie.

M. Paul Pelseneer, secrétaire perpétuel.

Sont présents :

Classe des sciences. — MM. A. Lameere, Charles-J. de la Vallée Poussin, Frédéric Swarts, Jean Massart, A. Rutot, A. de Hemptinne, Paul Stroobant, Georges Lecointe, Émile Marchal, *membres*.

Classe des lettres et des sciences morales et politiques. — MM. Goblet d'Alviella, Paul Fredericq, Jules Leclercq, Maurice Wilmotte, Maurice Vauthier, J. Vercoullie, G. De Greef, J.-P. Waltzing, Eugène Hubert, Louis de la Vallée Poussin, Léon Parmentier, dom Ursmer Berlière, J. Bidez, Georges Cornil, *membres*.

Classe des beaux-arts. — MM. Sylvain Dupuis, *directeur*, Émile Mathieu, Louis Le Nain, Léon Frédéric, Lucien Solvay, Jules Brunfaut, Georges Hulin de Loo, Fernand Khnopff, Léon

Du Bois, Paul Bergmans, Adolphe Max, Ernest Verlant, *membres.*

Absences motivées : MM. Gravis et Julin, membres de la Classe des sciences; M. Cumont, membre de la Classe des lettres, et M. Wambach, membre de la Classe des beaux-arts.

M. le Président rappelle les trois propositions différentes de MM. Khnopff, Bergmans et Wilmotte, de faire entrer des littérateurs à l'Académie : 1° à la Classe des beaux-arts, sans augmenter le nombre des membres; 2° en augmentant le nombre des membres; 3° en constituant une Classe nouvelle.

M. **Wilmotte** fait l'historique de sa proposition, justifiée par le fait que celle de M. Khnopff ne paraissait pas satisfaire les littérateurs. Tous les arguments pour et contre les diverses propositions ont d'ailleurs déjà été développés en 1898. A cette époque, M^gr^ de Harlez et M. Kurth préconisaient la création d'une section ou d'une Classe de littérature; et depuis lors, les littérateurs de notre pays ont encore mieux fait leurs preuves. M. Wilmotte lit une liste de vingt-trois noms de littérateurs belges dignes d'entrer à l'Académie, dans une Classe de littérature, et pense qu'on pourrait même aller jusqu'à trente. Il reconnaît que la proposition de M. Khnopff est plus simple et d'une réalisation plus facile, mais la constitution d'une Classe distincte serait plus digne.

M. **Vauthier** appuie la proposition de M. Wilmotte; il reproche à la proposition de M. Khnopff d'avoir l'air de méconnaître l'existence de la Littérature belge. L'existence d'une Académie littéraire belge donnerait à notre littérature nationale un développement plus grand encore.

M. **Khnopff** déclare retirer sa proposition, en présence de celle de M. Wilmotte.

M. **Verlant** rappelle que les littérateurs belges ne comprennent pas que la Classe des lettres déclare n'avoir rien à faire avec les littérateurs, alors qu'elle s'occupe des prix de littérature.

La proposition de M. Khnopff, à laquelle M. Verlant s'était d'abord rallié, était une façon détournée de favoriser le mouvement littéraire belge. Il considère aujourd'hui qu'il n'y a là qu'un pis-aller, qui ne satisferait guère les littérateurs. Ceux-ci souhaiteraient une Académie de littérature française, qui devrait exister à l'instar de l'Académie littéraire flamande, Académie qui comprendrait, outre des littérateurs professionnels, des critiques, des orateurs, etc. La création d'une Académie de ce genre est devenue une nécessité.

M. le comte **Goblet d'Alviella** constate que la première proposition n'est plus guère défendue. Les exigences deviennent plus grandes et, après une Classe spéciale, on demande même une Académie nouvelle. A son avis, une Classe serait l'extrême limite jusqu'où l'on peut aller. Pour lui, la plus grande difficulté sera le choix des quinze premiers membres. Au surplus, il faudra changer le titre de la Classe actuelle des lettres.

M. **Leclercq** avait proposé jadis de faire entrer les littérateurs dans la Classe actuelle des lettres. En présence du retrait de la proposition de M. Khnopff, M. Leclercq n'insiste pas non plus en faveur de son ancienne proposition, et il se rallie à celle de M. Wilmotte. Mais il craint, comme M. Goblet d'Alviella, les difficultés des premières nominations et se demande si la vraie solution ne serait pas l'élection par les littérateurs eux-mêmes.

M. **Hulin de Loo** défend la solution de la Classe des beaux-arts; il ne voit qu'un argument appréciable en faveur de l'autre solution : le désir présumé des littérateurs. Il proteste contre l'opinion que les littérateurs passeraient « par la petite porte » en entrant dans la Classe des beaux-arts. Le nombre de vingt-trois littérateurs cités par M. Wilmotte n'implique pas qu'ils dussent tous être admis ; il serait préférable, au contraire, de faire un choix parmi ces vingt-trois, comme la Classe des beaux-arts le fait pour toutes les autres sections. M. Hulin ne voit pas plus de séparation entre la poésie et la musique qu'entre la musique et l'architecture. Il voit, au contraire, des avantages sérieux à réunir dans une seule Classe tous ceux qui pratiquent le culte de la Beauté. En dehors de cette solution, il ne voit qu'une solution possible : la création d'une Académie littéraire de langue française, indépendante ; sinon des difficultés politiques très grandes surgiront, si les littérateurs de langue flamande étaient exclus de la Classe nouvelle qu'on se propose de fonder.

M. Wilmotte répond à M. Hulin et confirme le désir de nombreux littérateurs de ne pas entrer à l'Académie par la porte de la Classe des beaux-arts. Il ajoute que les artistes ne peuvent faire une sélection parmi les littérateurs et affirme qu'ils ne lisent guère et que leur culture littéraire est minime. M. Wilmotte ne serait pas adversaire d'une Académie distincte, mais les littérateurs n'en veulent pas : ils exigent d'être de l'Académie royale de Belgique. Quant aux premiers nommés, ce pourraient être des lauréats des prix de littérature ; et ceux-là désigneraient les autres. Mais les lauréats ne souhaitent peut-être pas cette charge, et il croit que les trois Classes réunies pourraient très bien désigner les quinze premiers membres d'une nouvelle Classe de lettres.

M Paul Fredericq rappelle que la seule question à trancher est de savoir d'abord si la littérature belge d'expression française doit être honorée, et comment. Il croit difficile d'introduire les littérateurs dans l'Académie actuelle et se rallie à l'idée de créer une Académie de littérature belge d'expression française où les littérateurs seraient tout à fait les maîtres, et il pense que ceux-ci en seraient enchantés.

M. **Lecointe** trouve déplacé et inadmissible l'ultimatum des littérateurs, qui veulent absolument imposer leurs préférences à l'Académie.

M. **Goblet** ne voit pas l'impossibilité de réunir une Classe de littérature aux trois autres Classes existantes; il est adversaire de la création d'une Académie distincte.

M. **Verlant** précise sa conclusion de tantôt : satisfaire les intéressés. Mais lui-même se déclare incertain à ce sujet. Il demande que le Gouvernement prenne les mesures nécessaires pour donner aux littérateurs la satisfaction qu'ils désirent.

M. **Hulin**, comme M. Lecointe, n'admet pas qu'une société privée dicte les conditions dans lesquelles certains de ses membres entreraient à l'Académie. Il insiste sur les difficultés que ferait naître un organisme officiel (Classe distincte de l'Académie de Belgique) pour la littérature française, qui n'aurait pas son équivalent pour la littérature néerlandaise.

M. **Swarts** explique que la Classe des sciences n'a pas voté l'exclusion des littérateurs, de l'Académie, mais s'est prononcée contre la création d'une Classe distincte de littérature; il se rallie à l'avis de MM. Fredericq et Hulin.

M. **Vauthier** expose qu'il y a à peu près unanimité sur l'opportunité de créer un corps représentant la littérature. Mais ce corps sera-t-il indépendant ou rattaché à l'Académie royale de Belgique? Il y aurait lieu de voter sur cette question.

MM. Khnopff et Bergmans ayant retiré leurs propositions, M. Hulin de Loo reprend celle de M. Khnopff.

Il s'engage alors sur la position de la question, une discussion à laquelle prennent part MM. Hulin, Solvay, P. Fredericq, Wilmotte, Waltzing. A la suite de cette discussion, M. le Président demande à l'Académie de voter d'abord sur la création éventuelle d'une Classe nouvelle pour les littérateurs. Il est procédé à l'appel nominal.

La création d'une nouvelle Classe est repoussée par 21 voix contre 15.

La proposition de M. Khnopff, revenant à ajouter le mot « littérature » à l'énumération qui se trouve dans les articles 1 et 3 du règlement général est adoptée par 28 voix contre 4 et 1 abstention.

La séance est levée à 12 heures 20.

Séance du 8 novembre 1919.

M. A. Gravis, vice-directeur, occupe le fauteuil.
M. Paul Pelseneer, secrétaire perpétuel.

Sont présents : MM. C. le Paige, Léon Fredericq, J. Neuberg, Maurice Delacre, A. Lameere, Ch.-J. de la Vallée Poussin, Max Lohest, F. Swarts, J. Massart, A. Demoulin, A. Rutot, A. de Hemptinne, Victor Willem, Paul Stroobant, J. Verschaffelt, G. Lecointe, Émile Marchal, *membres;* A. Brachet, M. Stuyvaert, L. Crismer, *correspondants.*

Absences motivées : MM. Ch. Julin et P. Nolf, membres.

Avant d'aborder l'ordre du jour, M. le Directeur félicite MM. Delacre, de la Vallée Poussin, Demoulin, Lameere, Stroobant et van Aubel, promus Officiers, et MM. Stuyvaert, Verschaffelt et Willem, nommés Chevaliers de l'Ordre de Léopold, ainsi que MM. Lecointe et Rutot, nommés Commandeurs de l'Ordre de la Couronne.

Il a le regret d'annoncer à la Classe la mort de M. Oechsner de Coninck, associé de la Section des sciences mathématiques et physiques, décédé à Hyères le 26 décembre 1916.

Le procès-verbal de la dernière séance est lu et approuvé.

CORRESPONDANCE.

M. Julin, dont l'état de santé exige le repos, exprime ses regrets de ne pouvoir faire à la séance publique du 16 décembre la lecture promise. MM. de Hemptinne et Rutot acceptent de faire des lectures à cette séance, ce dont la Classe les remercie.

— L'Université de Strasbourg ayant invité l'Académie à envoyer des délégués aux fêtes par lesquelles elle célébrera son inauguration, la Classe décide de se faire représenter par MM. de la Vallée Poussin, Demoulin, Lecointe et Swarts.

— M. Binon demande à l'Académie de le présenter comme candidat à un prix Nobel. La Classe estime qu'il n'y a pas lieu de donner suite à cette demande.

— A la demande de M. Dupont, la Commission de la Fondation De Potter sera priée d'examiner si la thèse mathématique développée dans son ouvrage ne suffit pas à lui donner le caractère d'une œuvre originale, pouvant être admise à solliciter une subvention.

HOMMAGES D'OUVRAGES.

Les grandes mutations intellectuelles de l'humanité, 1^re^ partie, par M. Rutot.

— *Guide pour la microscopie et la dissection*, par M. A. Lameere.

— *Extension de la notion de Jacobien*, par M. Stuyvaert.

— *Xenocoeloma brumpi* C. et M., *Copépode parasite de Polycirrus arenivorus* C., par Caullery et Mesnil.

— *Observations de Nova Aquilae n° 3* effectuées en 1918 sous la direction de M. Paul Stroobant.

— *Institut international d'anthropologie. Rapports préalables.*

— Remerciements.

RAPPORTS.

Par MM. Verschaffelt et de Hemptinne sur un travail intitulé : *Contribution à l'étude de l'aimantation,* par M. Stevelinck. — Dépôt aux archives.

Par M. de la Vallée Poussin sur une note de M. Droesbeke : *Calcul du rendement des hélices aériennes* et *Détermination de la hauteur du plafond.* — Le dépôt aux archives est proposé.

Par MM. Stuyvaert et Neuberg sur une note de M. Godeaux : *Les surfaces bicanoniques doubles ayant un nombre fini de points de diramation.* — L'auteur sera invité à modifier son travail de façon à donner satisfaction aux observations des rapporteurs.

PROPOSITION DE LA COMMISSION DE LA FONDATION DE POTTER.

Sur avis favorable de MM. de la Vallée Poussin, Demoulin et Deruyts, une subvention de 1,800 francs est votée pour l'impression du travail de M. Stuyvaert : *Algèbre à deux dimensions.*

PRIX DÉCENNAUX.

M. Swarts propose que la décision de la Classe au sujet de ces prix soit communiquée à la Classe des lettres.

TOMAISON DES BULLETINS.

La Classe est d'avis de conserver l'usage de la tomaison.

COMMISSION ADMINISTRATIVE.

La Classe désigne M. Stroobant comme suppléant de son Directeur au sein de la Commission administrative.

CONSEIL INTERNATIONAL DE RECHERCHES SCIENTIFIQUES.

La Classe est d'avis que l'adhésion à l'Union internationale de chimie doit être donnée par l'Académie comme pour les autres Unions. Pour l'organisme adhérant au Conseil et aux Unions, la Classe adopte la solution proposée par M. Lecointe : l'Académie sera l'organisme faisant acte d'adhésion, quitte à déléguer éventuellement ses pouvoirs. Elle adopte également les propositions budgétaires à faire au Gouvernement pour les Unions dont les statuts sont définitifs.

COMMUNICATIONS.

M. Lohest : *Discordance de stratification entre le Calcaire carbonifère et le Houiller en Belgique* (note préliminaire). — Impression au *Bulletin* de la séance.

M. Henriot : *Sur les invariants optiques,* présenté par M. Verschaffelt, avec rapport verbal concluant à l'impression au *Bulletin* de la séance. — Celle-ci est adoptée.

M. Massart fait une communication *Sur quelques-unes des dernières nominations scientifiques en Belgique.* — A la suite de cette communication, la Classe décide à l'unanimité d'adresser au Président du Conseil des Ministres, au Ministre des Sciences et des Arts et au Ministre de l'Agriculture une protestation énergique contre ces nominations, en rappelant les prérogatives revendiquées à ce sujet par l'Académie.

COMMUNICATIONS ET LECTURES.

Discordance de stratification entre le Calcaire carbonifère et le Houiller en Belgique.

Note préliminaire,

par M. LOHEST, Membre de l'Académie.

Une tranchée de chemin de fer exécutée pendant la guerre par les Allemands entre Visé et Berneau a fourni des documents nouveaux pour la géologie de notre pays.

J'ai eu l'occasion de montrer la coupe de cette tranchée, en septembre dernier, aux membres de la Société géologique de Belgique et de la comparer à la coupe de la vallée de la Meuse entre Visé et Argenteau. Cet examen permet de conclure à une importante discordance de stratification entre le Calcaire carbonifère et le houiller dans cette région du pays.

Ces conclusions ont été généralement admises par les géologues belges et étrangers qui assistaient à cette excursion.

Les documents concernant ce fait intéressant pour la géologie belge seront publiés à la Société géologique de Belgique.

PHYSIQUE THÉORIQUE. — **Sur les invariants optiques,**

par E. HENRIOT (*).

Par la comparaison des indices d'une substance à l'état amorphe et à l'état cristallisé, on peut, en théorie, évaluer les grandeurs que j'ai désignées dans ma dernière note (**) par γ_0 et γ_e et qui ne dépendent que de la structure. Cependant, si l'on a affaire à des cristaux qui ne sont pas très biréfringents, la quantité qui doit être invariante :

$$\frac{1}{d}\left\{\frac{n_x^2-1}{n_x^2+2+\gamma_{xx}(n_x^2-1)}+\frac{n_y^2-1}{n_y^2+2+\gamma_{yy}(n_y^2-1)}+\frac{n_z^2-1}{n_z^2+2+\gamma_{zz}(n_z^2-1)}\right\}$$

peut s'écrire, si les γ sont petits :

$$\frac{1}{d}\left\{\frac{n_x^2-1}{n_x^2+2}\left(1-\gamma_{xx}\frac{n_x^2-1}{n_x^2+2}\right)+\cdots\right\}.$$

Soit n la valeur moyenne des trois indices et posons

$$n_x = n + \varepsilon_x.$$

Les termes contenant les γ_{xx} en facteurs seront de la forme

$$\frac{1}{d}\left(\frac{n^2-1}{n^2+2}\right)^2\left\{\left(1+\frac{12\varepsilon_x n}{(n^2-1)(n^2+2)}\right)\gamma_{xx}+\cdots\right\}$$

(*) Présenté par M. J.-E. Verschaffelt.

(**) E. HENRIOT, Sur les invariants optiques. (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique* [Classe des sciences], 1919, nº 9.)

ou au second ordre près :

$$\frac{1}{d}\left(\frac{n^2-1}{n^2+2}\right)^2 \left\{ \gamma_{xx} + \gamma_{yy} + \gamma_{zz} \right\} = 0.$$

Cette dernière quantité est nulle parce que la somme des trois termes de la parenthèse de droite l'est.

Donc lorsque les quantités γ diffèrent de zéro, sans devenir trop grandes, la quantité qui reste invariante doit être encore

$$\frac{1}{d}\left(\frac{n_x^2-1}{n_x^2+2} + \frac{n_y^2-1}{n_y^2+2} + \frac{n_z^2-1}{n_z^2+2}\right),$$

comme dans le cas où les γ sont nuls.

C'est vraisemblablement cette circonstance qui explique le succès de l'application de cette formule au cas du spath et de l'aragonite par M. Brillouin.

Ceci nous montre que si la précision des mesures n'est pas très élevée, l'équation d'invariance ne permet guère d'espérer obtenir expérimentalement la valeur des γ dans le cas du passage d'une substance uniaxe à l'état amorphe.

Les quantités γ interviennent également dans les termes qui fournissent les biréfringences. Prenons, par exemple, le cas des uniaxes, le cas des biaxes s'en déduisant immédiatement.

L'équation

$$\frac{4}{3}\pi a_0 = \frac{n_0^2-1}{n_0^2+2+\gamma_0(n_0^2-1)}$$

peut s'écrire :

$$\frac{3}{4\pi}\cdot\frac{1}{a_0} = \frac{n_0^2+2}{n_0^2-1} + \gamma_0. \qquad (a)$$

On aura de même :

$$\frac{3}{4\pi}\cdot\frac{1}{a_e} = \frac{n_e^2+2}{n_e^2-1} + \gamma_e \qquad (b)$$

et

$$2\gamma_0 + \gamma_e = 0. \qquad (c)$$

En retranchant (b) de (a) et en tenant compte de c), on obtient l'équation

$$\gamma_0 + \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{a_e} - \frac{1}{a_0}\right) = \frac{n_0^2 - n_e^2}{(n_0^2 - 1)(n_e^2 - 1)}. \qquad (d)$$

Si n_0 et n_e diffèrent peu l'un de l'autre, on peut écrire :

$$\gamma_0 + \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{a_e} - \frac{1}{a_0}\right) = \frac{2n_0(n_0 - n_e)}{(n_0^2 - 1)^2}. \qquad (d')$$

La biréfringence dépend de deux termes : Le premier γ_0, qui est déterminé uniquement par la forme de la maille du réseau, est le terme de structure. Il provient, en dernière analyse, de l'anisotropie du champ mécanique d'action moléculaire. Il est indépendant de la longueur d'onde lorsque cette dernière est grande, relativement à la distance de deux plans réticulaires voisins. Le deuxième terme est le terme d'anisotropie optique de la molécule. Il dépend des coefficients quasiélastiques d'un ou plusieurs électrons, suivant la direction de l'axe et la direction perpendiculaire. Soient f_0 et f_e ces coefficients quasiélastiques :

$$a_0 = \sum \frac{\mathrm{N}e^2}{f_0},$$

où

$$f_0 = m(\omega_0^2 - \omega^2) ;$$

e, m, ω, ω_0 sont respectivement la charge et la masse de la particule vibrante, la période et la période propre de cette particule, ces dernières multipliées par 2π.

S'il y a plusieurs particules vibrantes dans la molécule, c'est-à-dire plusieurs bandes d'absorption pour la substance, $\frac{1}{a_e} - \frac{1}{a_0}$ dépend de la longueur d'onde d'une manière complexe. Donc, en général, le deuxième terme de l'équation (d) ou (d'), qui fait intervenir des grandeurs expérimentales, dépendra de la longueur d'onde. C'est ainsi, par exemple, que pour le spath l'expérience donne :

λ	0,2144	0,4413	1,0973	2,0531
$\dfrac{n_0^2 - n_e^2}{(n_0^2 - 1)\,(n_e^2 - 1)}$ . . .	0,282	0,276	0,251	0,239

Cependant, s'il n'y a qu'une particule vibrante par molécule,

$$\frac{1}{a_e} - \frac{1}{a_0} = \frac{Ne^2}{m}(\omega_e^2 - \omega_0^2)$$

est indépendant de ω, c'est-à-dire de la longueur d'onde. Lorsque cette condition est réalisée, le second membre de (d) ou (d') doit être indépendant de λ.

Cette circonstance se réalise avec un certain nombre de cristaux peu biréfringents, notamment avec le quartz, qui fournit les résultats ci-dessous :

λ	0$^{\mu}$,1854	0$^{\mu}$,2062	0$^{\mu}$,2573	0$^{\mu}$,3082	0,4101	0,5893	1,0973	2,0531
$n_0 - n_e$	- 0,01415	- 0,01265	- 0,01090	- 0,01020	- 0,00953	- 0,00911	- 0,00872	- 0,00818
$\dfrac{2n_0\,(n_0 - n_e)}{(n_0^2 - 1)^2}$ . . .	- 0,0145	- 0,0145	- 0,0145	- 0,0146	- 0,0146	- 0,0146	- 0,0146	- 0 0145

Le deuxième membre de l'équation (d') reste constant à 1 °/₀ près environ, pendant que $n_0 - n_e$ varie de 14 à 8. L'indépendance de la quantité

$$\frac{n(n_0 - n_e)}{(n^2 - 1)^2}$$

vis-à-vis de la longueur d'onde existe donc dans ce cas. M. Havelock a signalé que dans le cas des biréfringences électrique ou magnétique, cette quantité doit être indépendante de λ. Il lui assigne comme origine l'existence seule de γ_0. L'expérience vérifie bien cette indépendance de la longueur d'onde.

Biréfringences provoquées. — Dans le phénomène de Kerr (biréfringence électrique), ou le phénomène de Cotton-Mouton (biréfringence magnétique), on intervient en orientant les molécules. Si cette orientation était quasitotale, comme dans le cas d'un cristal, il est vraisemblable qu'elle produirait une structure quasitotale, c'est-à-dire la disposition des molécules aux nœuds d'un réseau. Avec les moyens dont on dispose, l'orientation est généralement petite et il n'y a qu'un début de structure. Il est cependant vraisemblable que le terme de structure γ_0 et le terme d'anisotropie optique doivent intervenir pour déterminer la biréfringence. Dans la biréfringence par traction ou compression, on agit directement sur la structure, ce qui aura, en général, une action sur l'orientation.

On pourra distinguer le cas où l'on déforme un cristal et le cas où l'on déforme un corps isotrope.

Supposons, par exemple, d'abord que nous comprimions un cube de fluorine en exerçant une pression uniforme sur deux faces opposées. Avant la compression, le cristal était cubique; il devient quadratique.

Lorsque nous comprimons, γ_e, qui était nul dans un cristal cubique, va devenir positif; par suite, nous aurons

$$\gamma_0 < 0 \qquad n_0 - n_e < 0.$$

Notre cristal deviendra positif par compression. En effet, si nous fixons notre attention sur une molécule, les molécules situées dans la direction de la compression et qui ont une action polarisante se rapprochent, tandis que les molécules équatoriales qui ont une action dépolarisante s'éloignent; donc γ_e augmente.

On peut pousser plus loin l'évaluation des termes γ au moyen des remarques suivantes :

1° γ_{xx}, γ_{yy}, γ_{zz} ne dépendent que de la forme de la maille et non de ses dimensions. En utilisant les notations de ma précédente note, on a

$$h_z^p = \eta_{zz} p_z \qquad (e)$$

$$p_z = \mathrm{N} m_z = \frac{1}{abc} m_z. \qquad (f)$$

Si l'on diminue les dimensions a, b, c de la maille orthorhombique, en la laissant homothétique à elle-même, dans le rapport $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{abc}$ augmente comme r^3 ; si nous voulons que p_z soit le même, il faut multiplier le moment magnétique de chaque molécule par $\frac{1}{r^3}$. Moyennant quoi l'on voit que p_z ne change pas. Le moment magnétique étant divisé par r^3, les molécules sont rapprochées dans le rapport r ; comme elles agissent sur la molécule d'origine avec une force qui augmente comme $\frac{1}{r^3}$, l'action sur cette molécule n'est pas changée.

Dans cette transformation, h_z^p reste donc constant, p_z également ; il en est donc de même de η_{zz}.

$$\eta_{zz} = \frac{4}{3}\pi(1 + \gamma_{zz})$$

ne dépend donc que des quantités α et β définies par

$$a = c(1 + \alpha), \qquad b = c(1 + \beta).$$

2° η_{zz} dépend de α et de β d'une manière symétrique. Si α et β sont infiniment petits, on aura

$$\eta_{zz} = f(\alpha, \beta),$$

qui est une fonction symétrique en α et β. Les deux quantités étant infiniment petites, on devra avoir, en limitant le développement en série au premier terme :

$$\eta_{zz} = \mathrm{A}(\alpha + \beta),$$

A étant une constante purement numérique. Si donc nous faisons le calcul dans le cas d'un réseau quadratique, il sera fait pour tous les réseaux orthorhombiques différant peu du cube. Soit en effet le réseau quadratique

$$a = c(1 + k) \qquad b = c(1 + k);$$

on aura

$$\eta_{zz} = \mathrm{A} \,.\, 2k.$$

Il suffira dans le cas d'un réseau orthorhombique de prendre

$$2k = \alpha + \beta.$$

3° Si l'on écrit

$$\eta_{zz} = \mathrm{C}_{zz} + \zeta_{zz},$$

C_{zz} est l'action des molécules extérieures à une certaine surface de forme quelconque, mais possédant les plans de coordonnées comme plans principaux. Nous pouvons, par exemple, prendre une cavité quasicubique de dimensions

$$2qa, \qquad 2qb, \qquad 2qc,$$

ayant son centre sur la molécule considérée. On trouve alors pour cette surface :

$$\mathrm{C}_{zz} = \int \frac{\cos(n, z)\cos(r, z)}{r^2} d\mathrm{S} = 8 \operatorname{arc\,tg} \frac{ab}{c\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

qui se réduit, dans le cas de α et β très petits, à

$$\mathrm{C}_{zz} = \frac{4\pi}{3} + \frac{4}{\sqrt{3}}(\alpha + \beta). \qquad (g)$$

Pour ζ_{zz}, nous devrons évaluer l'action de toutes les molécules comprises dans la surface tracée plus haut :

$$\zeta_{zz} = -\sum \frac{abc}{r^3}\left(1 - \frac{3z^2}{r^2}\right)$$

Si l'on calcule l'action de toutes les molécules de coordonnées

$$ma, \quad nb, \quad pc,$$

on trouve, après une série de transformations faciles, que, en posant $\rho^2 = m^2 + n^2 + p^2$,

$$\zeta_{zz} = -\frac{(\alpha+\beta)}{2}\left\{\sum\frac{3}{\rho^3} - 5\sum\frac{m^4+n^4+p^4}{\rho^7}\right\}.$$

On peut, par exemple, faire le calcul pour toutes les molécules situées sur la surface quasicubique $2a$, $2b$, $2c$, puis sur la surface $4a$, $4b$, $4c$, puis sur la surface $6a$, $6b$, $6c$, etc.; on aura, en effectuant les calculs :

$$\zeta_{zz} = (\alpha+\beta)(3{,}9129 + 0{,}0822 + 0{,}0199 + \cdots);$$

d'où, par addition :

$$\eta_{zz} = C_{zz} + \zeta_{zz} = \frac{4\pi}{3} + 6{,}33\,(\alpha+\beta)$$
$$= \frac{4\pi}{3}(1 + \gamma_{zz}),$$

ce qui donne :

$$\gamma_{zz} = 1{,}51\,(\alpha+\beta).$$

Nous connaîtrons α et β dans le cas de la compression de la fluorine, dès que nous connaîtrons le coefficient d'allongement et de contraction transversale; en effet, dans ce cas, la maille déformée est homothétique au cristal déformé. Si la compression s'exerce dans le sens Oz,

$$\gamma_e = \gamma_{zz} = 1{,}51 \times 2\left\{\frac{a}{C} - 1\right\}. \qquad (i)$$

Cette quantité est positive dans le cas de la compression, puisque $a > c$. On aura donc dans ce cas :

$$\gamma_e > 0, \qquad \gamma_0 < 0$$

$$\gamma_0 + \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{1}{a_e} - \frac{1}{a_0}\right\} = \frac{2n(n_0 - n_e)}{(n^2-1)^2}.$$

Si l'orientation des molécules ne change pas, $\frac{1}{a_e} - \frac{1}{a_0}$ reste constant. Or quand le cristal était cubique, il était monoréfrigérent, et d'autre part, dans un réseau cubique, $\gamma_0 = 0$. Si donc l'orientation des molécules ne change pas, $\frac{1}{a_e} - \frac{1}{a_0}$, qui était nul dans le cas du réseau cubique, doit rester nul ; on devra donc avoir dans cette hypothèse :

$$\gamma_0 < 0, \qquad (n_0 - n_e) < 0$$

Le cristal deviendra positif par compression. Si cette règle ne se vérifie pas, c'est que la structure orthorhombique imposée donne au terme $\frac{1}{a_e} - \frac{1}{a_0}$ une valeur différente de zéro.

Essayons d'appliquer ceci à un corps primitivement amorphe comme le verre. La compression va lui donner une structure. On peut se rendre compte de cette structure en se représentant les molécules du corps primitivement amorphe comme réparties au sommet d'une infinité de réseaux cubiques superposés, ayant un nœud commun sur la molécule considérée. Ce qui revient à appliquer au corps isotrope la formule (i)

$$\gamma_0 = -\frac{\gamma_e}{2} = -1{,}51 \left\{ \frac{a}{C} - 1 \right\}$$

Si c_0 est le côté d'un cube de la substance avant compression, on aura, après compression :

$$\left\{ \begin{array}{l} c = c_0(1 - Ap \\ a = c_0(1 + Bp.). \end{array} \right.$$

Si l'on pose $\frac{B}{A} = \sigma = 0{,}25$ dans le cas du verre,

$$\gamma_0 = -1{,}51\, A(1 + \sigma)p.$$

Le coefficient A dans le cas du verre est égal à $\frac{1}{7\,10^5}$. Si l'on prend pour n la valeur 1,5, on aura

$$n_0 - n_e = -1.51 \,.\, A(1 + \sigma)p \,.\, \frac{n^2 - 1)^2}{2n} + \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{a_e} - \frac{1}{a_0}\right)\frac{(n^2 - 1)^2}{2n}.$$

Le premier membre du second terme donnerait à $n_0 - n_e$, s'il existait seul, une valeur toujours négative (cristal positif); or, les expériences de Pockels ont montré que pour les différents verres, le signe de $n_0 - n_e$ dans la compression n'est pas le même pour tous. Le premier terme étant nécessairement négatif, le deuxième terme doit jouer un rôle dans la biréfringence. Si l'on calcule l'effet du premier terme dans le cas d'une compression de 100 kilogrammes par centimètre, on trouve qu'il fournit à la biréfringence une contribution

$$0{,}140 \,.\, 10^{-3},$$

qui est du même ordre que la biréfringence observée. Le terme de structure et le terme d'anisotropie optique moléculaire doivent donc fournir des contributions qui sont du même ordre de grandeur à la biréfringence. Ceci semble assez général. Dans le cas du quartz, par exemple, j'ai calculé la valeur de γ_0, en procédant comme ci-dessus et en adoptant un réseau hexagonal composé de prismes hexagonaux, dont le rayon de base a et la hauteur c sont entre eux dans le rapport

$$\frac{c}{a} = 1{,}1$$

que leur assignent les rayons X; j'ai trouvé une biréfringence du même ordre de grandeur que la biréfringence réelle.

Le fait que ces deux ordres de grandeur sont voisins doit avoir des causes profondes. Il doit exister entre γ_0 et $\left(\frac{1}{a_e} - \frac{1}{a_0}\right)$ une relation qui reste à découvrir, mais vers laquelle on peut se diriger, en admettant que le champ d'action d'une molécule sur les autres, champ qui détermine la structure, a une origine électro-magnétique.

Séance du 6 décembre 1919.

M. A. Gravis, vice-directeur, occupe le fauteuil.
M. Paul Pelseneer, secrétaire perpétuel.

Sont présents : MM. Léon Fredericq, J. Neuberg, A. Lameere, Ch.-J. de la Vallée Poussin, Max Lohest, F. Swarts, J. Massart, A. Demoulin, A. Rutot, A. de Hemptinne, Victor Willem, Paul Stroobant, J. Verschaffelt, G. Lecointe, Émile Marchal, P. Nolf, *membres;* M. Stuyvaert, A. Brachet, *correspondants.*

COMITÉ SECRET.

La liste des candidats pour les places vacantes est adoptée sans discussion.

ÉLECTION DE LA COMMISSION DES FINANCES.

La Classe estime que les membres de cette Commission ne seront plus rééligibles après trois ans de fonctions. Elle nomme MM. le Paige, Deruyts, Fredericq, Neuberg et Lameere.

CORRESPONDANCE.

L'Académie de médecine fait connaître qu'elle approuve le rapport de l'Académie des sciences, au sujet des prérogatives académiques, et annonce qu'elle revendique des prérogatives analogues dans son domaine.

— La Classe a reçu de nombreuses lettres de remerciements à l'occasion d'invitations qu'elle a adressées à sa séance publique.

— Les autorités compétentes font savoir que depuis 1914, il a été délivré deux diplômes de docteur en sciences chimiques avec la plus grande distinction : à MM. Mund, par l'Université de Louvain, et à M. Van Laer, par l'Université de Bruxelles. Il y a lieu de décerner deux Prix Stas.

— L'Académie des Sciences du Portugal annonce qu'elle a inscrit parmi ses membres tous les membres actuels de l'Académie de Belgique. — Remerciements.

— M. H. Wilmotte demande si la Classe des sciences ne peut lui accorder une subvention pour ses recherches de physique. La Classe est d'avis que les travaux actuels de M. Wilmotte ne sont pas dans les conditions voulues.

— M. Ergo demande à pouvoir s'expliquer devant la Classe, au sujet de « ce qu'il y aurait à faire sur le terrain de l'art musical ».

La Classe se déclare incompétente.

— M. Stuyvaert remercie la Classe de la subvention qui lui a été accordée sur la Fondation De Potter.

PLI CACHETÉ.

La Classe accepte le dépôt d'un pli cacheté par M. G. Vincent.

RAPPORTS.

De MM. Fredericq et Willem, sur un travail de M. L. Remy : *La mensuration de la fatigue intellectuelle.* Avec certaines réserves sur le fond, et avec l'indication de figures à supprimer ou à modifier, l'impression est proposée.

De MM. Stuyvaert et Neuberg, sur le travail de M. Godeaux : *Les surfaces bicanoniques doubles, ayant un nombre fini de points de diramation,* qui avait été renvoyé à son auteur pour modifications. — Les rapporteurs concluent à l'impression au *Bulletin* et la Classe adopte ces conclusions.

PRÉSENTATION D'OUVRAGES.

Note on the liquidus in the dron-carbone diagram, par M. Cesàro.

Notions fondamentales de chimie organique, par M. Ch. Moureu.

Erklarung der Hochschullehrer des Deutschen Reiches, Berlin, 16 octobre, 1914. M. Massart prie la Classe d'accepter un exemplaire de la déclaration des professeurs des écoles supérieures d'Allemagne, d'octobre 1914, par laquelle 3,125 professeurs affirment leur solidarité avec « ce que les ennemis de l'Allemagne appellent le militarisme prussien ». Cet opuscule est devenu introuvable. L'exemplaire remis à l'Académie a échappé aux perquisitions allemandes. — Remerciements.

PROPOSITION DE MODIFICATION A L'ARTICLE 16 DU RÈGLEMENT.

La Classe avait décidé de consulter la Commission administrative, avant de passer au vote. Cette Commission a fait connaître qu'elle était unanimement défavorable à la modification proposée.

La Classe rejette la proposition.

MODIFICATION A L'ARTICLE 5 DU RÈGLEMENT DE LA FONDATION DE POTTER.

La Classe décide, à l'unanimité, de remplacer dans cet article (3^{e} alinéa) les mots « avril » et « novembre » respectivement par « mai » et « décembre ».

COMMUNICATIONS ET LECTURES.

M. Henriot : *Sur les invariants optiques,* présenté par M. Verschaffelt avec rapport verbal concluant à l'impression au *Bulletin.* — Adopté.

M. Crombez : *Mesures d'indices de réfraction de solution d'une substance absorbante,* présenté par M. Verschaffelt, avec rapport verbal concluant à l'impression au *Bulletin.* — Adopté.

M. Anten : *Sur le Salmien de la vallée de la Lienne,* présenté par M. Lohest, avec rapport verbal concluant à l'impression au *Bulletin.* — Adopté.

M. Fourmarier : *Le contact du dévonien et du calcaire carbonifère à Horion-Hozémont,* présenté par M. Lohest, avec rapport verbal concluant à l'impression au *Bulletin.* — Adopté.

M. H. Poutet : *Mémoire relatif à la multisection géométrique et intégrale de l'arc et de la circonférence.* — Renvoi à M. Stuyvaert.

Séance du 15 décembre 1919.

M. A. Gravis, vice-directeur, occupe le fauteuil.
M. Paul Pelseneer, secrétaire perpétuel.

Sont présents : MM. A. Gilkinet, J. Deruyts, Léon Fredericq, J. Neuberg, Maurice Delacre, A. Lameere, Ch.-J. de la Vallée Poussin, Frédéric Swarts, Jean Massart, A. Demoulin, A. Rutot, A. de Hemptinne, Victor Willem, Paul Stroobant, J. Verschaffelt, G. Lecointe, E. Marchal et Pierre Nolf, *membres;* Modeste Stuyvaert et A. Brachet, *correspondants.*

Absences motivées : MM. Bordet, Cornet, Julin et Lohest, *membres.*

Le procès-verbal de la dernière séance est lu et approuvé.

HOMMAGES D'OUVRAGES.

M. Jonckheere, divers travaux astronomiques, présentés par M. Lecointe, à la demande de la Société belge d'astronomie et de météorologie.

— *Études thermochimiques sur les combinaisons organiques fluorées*, et sur l'*Acide fluorcinnamique*, par M. Swarts.

— Remerciements.

ÉLECTIONS.

Sont élus :

Section des sciences mathématiques et physiques :

Membre : M. Cl. Servais.
Correspondants : MM. Th. De Donder et J. Boulvin.

Section des sciences naturelles :

Correspondants : MM. Paul Fourmarier, H. de Dorlodot, O. Van der Stricht et V. Grégoire.

RAPPORT.

Par M. M. Stuyvaert, sur un mémoire de M. Poutet relatif à la multisection géométrique de l'arc et de la circonférence. Le dépôt aux archives est proposé et adopté.

RÉINAUGURATION DE L'UNIVERSITÉ DE STRASBOURG.

Paroles prononcées par M. Swarts.

MESSIEURS,

Vos délégués à la réinauguration de l'Université de Strasbourg rapportent de leur mission un souvenir impérissable. Nous ne saurions trouver les termes appropriés pour vous dire l'émotion poignante qui nous a étreints au spectacle de l'enthousiasme avec lequel a été célébré le retour dans la famille universitaire française de la vieille université alsacienne, qu'un coup de force lui avait arrachée pendant quarante-huit ans, pour la transformer en un organisme de germanisation des provinces volées. Combien vaine fut cette misérable tentative, c'est ce dont nous aurions pu nous convaincre, si déjà notre conviction n'eût été faite. De toutes les impressions ressenties par nous dans ces fêtes grandioses, qu'aucune note discordante ne vint troubler, la plus profonde est celle qu'ont provoquée les touchantes et unanimes manifestations d'attachement à la France, venues non seulement de l'Alsace-Lorraine officielle, des professeurs, des étudiants, qui hier encore combattaient sous un uniforme abhorré, mais aussi du peuple tout entier.

Vous n'attendez pas de nous un compte rendu détaillé et fidèle des cérémonies imposantes auxquelles nous fûmes conviés; celle au cours de laquelle M. le Président de la République ouvrit à nouveau l'Université de Strasbourg, devant les maréchaux de France, dont le génie assura le triomphe du droit et la restitution des territoires français arrachés par la violence il y a un demi-siècle, devant les représentants des corps savants de la France et de tous les pays alliés, devant les étudiants accourus si nombreux, laissera chez tous ceux qui eurent le bonheur et l'honneur d'y assister une impression ineffaçable de majesté et de foi patriotique dans l'avenir de ce foyer de science française qu'est l'Université de Strasbourg.

Et comment vous dépeindre l'accueil qui nous fut réservé. En vous disant que nous fûmes les hôtes de la France, nous résumons en quelques mots tous les témoignages de sympathie, mieux, d'affection cordiale et profonde dont nous avons été comblés. Vos délégués vous remercient pour leur avoir permis de se joindre à ceux de tous les peuples qui luttèrent avec notre noble alliée pour la réparation de l'iniquité et l'affranchissement du monde du despotisme germanique et qui ont apporté à Strasbourg, en ces circonstances solennelles, les félicitations et l'expression de la sympathie du monde scientifique. Nous, Belges, qui pendant quatre ans avons vécu sous la botte prussienne, avons senti peut-être mieux que d'autres ce que fêtaient en ces jours mémorables l'Alsace-Lorraine et son Université rendues à la Patrie.

Nous ne saurions terminer sans témoigner à nos hôtes notre profonde reconnaissance pour les attentions aussi délicates que discrètes dont ils nous ont entourés pendant notre séjour à Strasbourg.

CENTENAIRE.

La Classe, consultée sur ce point par la Commission administrative, est d'avis que le centenaire de l'Académie doit être célébré, notamment par une publication de circonstance et par une séance solennelle à laquelle seront invités les délégués des Académies interralliées, le tout sous réserve que les ressources nécessaires ne seraient pas prises sur le budget ordinaire de l'Académie.

TABLES DES CONSTANTES PHYSIQUES.

Il est décidé que l'Académie demandera au Gouvernement une nouvelle subvention pour aider à la publication du volume pour 1914 à 1916. Il est décidé également, sur la proposition de M. Swarts, que la même subvention qu'en 1912, 1913 et 1914 sera demandée pour les années 1920 et suivantes.

M. de Hemptinne est désigné pour remplacer feu M. De Heen au sein de la Commission pour la publication des Constantes physiques.

COMMUNICATIONS ET LECTURES.

M. J. Boëns adresse une communication intitulée : *Électricité atmosphérique et paratonnerres*. Renvoi à MM. de Hemptinne et Verschaffelt.

MM. Rutot et de Hemptinne communiquent leurs lectures destinées à la séance publique. M. le Directeur leur adresse les remerciements de la Classe.

M. Delacre demande si la traduction d'un grand ouvrage flamand de van Helmont ne pourrait être demandée par la Classe, dans un de ses concours. Des membres sont d'avis que les concours annuels exigent des travaux originaux. Il est suggéré que la traduction de l'ouvrage signalé pourrait éventuellement être encouragée par la Fondation De Potter.

NOTE BIBLIOGRAPHIQUE.

A la demande de la Société belge d'Astronomie et de Physique du Globe, j'ai l'honneur de présenter à la Classe des sciences divers travaux dus à M. Robert Jonckheere, directeur de l'Observatoire de l'Université de Lille et directeur des Travaux d'astronomie pratique à la Faculté des sciences.

Le plus important de ces travaux consiste en un catalogue et en mesures d'étoiles doubles effectuées de 1905 à 1916, avec un équatorial auquel M. Jonckheere avait donné intentionnellement une grande longueur focale et avait fait placer devant l'objectif un diaphragme iris, permettant de changer l'angle de séparation des anneaux de l'étoile principale.

L'Académie des sciences de Paris a décerné le prix Lalande à l'auteur de ce catalogue.

Les autres travaux de M. Robert Jonckheere, publiés notamment dans les *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris,* dans *Le Journal astronomique,* dans *The Astronomical Journal,* dans les *Monthly Notices of R. A. S.*, dans le *Bulletin astronomique* et dans le *Bulletin de la Société astronomique de France,* portent essentiellement sur des mesures d'étoiles doubles, sur la longitude de l'Observatoire de Lille déterminée par la T. S. F., sur Sirius et Procyon, sur le diamètre de Mercure, sur la comète de Encke, sur la planète Mars et sur l'éclipse de Lune des 16-17 novembre 1910.

J'attire l'attention de la Classe des sciences de l'Académie royale de Belgique sur les travaux de M. Robert Jonckheere (dont le père était Belge d'origine), qui a érigé à ses frais l'Observatoire de Hem.

Lorsque Lille tomba aux mains des Allemands, M. Jonckheere, réformé au point de vue militaire, se rendit en Angleterre et fut admis à travailler à l'Observatoire de Greenwich, où une partie des observations précitées furent effectuées. G. Lecointe.

PROGRAMME DE CONCOURS POUR 1921.

(Délai : 1er août 1921.)

SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES.

PREMIÈRE QUESTION.

Apporter une contribution à l'étude des propriétés des fonctions analytiques qui ne prennent pas certaines valeurs dans un domaine donné. — Prix : 1000 francs.

DEUXIÈME QUESTION.

On demande une contribution à l'étude des transformations birationnelles dans un espace à plus de deux dimensions. — Prix : 1000 francs.

TROISIÈME QUESTION.

On demande de nouvelles recherches sur la dispersion dans des solutions de substances fortement absorbantes. — Prix : 1000 francs.

QUATRIÈME QUESTION.

Faire un exposé critique des déterminations du mouvement du système solaire dans l'espace et apporter une contribution originale à nos connaissances sur cette question. — Prix : 1000 francs.

CINQUIÈME QUESTION.

On demande une contribution à l'étude de la valence. — Prix : 1000 francs.

SCIENCES NATURELLES.

PREMIÈRE QUESTION.

On demande des recherches sur la morphologie, la biologie et la systématique d'un groupe de Diptères. — Prix : 1000 francs.

DEUXIÈME QUESTION.

Étudier la cytologie de tissus végétaux parasités. — Prix : 1000 francs.

TROISIÈME QUESTION.

On demande des recherches originales sur l'hérédité dans des types végétaux. — Prix : 1000 francs.

QUATRIÈME QUESTION.

Augmenter l'état de nos connaissances concernant les conditions de formation des couches calcaires des terrains belges. — Prix : 1000 francs.

Conditions réglementaires.

Les mémoires devront être inédits et écrits lisiblement. Ils pourront être rédigés en français, en flamand ou en latin; ils devront être adressés, francs de port, à M. le Secrétaire perpétuel, au Palais des Académies, avant le 1er août 1921.

L'Académie exige la plus grande exactitude dans les citations; les auteurs auront soin, par conséquent, d'indiquer les éditions et les pages des ouvrages cités. On n'admettra que des planches manuscrites ou photographiques.

Les auteurs ne mettront point leur nom à leur ouvrage ; ils y inscriront seulement une devise, qu'ils reproduiront sur un pli cacheté renfermant leur nom et leur adresse ; il est défendu de faire usage d'un pseudonyme. Faute de satisfaire à ces formalités, le prix ne pourra être accordé.

Les mémoires remis après le terme prescrit et ceux dont les auteurs se feront connaître, de quelque manière que ce soit, seront exclus du concours.

L'Académie croit devoir rappeler aux concurrents que les mémoires soumis à son jugement sont et restent déposés dans ses archives. Toutefois, les auteurs peuvent en faire prendre copie, à leurs frais, en s'adressant à cet effet au Secrétaire perpétuel.

COMMUNICATIONS ET LECTURES.

Géométrie algébrique. — **Les surfaces bicanoniques doubles ayant un nombre fini de points de diramation,**

par Lucien GODEAUX (*).

L'un des problèmes que se pose la Géométrie algébrique est celui de déterminer, dans chaque classe de surfaces (ou variétés) algébriques, une surface (ou variété) particulière dont les sections planes ou hyperplanes sont des courbes (ou variétés) canoniques ou pluricanoniques. Une surface dont les sections planes ou hyperplanes sont des courbes i-canoniques est appelée brièvement surface i-canonique. Dans un mémoire récent sur la classification des surfaces algébriques, M. Enriques écrivait (**) :

« La determinazione dei casi in cui le superficie canoniche
» o bicanoniche, ecc. si riducano a superficie multiple, costi-
» tuisce un problema, che sembra ammettere un picolo
» numero di soluzioni, e che additiamo all' attenzione degli
» studiosi. »

Au cours de nos recherches sur les surfaces possédant des involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence, nous avons rencontré des surfaces dont le système bicanonique est composé au moyen d'une telle involution, d'ordre 2; et nous avons pu déterminer toutes ces surfaces. L'objet de ce

---

(*) Présenté par MM. Neuberg et Stuyvaert.

(**) F. Enriques, *Sulla classificazione delle superficie algebriche e particolarmente sulle superficie di genere lineare* $p^{(1)} = 1$. (Rend. R. Accad. Lincei, 1° sem. 1914 [note au bas de la page 210].)

petit travail est donc de déterminer quelles sont les surfaces bicanoniques doubles ayant un nombre fini de points de diramation. C'est donc une première contribution au problème signalé par M. Enriques.

Nous établissons le théorème suivant :

Les surfaces algébriques de genre géométrique supérieur à l'unité, dont le système canonique n'est pas formé au moyen des courbes d'un faisceau et dont le système bicanonique est composé avec une involution d'ordre 2, n'ayant qu'un nombre fini de points de coïncidence, ont les genres

$$p^{(1)} = 7, \qquad p_a = 0, \qquad p_g = 3, \qquad P_2 = 7, \qquad P_3 = 19, \ldots$$

On peut prendre, pour modèle projectif de ces surfaces, une surface bicanonique double, d'ordre 12, à sections hyperplanes de genre 10, de S_6***, possédant vingt-huit points de diramation qui sont des points doubles coniques.***

De pareilles surfaces existent certainement: l'une d'elles est la surface qui représente les couples de points non ordonnés d'une courbe de genre 3.

Pour établir ce théorème, nous avons besoin d'une propriété des surfaces doubles, qui se déduit facilement des résultats obtenus dans un mémoire publié en 1914 (*), ainsi que nous le montrons dans le dernier paragraphe de cette note.

1. — Soit F une surface algébrique de genre géométrique $p_g > 1$, dont le système canonique $|C|$ n'est pas formé par les courbes d'un faisceau, et dont le système bicanonique $|2C|$ est composé au moyen d'une involution I_2, d'ordre 2, ayant α points de coïncidence. Désignons par Φ une surface image de cette involution I_2.

(*) Godeaux, *Mémoire sur les surfaces algébriques doubles ayant un nombre fini de points de diramation.* (Annales de la Faculté des sciences de Toulouse, 1914.)

ayant un nombre fini de points de diramation.

Entre les genres arithmétiques p_a, π_a et les genres linéaires $p^{(1)}$, $\pi^{(1)}$, respectivement de F et Φ, nous avons les relations (*)

$$p_a = 2\pi_a - \frac{\alpha}{4} + 1, \tag{1}$$

$$p^{(1)} - 1 = 2(\pi^{(1)} - 1). \tag{2}$$

Le système bicanonique $|2C|$ de F est adjoint au système canonique $|C|$ et, par hypothèse, C est apte à décrire un système continu qui n'est pas un faisceau irrationnel. Par suite, d'après le théorème de MM. Picard et Severi (**), $|2C|$ est régulier et le bigenre P_2 de F a pour valeur $P_2 = p_a + p^{(1)}$.

Le système $|2C|$ étant composé au moyen de I_2, une courbe canonique C de F contient nécessairement ∞^1 groupes de cette involution et il lui correspond, sur Φ, une courbe Γ qui est une courbe canonique de cette dernière surface. Par suite, Γ est apte à décrire un système continu qui n'est pas un faisceau irrationnel. Raisonnant sur le système bicanonique $|2\Gamma|$ de Φ comme on l'a fait sur $|2C|$, on trouve que le bigenre Π_2 de Φ est $\Pi_2 = \pi_a + \pi^{(1)}$.

Mais on a donc, puisque $|2C|$ est composé avec I_2, $P_2 = \Pi_2'$,

$$p_a + p^{(1)} = \pi + \pi^{(1)}. \tag{3}$$

2. — Pour la surface algébrique Φ, de genre géométrique π_g, on a l'inégalité de Noether :

$$\pi^{(1)} - 1 \geqslant 2\pi_g - 4.$$

(*) Godeaux, *loc. cit.*

(**) E. Picard, *Sur quelques questions se rattachant à la connexion linéaire dans la théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes.* (Journal de Crelle, 1905.) — Picard et Simart, *Traité des fonctions algébriques de deux variables indépendantes,* 1906, t. II. — Severi, *Sulla regolarità del sistema aggiunto ad un sistema lineare di curve appartenente ad una superficie algebrica.* (Rend. R. Accad. Lincei, 2° sem. 1908.)

En combinant (2) et (3), on trouve

$$\pi^{(1)} - 1 = \pi_a - p_a ;$$

donc l'inégalité précédente devient

$$\pi_a \geqslant 2\pi_g + p_a - 4. \tag{4}$$

Mais $\pi_a \leqslant \pi_g$; donc

$$\pi_g + p_a \leqslant 4. \tag{5}$$

Observons que

1° Le genre géométrique de F est égal à celui de Φ, parce que à une courbe C correspond une courbe Γ : $p_g = \pi_g$.

2° On a $p_g > 2$, puisque, par hypothèse, $|C|$ n'est pas composé avec un faisceau et, à fortiori, n'est pas un faisceau.

3° On a $p_a \geqslant 0$, car si $p_a < 0$, F est une réglée $(P_2 = 0)$ ou une surface elliptique $(p_a = -1)$. Dans ce dernier cas, le système canonique est composé au moyen d'un faisceau (Enriques).

4° On a $\pi_a \leqslant \pi_g$ et $\pi_g = p_g$; donc l'inégalité (4) fournit les valeurs possibles de π_a :

$$p_g \geqslant \pi_a \geqslant 2\pi_g + p_a - 4.$$

L'inégalité (5) donne, moyennant les observations 2° et 3°, les valeurs possibles de p_g et p_a, à savoir : $p_g = 4$, $p_a = 0$; $p_g = 3$, $p_a = 1$; $p_g = 3$, $p_a = 0$. Partant de chacun de ces couples de valeurs, on détermine $\pi_g = p_g$ et π_a par l'observation 4°. Les formules (1), (2) et (3) donnent alors les valeurs de $p^{(1)}$, $\pi^{(1)}$ et α.

En résumé, on trouve quatre cas possibles :

1° $p_g = \pi_g = 4,\quad p_a = 0,\quad p^{(1)} = 9,\quad \pi_a = 4,\quad \pi^{(1)} = 5,\quad \alpha = 36;$
2° $p_g = \pi_g = 3,\quad p_a = 1,\quad p^{(1)} = 5,\quad \pi_a = 3,\quad \pi^{(1)} = 3,\quad \alpha = 24;$
3° $p_g = \pi_g = 3,\quad p_a = 0,\quad p^{(1)} = 5,\quad \pi_a = 2,\quad \pi^{(1)} = 3,\quad \alpha = 20;$
4° $p_g = \pi_g = 3.\quad p_a = 0,\quad p^{(1)} = 7,\quad \pi_a = 3,\quad \pi^{(1)} = 4,\quad \alpha = 28.$

Observons que dans les trois premiers cas on a

$$\pi^{(1)} = 2\pi_g - 3$$

et que, par suite, les courbes canoniques de Φ sont hyperelliptiques (Noether) (*).

3. — Examinons le premier cas. Si nous rapportons projectivement les courbes canoniques C de F aux plans d'un espace linéaire à $p_g - 1 = 3$ dimensions, nous obtenons un modèle projectif canonique de Φ (puisque $|C|$ est nécessairement composé avec I_2) qui se réduit comme on sait (**) à une quadrique Ψ double, possédant une courbe de diramation d'ordre 12.

Appliquons à cette quadrique double le second corollaire du théorème établi à la fin de ce travail. La courbe de diramation doit se décomposer en deux courbes ayant, soit α, soit $\alpha - 2$ points communs. Or $\alpha = 36$. On se rend aisément compte de ce qu'une courbe d'ordre 12, tracée sur une quadrique, ne peut dégénérer en deux courbes ayant soit 36, soit 34 points communs. (Il suffit, par exemple, de projeter la courbe sur un plan d'un point de la quadrique.) Le premier cas ne peut donc se présenter.

4. — Les deuxième et troisième cas s'éliminent de la même manière; nous les traiterons simultanément. En rapportant projectivement les courbes canoniques C de F aux droites d'un plan ($p_g = 3$), on obtient comme modèle projectif canonique de Φ un plan double dont la courbe de diramation D est d'ordre 8 (***).

(*) Les surfaces à courbes canoniques hyperelliptiques ont été déterminées par M. Enriques, *Sopra le superficie algebriche di cui le curve canoniche sono iperellittiche.* (Rend. R. Accad. Lincei, 1° sem. 1896.)

(**) Enriques, *loc. cit.*

(***) Enriques, *loc. cit.*

D'après le premier corollaire du théorème établi à la fin de ce travail, cette courbe D doit se scinder en deux autres ayant soit $\alpha = 24$ (2^e cas), soit $\alpha = 20$ (3^e cas) points communs. Cela n'est pas possible; donc les deux cas étudiés ici ne peuvent se présenter.

5. — Passons au quatrième cas. Rapportons projectivement les courbes bicanoniques $2C$ de F aux hyperplans d'un espace linéaire à $P_2 - 1 = p_a + p^{(1)} - 1 = 6$ dimensions. Nous obtenons une surface bicanonique Φ, d'ordre $\frac{1}{2} \cdot 4(p^{(1)} - 1) = 12$, à sections hyperplanes 2Γ de genre 10 (on calcule celui-ci en appliquant la formule de Zeuthen à la correspondance existant entre une courbe $2C$ et la courbe 2Γ homologue).

Supposons que Φ se réduise à une surface Ψ n-uple, n étant naturellement un diviseur de 12. Désignons par i_n l'involution d'ordre n formée, sur Φ, par les groupes de points correspondant aux points de Ψ. Une courbe bicanonique 2Γ de Φ contient ∞^1 groupes de i_n par hypothèse; il en sera de même d'une courbe canonique Γ, puisque cette courbe, comptée deux fois, est une courbe bicanonique. Nous voyons donc que le système canonique $|\Gamma|$ est également composé avec i_n. Or, $|\Gamma|$ a le degré $\pi^{(1)} - 1 = 3$, donc $n = 3$. Mais alors, Φ se réduit à une surface Ψ triple d'ordre 4, située dans un espace linéaire à 6 dimensions S_6. Cela est absurde, car une surface d'ordre 4 est contenue dans un espace linéaire ayant au plus 5 dimensions. On en conclut que Φ est une surface simple.

Nous savons que la surface Φ possède 28 points doubles coniques qui correspondent aux 28 points de coïncidence de I_2 sur F (*).

Les plurigenres de F se calculent en remarquant que le système i-canonique $|iC|$ de cette surface est adjoint au système

---

(*) Godeaux, *loc. cit.*

$(i-1)$-canonique $|(i-1)\,C|$ et en appliquant le théorème de Picard-Severi déjà invoqué plus haut. On trouve facilement que le i-genre P_i de F est

$$P_i = p_a + \frac{i(i-1)}{2}(p^{(1)}-1)+1 = 3i(i-1)+1.$$

De même, le i-genre Π_i de Φ est égal à

$$\Pi_i = \pi_a + \frac{i(i-1)}{2}(\pi^{(1)}-1)+1 = \frac{3}{2}i(i-1)+4.$$

En particulier, pour les trigenres, on a $P_3 = 19$, $\Pi_{i3} = 13$.

6. — Nous aurons complètement démontré le théorème énoncé dans le préambule lorsque nous aurons prouvé les deux théorèmes dont nous avons fait usage aux paragraphes 3 et 4. Nous démontrerons un théorème plus général dont les deux précédents ne sont que des corollaires.

Soit F' une surface algébrique possédant une involution I_2, d'ordre 2, douée d'un nombre fini $\alpha > 0$ points de coïncidence. Soit Φ' une surface normale simple, de S_r, image de I_2.

Si $x_1, x_2, \dots, x_r$ sont les coordonnées cartésiennes de S_r, soient

$$\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_r) = 0, \qquad \varphi_2 = 0, \dots, \varphi_{r-2} = 0$$

les équations de Φ'. Comme nous le savons (*), la surface Φ' possède α points doubles coniques, correspondant aux points de coïncidence, et il existe au moins une hypersurface

$$f(x_1, x_2, \dots, x_r) = 0$$

passant par ces α points doubles et touchant Φ' en chaque point

---

(*) Godeaux, *loc. cit.*

d'intersection. Et les équations de la surface F′, dans un S_{r+1}, peuvent se mettre sous la forme

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \dots, \quad \varphi_{r-2} = 0, \quad x_{r+1}^2 = f(x_1, x_2, \dots, x_r).$$

Supposons que la surface Φ′ possède une transformation birationnelle en elle-même, Θ, ayant une infinité de points invariants formant une courbe Δ et laissant invariant l'ensemble des α points de diramation. Soient

$$x'_i = \chi_i(x_1, x_2, \dots, x_r), \qquad (i = 1, 2, \dots, r)$$

les équations de cette transformation.

La surface F′ possède trois transformations birationnelles involutives, deux-à-deux permutables, en elle-même, à savoir

$$\begin{array}{lll} (\mathrm{T}) & x'_i = x_i, & x'_{r+1} = -x_{r+1}, \\ (\mathrm{T}_1) & x'_i = \chi_i, & x'_{r+1} = -x_{r+1}, \\ (\mathrm{T}_2) & x'_i = \chi_i, & x'_{r+1} = x_{r+1}, \\ & \multicolumn{2}{c}{(i = 1, 2, \dots, r),} \end{array}$$

dont la première engendre I_2.

Si P_1, P_2 sont deux points de Φ′ homologues pour Θ, il leur correspond, sur F′, quatre points, respectivement P_{11}, P_{12}; P_{21}, P_{22}. Si P_{11} coïncide avec P_{21}, P_{12} coïncide avec P_{22} et P_1 avec P_2; or P_{11} est transporté en P_{21} par l'une des transformations T_1, T_2; donc à un point invariant pour T_1 ou T_2 correspond un point de la courbe Δ. Inversement, si P_1 coïncide avec P_2, P_{11} coïncide soit avec P_{21}, soit avec P_{22} et, par suite, à un point de Δ correspondent des points invariants pour T_1 ou pour T_2.

En d'autres termes, si nous appelons D la courbe qui correspond à Δ sur F′, les points de D sont invariants soit pour T_1, soit pour T_2.

Observons de plus que si les trois points P_{11}, P_{12}, P_{21} coïncident, P_{22} sera également confondu avec eux, c'est-à-dire que si l'un des α points de coïncidence de I_2 se trouve sur D, ce sera un point invariant pour T_1 et T_2 à la fois.

De tout ceci on conclut que la courbe D se scinde en deux courbes D_1, D_2 de coïncidence l'une pour T_1, l'autre pour T_2, et que les points d'intersection de D_1, D_2 sont les points de coïncidence de I_2.

Soit maintenant Ψ une surface normale, image de l'involution engendrée sur Φ' par Θ et telle que à ses sections hyperplanes correspondent, sur Φ', les courbes ne passant pas en général par les α points doubles coniques.

La surface Ψ possède une courbe de diramation Δ' (aux points de laquelle correspondent des couples de points coïncidents sur Φ') qui se scinde en deux courbes Δ'_1, Δ'_2 correspondant respectivement à D_1, D_2 (Δ' correspond donc à Δ qui se scinde évidemment, comme D, en deux courbes). Les α_2 points communs à Δ'_1, Δ'_2 correspondent à des points de coïncidence de I_2 sur F'. A chaque couple de points de coïncidence de I_2 non situés sur $D \equiv D_1 + D_2$, invariant pour T_2 et T_1, correspond un seul point de Ψ et ce point est un point double conique (*). Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Si une surface normale double Φ' ayant une courbe de diramation d'ordre supérieur à zéro est l'image d'une involution d'ordre 2 appartenant à une surface F' et possédant α points de coïncidence, cette surface double possède α_1 points doubles coniques, et la courbe de diramation (qui ne passe pas par ces points doubles) se scinde en deux courbes ayant $\alpha_2 = \alpha - 2\alpha_1$ points communs.

Remarquons que le raisonnement précédent n'exclut pas le cas où $\alpha_2 = 0$; mais ce cas ne nous intéresse pas ici.

(*) GODEAUX, *loc. cit.*

Supposons que la surface normale double Φ' soit un plan double (nous admettons donc que le système des droites doubles plan double Φ' est complet). Alors, on a nécessairement $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_2 = \alpha$; par suite

I. — ***Si un plan double normal est l'image d'une involution d'ordre 2 appartenant à une surface et possédant α points de coïncidence, sa courbe de diramation se scinde en deux courbes ayant α points communs.***

Supposons maintenant que Φ' soit une quadrique double normale. On peut avoir actuellement $\alpha_1 = 1$ ou $\alpha_1 = 0$, d'où $\alpha_2 = \alpha - 2$ ou $\alpha_2 = 0$; donc

II. — ***Si une quadrique double normale est l'image d'une involution d'ordre 2 appartenant à une surface et possédant α points de coïncidence, sa courbe de diramation se scinde en deux autres ayant soit $\alpha - 2$, soit α points communs.***

Nous avons ainsi énoncé les deux corollaires dont nous avons fait usage plus haut.

Polygone de Brasschaet, 30 mai 1919.

Physique théorique. — Sur les invariants optiques,

par E. HENRIOT (*).

La biréfringence, lorsqu'elle est petite, est fournie par la relation

$$\gamma_0 + \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{a_e} - \frac{1}{a_0}\right) = \frac{2n(n_0 - n_e)}{(n^2 - 1)^2} \text{ (**)}.$$

Le terme γ_0, qui est dû à la structure réticulaire, est complètement calculable géométriquement en fonction des paramètres du réseau. Par contre, a_0 et a_e sont des grandeurs qui font intervenir des forces existant dans la molécule. Or j'ai montré précédemment que les biréfringences calculées au moyen de cette formule, en admettant que γ_0 existe seul dans le premier membre, sont du même ordre que les biréfringences observées, mais plus grandes. Les deux termes du membre de gauche doivent être du même ordre de grandeur, mais le second doit être soustractif. Il faut expliquer l'identité de l'ordre de grandeur de deux termes d'origine si différente. J'ai montré récemment qu'on peut expliquer cette identité d'ordre de grandeur en admettant, dans les cristaux et les corps biréfringents, l'existence d'une polarisation spontanée, se produisant sans intervention des champs extérieurs. Il existe entre $\vec{p}$, $\vec{h}$, a_{xx}, η_{xx}, une relation de la forme

$$p_x = a_{xx}(h_x + \eta_{xx} p_x).$$

(*) Présenté par M. J.-E. Verschaffelt.

(**) Les notations employées sont celles des notes publiées dans les deux derniers *Bulletins*.

On admet généralement que $\overrightarrow{p}$ et $\overrightarrow{h}$ sont liés par une relation linéaire, si bien que $\overrightarrow{h} = 0$ entraîne $\overrightarrow{p} = 0$. Si donc dans la dernière équation nous faisons $h_x = 0$, p_x devient nul et l'on ne peut rien tirer de cette équation.

Si, au contraire, quand $\overrightarrow{h} = 0$, $\overrightarrow{p}$ est différent de 0, l'équation précédente garde un sens. Désignons par l'indice (s) les grandeurs relatives à une polarisation spontanée. Cette équation devient

$$a_{xx}^{(s)} \eta_{xx} = 1,$$

où

$$a_{xx}^{(s)} = \frac{Ne^2}{f_x^{(s)}}.$$

Admettons qu'entre les η existe toujours la relation

$$\eta_{xx} + \eta_{yy} + \eta_{zz} = 4\pi.$$

Nous reviendrons plus tard sur l'exactitude de cette relation. Nous avons alors

$$\frac{1}{a_{xx}^{(s)}} + \frac{1}{a_{yy}^{(s)}} + \frac{1}{a_{zz}^{(s)}} = 4\pi. \tag{1}$$

Posons

$$\left\{ \begin{aligned} a_{xx}^{(s)} &= a_{yy}^{(s)} = a_0 \\ a_{zz}^{(s)} &= a_e. \end{aligned} \right.$$

Il vient

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{a_e^{(s)}} &= \frac{4}{3}\pi(1 + \gamma_e) \\ \frac{1}{a_0^{(s)}} &= \frac{4}{3}\pi(1 + \gamma_0). \end{aligned} \right.$$

Ces équations, retranchées membre à membre et en tenant compte de la relation

$$2\gamma_0 + \gamma_e = 0,$$

nous donnent

$$\gamma_0 = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{a_e^{(s)}} - \frac{1}{a_0^{(s)}}\right),$$

et la formule donnant la biréfringence devient

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{a_e} - \frac{1}{a_0}\right) - \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{a_e^{(s)}} - \frac{1}{a_0^{(s)}}\right) = \frac{2n(n_0 - n_e)}{(n^2-1)^2}.$$

L'identité de nature de ces deux termes explique l'égalité de leurs ordres de grandeur. Si dans la polarisation spontanée la force de rappel de l'électron était la même que dans la polarisation par l'onde lumineuse, la somme des deux termes du membre de gauche s'annulerait. Si elle ne s'annule pas, c'est que les deux forces de rappel ne sont pas identiquement les mêmes. Or on admet que la force de rappel, dans le cas d'une polarisation par un champ électrique statique, est une force quasiélastique; il ne saurait en être exactement de même dans le cas de la polarisation spontanée.

Soit, d'une façon générale, $e^2\varphi(x)$ la force de rappel de l'électron; on aura, dans le cas de la polarisation spontanée,

$$eh_x^{(s)} = e^2\varphi(x_s) = f_x^{(s)} . x_s;$$

d'où

$$f_x^{(s)} = \frac{e^2\varphi(x_s)}{x_s}.$$

Si, à partir de cette position x_s, l'électron subit, par l'effet d'un champ électrique créé à l'extérieur, un nouveau déplacement x supposé petit par rapport au précédent,

$$e(h_x^{(s)} + h_x) = e^2 \{ \varphi(x_s) + x\varphi'(x_s) \};$$

d'où

$$f_x = e^2\varphi'(x_s),$$

ce qui nous donne

$$\frac{a_{xx}}{a_{xx}^{(s)}} = \frac{f_x^{(s)}}{f_x} = \frac{\varphi(x_s)}{x_s\varphi'(x_s)}.$$

Admettons, pour fixer les idées, que la force de rappel est en $\frac{1}{r^p}$; alors on aura

$$\frac{\varphi(x_s)}{x_s\varphi'(x_s)} = \frac{1}{p}.$$

Si dans la polarisation spontanée l'électron n'a subi, loin du centre, qu'un déplacement relativement petit, ce rapport pourra être aussi voisin de 1 qu'on voudra. Si

$$\frac{\dfrac{1}{a_{xx}^{(s)}}}{\dfrac{1}{a_{xx}}} = \frac{\sum \dfrac{1}{a_{xx}^{(s)}}}{\sum \dfrac{1}{a_{xx}}},$$

on aura donc

$$\frac{1}{p} < \frac{\sum \dfrac{1}{a_{xx}^{(s)}}}{\sum \dfrac{1}{a_{xx}}} < 1.$$

On pourra peut-être se faire une idée de la loi qui régit la force de rappel de la manière suivante : on a

$$\frac{1}{a_{xx}} = \frac{4\pi}{K_{x-1}} + \eta_{xx}. \qquad (2)$$

En additionnant les trois relations (2) et en tenant compte de (1), nous aurons

$$\frac{1}{p} < \frac{1}{1 + \frac{1}{K_{x-1}} + \frac{1}{K_{y-1}} + \frac{1}{K_{z-1}}} < 1,$$

K_x, K_y, K_z étant les pouvoirs inducteurs spécifiques du cristal. Or si l'on prend tous les cristaux dont les pouvoirs inducteurs spécifiques ont été étudiés, et si l'on effectue les opérations indiquées, on trouve que le rapport, qui doit être compris entre $\frac{1}{p}$ et 1, est compris entre $\frac{1}{2}$ et 1 ; la valeur $\frac{1}{2}$ est une valeur qui est atteinte pour quelques cristaux, mais n'est jamais dépassée. Si cette limite, qui n'est franchie dans aucun cas, est réellement infranchissable, on doit prendre $p = 2$, c'est-à-dire admettre que la force de rappel de l'électron est en $\frac{1}{r^2}$. M. Sutherland a déjà été amené à montrer l'intérêt dans le domaine moléculaire de la loi en $\frac{1}{r^2}$, dont M. Bohr a montré depuis l'intérêt dans le domaine atomique.

Voici les valeurs, dans le cas des cristaux, du rapport

$$\frac{1}{1 + \sum \frac{1}{K_{x-1}}}.$$

Apatite . . .	0,85	Soufre . . .	0,50	Fluorine. . .	0,66
Dolomie. . .	0,73	Sulf. de Mg. .	0,63	Diamant. . .	0,60
Quartz . . .	0,54	Sulf. de potasse	0,59	Sel gemme . .	0,61
Rutile . . .	0,97	Aragonite . .	0,72	Sylvine . . .	0,55
Spath. . . .	0,79	Barytine . . .	0,72		
Tourmaline. .	0,65	Cérusite . . .	0,87		
		Topaze . . .	0,68		

Ceci semble être encore applicable aux corps solides purs dont la constante diélectrique est bien connue. Pour ces corps, $K = 4$ semble être une limite inférieure infranchissable.

Nous pouvons donc dire : *tout se passe,* dans le cas des cristaux, *comme si* la force de rappel de l'électron était une force en $\frac{1}{r^2}$.

Nous avons admis que les η sont les mêmes que dans le cas de la polarisation par des champs faibles. En effet, les η sont calculables en partant des paramètres du réseau. Cependant, dans les calculs que nous avons faits sur ces grandeurs, nous avons admis que les molécules polarisées sont des doublets dont les dimensions sont petites vis-à-vis des distances de deux doublets voisins. Il n'est pas certain qu'il en soit ainsi. Admettons en effet provisoirement l'exactitude de la relation (1); nous avons

$$f_x^{(s)} = \frac{e^2}{x_s^3}.$$

L'équation (1) nous donne alors, en y joignant

$$\frac{\mathrm{N}e^2}{f_x^{(s)}} = a_{xx}^{(s)},$$

$$\frac{1}{x_s^3} + \frac{1}{y_s^3} + \frac{1}{z_s^3} = 4\pi\mathrm{N}.$$

Posons

$$\frac{3}{\mathrm{R}_s^3} = \frac{1}{x_s^3} + \frac{1}{y_s^3} + \frac{1}{z_s^3};$$

il vient

$$\frac{4}{3}\pi\mathrm{R}_s^3\mathrm{N} = 1.$$

La conclusion que l'on tirerait de cette équation, c'est que l'électron est à la périphérie de la molécule et que, d'autre part, le volume de la molécule est du même ordre de grandeur que le volume de la maille simple. Il se peut que la polarisation spontanée n'existe que dans une seule direction. On aurait alors

$$4\pi N x_s = 1. \qquad (3)$$

Dans tous ces cas, l'écart de l'électron devient relativement important par rapport à la distance de deux molécules, puisqu'il est comparable aux dimensions de la maille, et la relation entre les η ne doit plus avoir qu'une valeur approchée. Cette conception simpliste d'un électron ainsi statiquement écarté d'un centre ne correspond probablement pas à la réalité : cette polarisation ne doit pas être statique mais dynamique. Quoi qu'il en soit, si l'on utilise l'équation (3) à la détermination des périodes propres du cristal dans l'ultra-violet, on trouvera un ordre de grandeur acceptable.

On a

$$f_x = m\omega^2 = \frac{2e^2}{x_s^3},$$

qui jointe à (1) donne

$$\lambda = \frac{c}{e}\sqrt{\frac{m\pi}{N}} = \frac{c}{e}\sqrt{\frac{m\pi}{N_a}\cdot\frac{P}{d}}.$$

N_a, constante d'Avogadro, est égale à $68{,}5 \cdot 10^{22}$, $\frac{c}{e} = \frac{1}{1{,}4 \cdot 10^{20}}$, $m = 0{,}8 \cdot 10^{-27}$. P est le poids moléculaire et d la densité.

Le calcul donne

	λ calc.	λ obs.
	—	—
Fluorine	$1{,}63 \cdot 10^{-5}$	$0{,}94 \cdot 10^{-5}$
Quartz	$1{,}50 \cdot 10^{-5}$	$1{,}018 \cdot 10^{-5}$
Sylvine.	$1{,}93 \cdot 10^{-5}$	$1{,}53 \cdot 10^{-5}$
Sel gemme	$1{,}62 \cdot 10^{-5}$	$1{,}27 \cdot 10^{-5}$

Les ordres de grandeur s'accordent. Toute autre loi que celle en $\frac{1}{r^2}$ donnerait un ordre de grandeur différent.

On peut se faire une idée de la polarisation spontanée :

$$p_x^{(s)} = \mathrm{N}ex_s = e\left(\frac{\mathrm{N}^2}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Dans les cristaux piézo-électriques comme le quartz, cette polarisation spontanée serait par exemple la même dans toute l'étendue du cristal. Si l'on regarde quelle serait la variation de $p_x^{(s)}$ pour une pression $\pi = 1$, on trouve

$$\frac{dp}{d\pi} = \frac{2}{9}e\mathrm{K}\left(\frac{\mathrm{N}_a^2 d^2}{4\pi \mathrm{P}^2}\right)^{\frac{1}{3}},$$

où K est le coefficient de compressibilité cubique. Dans le cas du quartz, par exemple,

$$\mathrm{K} = \frac{1}{3700\,.\,10^{-8}};$$

en effectuant les calculs on trouve

$$\frac{dp}{d\pi} = 15{,}14\,.\,10^{-8},$$

alors que les mesures piézo-électriques donnent

$$6{,}5\,.\,10^{-8}.$$

Il y a accord entre les ordres de grandeur.

Quoique la conception simpliste de la polarisation statique soit probablement au fond des choses très différente de la réalité, j'ai tenu à signaler la concordance de ces ordres de grandeur à laquelle elle conduit.

La valeur-limite pour l'expression

$$\frac{1}{1 + \sum \frac{1}{\mathrm{K}_{x-1}}},$$

qui n'est valable que dans le cas des cristaux (c'est-à-dire des solides), semble montrer qu'au moment de la cristallisation doit se produire une polarisation spontanée. Si dans toute l'étendue du cristal cette polarisation possède la même direction, le cristal aurait des propriétés spéciales, par exemple piézo-électriques.

Dans le cas de cristaux cubiques, qui sont monoréfringents, il n'est pas nécessaire d'admettre une polarisation dirigée dans un sens déterminé. L'électron périphérique y décrirait seulement des trajectoires à une certaine distance R_s du centre, aucune des trois directions d'axes n'étant privilégiée.

Physique. — **Mesures d'indices de réfraction de solutions d'une substance absorbante**

par R. CROMBEZ (*).

Avant la guerre, M. le Profr Verschaffelt nous avait engagé à faire des mesures d'indices de réfraction de solutions, dans divers solvants, d'une substance colorante, c'est-à-dire d'une substance présentant une forte bande d'absorption dans le spectre visible ou dans une région invisible. Le but était d'observer, si possible, la dispersion anomale dans ces solutions et de déduire des observations des données relatives à la dispersion anomale de la substance colorante elle-même (**).

La substance absorbante que nous avons choisie est la para-nitrosodiméthylaniline, dont les propriétés optiques ont été étudiées par Wood en 1903. Elle est soluble dans quantité de solvants organiques; nous en avons fait des solutions dans l'alcool éthylique, l'aniline, le benzène, le nitrobenzène et le chlorobenzène.

La para-nitrosodiméthylaniline présente une forte bande

(*) Présenté par M. J.-E. Verschaffelt.

(**) Des mesures d'indices de solutions de diverses substances colorantes dans divers solvants furent faites par Christiansen (1870-1871), Kundt (1871-1872), Schtschégliaeff (1895), Stöckl (1900) et Fricke (1905). La bibliographie, peu étendue, relative à ce sujet, se trouve dans le *Traité de physique de Chwolson*, II, pp. 343 et suiv., et dans Wood, *Physical optics*, 1911, pp. 113 et 397.

d'absorption à l'extrémité violette du spectre visible ; cette bande s'étend à peu près de 0,47 μ (bleu) à 0,37 μ (ultra-violet). Plus loin, dans l'ultra-violet, la substance redevient transparente. Dans ces conditions, nous nous sommes proposé de faire l'étude de la dispersion de notre substance (*) en deux parties. Dans la première partie, nous comptions observer la dispersion dans la partie visible du spectre par la méthode visuelle directe; dans la seconde partie, se rapportant au spectre ultra-violet, nous comptions recourir à la photographie ou à l'observation visuelle indirecte, par fluorescence.

Avant la guerre, nous n'avons eu l'occasion de réaliser que la première partie de notre programme. Depuis, nous avons entrepris la seconde partie de nos recherches, mais les circonstances difficiles ne nous ont pas encore permis d'obtenir de résultats. Voilà pourquoi, sur les conseils de M. Verschaffelt, nous nous sommes décidé à communiquer déjà ceux de la première partie.

MÉTHODE.

Les mesures d'indices ont été faites à l'aide d'un petit goniomètre, fourni par la Société Genevoise (**) et donnant la minute d'angle.

Le prisme était constitué par une pièce de cuivre (de 2 centimètres de hauteur environ) taillée à angle aigu et dont une partie de l'arête avait été enlevée sur un espace de 1 centimètre par une échancrure circulaire ; cette échancrure avait été recouverte de deux plaques de verre à faces parallèles, se rejoignant suivant l'arête du prisme. La cavité comprise entre le métal et

---

(*) Qui avait été fournie par la maison Kahlbaum.

(**) Le même qui servit aux recherches de M$^{\text{lle}}$ A. Scouvart. (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique* [Classe des sciences], n° 5, 1910, p. 380.)

les deux plaques constituait le prisme à liquide, dont l'angle réfringent était de 10°54′ (*).

Deux étroits conduits, creusés dans l'épaisseur du métal et conduisant à l'échancrure, permettaient d'introduire les liquides à examiner (en introduisant une pipette effilée dans l'un des conduits, l'autre servant à l'échappement de l'air). La pièce métallique pouvait d'ailleurs être vissée sur une tige, qui pouvait être placée dans l'axe du goniomètre, relevée et tournée, grâce au dispositif construit pour les mesures d'indices de cristaux par M^{lle} Scouvart (**).

Le prisme était enfermé dans une espèce d'étuve à doubles parois en cuivre mince, munie de deux fenêtres opposées permettant le passage de la lumière; un courant d'eau lancé à travers l'espace entre les doubles parois de l'étuve servait à maintenir, à peu près constante, la température du prisme, laquelle était lue sur un thermomètre, dont le réservoir se trouvait dans l'étuve, tout près du prisme. La température restait voisine de 20° C.

Le goniomètre se trouvait dans une cage en bois fixée à un lourd pied de Gauss; le collimateur passait à travers une ouverture circulaire pratiquée dans une des parois de la cage; la paroi opposée était constituée par une pièce d'étoffe noire, dont l'observateur se couvrait la tête, qui était placée ainsi dans une chambre obscure.

Comme source de lumière, nous avons employé l'arc électrique jaillissant entre deux charbons au calcium; le spectre de

---

(*) Cet angle fut mesuré par l'observation de la déviation d'un rayon subissant une double réflexion à l'intérieur du prisme creux; on trouve facilement que si A est l'angle de ce prisme, un rayon deux fois réfléchi subit une déviation constante égale à 2A.

L'indice étant déterminé par la méthode du minimum de déviation, on trouve aisément qu'avec le prisme employé les indices étaient mesurés avec trois décimales à peu près.

(**) *Loc. cit.*

cet arc est formé de raies distribuées dans tout le spectre visible. Les longueurs d'onde de ces raies furent déterminées, par lecture directe, à l'aide d'un spectromètre de Hilger. Ces longueurs d'onde sont :

Tableau I.

Raie rouge	6497	angströms.
Raie orangée	6170	id.
Raie jaune	5857	id.
Raie verte	5603	id.
Raie verte	5270	id.
Raie verte	5189	id.
Raie bleue	5042	id.
Raie bleue	4878	id.

Résultats des mesures.

La substance colorante employée est, comme nous l'avons dit, la para-nitrosodiméthylaniline. Les solvants employés sont :

Tableau II.

Benzène	Densité à 20° C.	0,8780
Nitrobenzène.	Id.	1,2040
Chlorobenzène	Id.	1,1062
Aniline.	Id.	1,0216
Alcool éthylique . . .	Id.	0,7890

Les tableaux suivants font connaître les indices de réfraction des solvants purs et de solutions à 10 °/₀ et 20 °/₀ (température : 20° C.).

Tableau III.

BENZÈNE.

λ	Solvant pur.	Solution à 10 °/₀.	Solution à 20 °/₀.
6497.	1,496	1,515	— (*)
6170.	1,498	1,517	1,536
5857	1,501	1.521	1,543
5603	1,503	1,525	1,549
5270	1,507	1,532	1,560
5189.	1,508	1,535	1,564
5042.	1,510	1,540	1,573
4878.	1,513	1,548	—

Tableau IV.

ANILINE.

λ	Solvant pur.	Solution à 10 °/₀.	Solution à 20 °/₀
6497	1,580	1,601	—
6170.	1,583	1,606	1,633
5857.	1,586	1,614	1,639
5603.	1,590	1,621	1,652
5270.	1,595	1,638	1,675
5189.	1,597	1,646	1,681
5042.	1,600	—	—
4878.	1,602	—	—

Tableau V.

CHLOROBENZÈNE.

λ	Solvant pur.	Solution à 10 °/₀.	Solution à 20 °/₀.
6497.	1,520	1,544	—
6170.	1,522	1,548	1,573
5857	1,525	1,552	1,576
5603.	1,527	1,558	1,584
5270 . . .	1,531	1,567	1,599
5189 . . .	1,532	1,571	1,604
5042.	1,533	1,577	1,615
4878.	1,535	1,584	—

(*) Le signe — indique que la détermination correspondante n'a pu être faite, par suite d'une trop forte absorption.

Tableau VI.

NITROBENZÈNE.

λ	Solvant pur.	Solution à 10 °/o.
6497.	1,546	1,568
6170.	1,550	1,573
5857.	1,552	1,579
5603.	1,557	1,587
5270.	1,562	1,600
5189.	1,564	1,604
5042.	1,567	1,615
4878.	1,571	—

Tableau VII.

ALCOOL ÉTHYLIQUE.

λ	Solvant pur.	Solution à 10 °/o.
6497.	1,361	1,390
6170.	1,361	1,391
5857.	1,362	1,395
5603.	1,363	1,398
5270.	1,364	1,405
5189.	1,365	1,408
5042.	1,365	—
4878.	1,367	—

INDICES DE RÉFRACTION DE LA PARA-NITROSODIMÉTHYLANILINE SOLIDE.

Pour déduire de ces mesures des valeurs approchées des indices de réfraction de la para-nitrosodiméthylaniline pure, à 20° C., donc solide, nous avons fait usage de la formule des mélanges bien connue :

$$\frac{n-1}{d} = \frac{n_1-1}{d_1}(1-x) + \frac{n_2-1}{d_2}x, \qquad (1)$$

où n et d sont respectivement l'indice et la densité du mélange, n_1 et d_1 l'indice et la densité du premier constituant (solvant),

n_2 et d_2 l'indice et la densité du second constituant (corps dissous); x est la composition en poids du mélange, c'est-à-dire le nombre de grammes du corps dissous dans 1 gramme de mélange.

Les indices sont donnés dans les tableaux III à VII, les densités d_1 dans le tableau II ; pour d_2, densité de la para-nitrosodiméthylaniline solide (*), nous avons trouvé la valeur

$$d_2 = 1{,}145.$$

Quant aux densités d des mélanges, nous ne les avons pas déterminées directement ; eu égard à la validité approchée de la formule (1), nous nous sommes contenté de déterminer d au moyen d'une formule de mélange approchée également :

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{d_1}(1 - x) + \frac{1}{d_2}x,$$

qui suppose, comme on sait, que le mélange n'est pas accompagné d'un changement de volume. Nous avons trouvé ainsi pour les densités des mélanges :

Tableau VIII.

	Benzène	Aniline.	Chlorobenzène.	Nitrobenzène.	Alcool.
$x = 0{,}1$	0 899	1,033	1,110	1 198	0,815
$x = 0{,}2$	0,921	1,044	1,114	—	—

(*) On pourrait se demander si, dans l'application de la formule (1), n_2 et d_2 se rapportent à la nitrosodiméthylaniline liquide ou solide. Cette question est inutile : on peut supposer l'un ou l'autre, puisque, au degré de précision de la formule (1) elle-même, l'expression $\frac{n_2 - 1}{d_2}$ est indépendante de l'état de la substance et, suivant que l'on prendra pour d_2 la densité de la substance à l'état solide ou à l'état liquide (dans notre cas la substance devrait être en surfusion pour être liquide à 20° C.), on trouvera pour n_2 l'indice du solide ou celui du liquide. Il y a cependant cette complication, que la substance solide est cristalline et n'est certainement pas cristallisée dans le système cubique; ce qu'on obtient est donc un indice moyen. Mais, au degré d'approximation pas très élevé que comportent ces calculs, cela n'a pas d'importance.

Enfin, comme valeurs des indices de la para-nitrosodiméthylaniline pure, tirées de la formule (1) appliquée aux diverses solutions, nous avons trouvé :

Tableau IX.

	Benzène		Aniline.		Chlorobenzène		Nitrobenzène.	Alcool.
λ	10 %	20 %	10 %	20 %	10 %	20 %	10 %	10 %
6497	1,728	—	1,822	—	1,765	—	1,758	1,771
6170	1.734	1,734	1,842	1,855	1,783	1,780	1,774	1,781
5857	1,752	1,764	1,896	1,874	1 804	1.790	1,810	1,817
5603	1,779	1,787	1,936	1.926	1,829	1,819	1,844	1,854
5270	1,834	1,840	2,066	2,033	1,899	1,879	1,925	1,932
5189	1 853	1,860	2.136	2,055	1,933	1,900	1,952	1,967
5042	1,894	1,902	—	—	1,981	1,953	2,029	—
4878	1,981	—	—	—	2,038	—	—	—

DENSITÉ DE LA PARA-NITROSODIMÉTHYLANILINE.

Nous avons déterminé cette densité par la méthode de suspension. Nous avons notamment préparé un mélange de deux liquides dans lequel des grains de la substance restaient en suspension et dans lequel, d'ailleurs, la substance se dissolvait peu, sans quoi la forte coloration du mélange aurait pu rendre la méthode impraticable. Ayant constaté que la densité de la nitrosodiméthylaniline était supérieure à celle de l'eau, nous avons essayé si un mélange d'eau et de glycérine nous conduirait à un bon résultat; tel fut effectivement le cas.

La suspension des grains étant obtenue, la densité du liquide de suspension, donc aussi celle des grains eux-mêmes, fut déterminée à l'aide d'une balance de Westphal; nous avons obtenu ainsi la valeur

$$d_2 = 1{,}145 \quad \text{à} \quad 20^\circ \text{ C.},$$

communiquée plus haut.

DISPERSION DE LA PARA-NITROSODIMÉTHYLANILINE SOLIDE A 20° C.

En prenant pour les diverses longueurs d'onde la moyenne des indices trouvés dans le tableau IX, nous trouvons, pour la para-nitrosodiméthylaniline solide à 20° C. :

Tableau X.

λ	n (solide à 20° C.).	n (liquide à 85° C.).
6497.	(1,762)	1,755
6170.	1,785	1,776
5857.	1,813	1,812
5603.	1,847	1,850
5270.	1,926	1,940
5189.	1,957	1,970
5042.	(2,024)	2,060
4878.	(2,146)	—

Les nombres entre parenthèses ne sont pas des moyennes, mais sont calculés au moyen de la formule de dispersion ci-dessous.

La troisième colonne contient les valeurs de n pour la substance liquide à 85° C., d'après les mesures de Wood. Le parallélisme entre les valeurs de n de la deuxième et de la troisième colonne est évident.

D'après ce tableau, la dispersion de la para-nitrosodiméthylaniline solide, dans la région visible du spectre, est bien représentée par la formule

$$n^2 = m + \frac{m'\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda'^2},$$

où

$$m = 2{,}349, \qquad m' = 0{,}406, \qquad \lambda' = 0{,}442.$$

Cette formule, qui est conforme à celle à laquelle conduit la théorie électro-magnétique, sauf que m n'est pas égal à 1, exprime donc que la para-nitrosodiméthylaniline présente une forte raie ou bande d'absorption dans le violet, le maximum d'absorption correspondant à $\lambda' = 0{,}442$.

GÉOLOGIE. — **Sur le Salmien de la vallée de la Lienne** (¹),

par J. ANTEN (²).

Dans un précédent travail (³) nous avons cherché à montrer que dans la vallée de la Salm, le Salmien était formé de trois niveaux de composition minéralogique originelle différente :

1° Un niveau sablo-argileux inférieur ;
2° Un niveau argileux moyen ;
3° Un niveau sablo-argileux supérieur.

La présente note a pour objet de montrer l'analogie existant entre les conditions de dépôt, pendant la période salmienne dans la région de la Lienne et dans celle de la Salm.

COUPE DE LA LIENNE. — A l'embouchure de la Lienne on voit la partie supérieure du Revinien, formée de phyllades noirs, passer au Salmien par l'intermédiaire de quartzophyllades parfaitement zonaires, à zones alternativement très blanches et très noires.

A ces roches succèdent rapidement, vers le Sud, des quartzophyllades et quartzites verdâtres, en lits minces, que l'on traverse en suivant la route de la Lienne, très sinueuse, depuis le kilomètre 1.400 jusqu'au kilomètre 4.175 en remontant la rivière (⁴),

---

(¹) Voir *Annales de la Société géologique de Belgique,* t. V, p. M33 ; t. VI, p. B153 ; t. XXXII, p. B109 et p. B144.

(²) Présenté par M. Lohest.

(³) Voir *Annales de la Société géologique de Belgique,* t. XLI, p. M31.

(⁴) L'origine du bornage de la route de la Lienne se trouve à la bifurcation de cette route avec celle de Remouchamps à Trois-Ponts.

La direction générale des couches est à peu près Est-Ouest.

L'inclinaison générale des couches est vers le Sud, diminuant progressivement vers le Sud de 55° à 40°.

Les minces lits rares de quartzite montrent parfois de petits plis secondaires affectant les allures du bord nord d'un synclinal.

Au kilomètre 4.375 apparaissent des roches quartzophylladeuses rouges, avec minces lits de minerai de manganèse, direction Est-Ouest, pendage 40° Sud. A la partie supérieure de ce niveau se trouve une couche de minerai de manganèse qui a été exploitée par la Société J. Cockerill.

Les quartzophyllades rouges sont surmontés d'un niveau de phyllades rouges très fins de mêmes direction et inclinaison. La partie supérieure de cette formation n'est pas visible.

En continuant vers le Sud on rencontre à la borne 5.200 un complexe de quartzophyllades zonaires et de quartzites rouges, direction Nord 80° Est, pendage 50° Sud. Ces roches paraissent le terme supérieur de la série ; elles occupent le centre du synclinal.

A la borne 5.425 on retrouve les phyllades rouges fins, auxquels succèdent à la borne 5.600 les quartzophyllades rouges inférieurs, direction Nord 80° Ouest, pendage 55° Sud.

Ce contact entre les phyllades rouges et les quartzophyllades rouges inférieurs montre un accident secondaire affectant les allures du bord sud renversé d'un synclinal.

Enfin, à la borne 5.700 on voit le contact des quartzophyllades avec les quartzophyllades et quartzites verdâtres.

On rencontre ces derniers vers le Sud sur une étendue plus considérable que sur le versant Nord du pli. Cela tient à la présence de plis secondaires assez importants dont quelques-uns sont visibles. Il paraît y avoir une légère accentuation du pendage vers le Sud.

Le Salmien, sur la Lienne, serait donc formé d'une partie inférieure argilo-sableuse colorée en gris verdâtre, sauf quelques bancs rouges au sommet ; d'une partie moyenne argileuse colorée en rouge; enfin d'une partie supérieure sablo-argileuse également colorée en rouge.

Ce serait donc, quant à la succession des natures de dépôt, la même chose que ce que nous avons cherché à montrer sur la Salm.

On nous fera cette objection que si le phyllade oligistifère à coticule a bien une couleur rouge, les phyllades ottrélitifères et les quartzophyllades, que nous leurs croyons superposés à Vielsalm, ont une coloration bien différente. Or il semble bien que le métamorphisme est bien moins accentué sur la Lienne que sur la Salm, ce qui pourrait expliquer ce changement de coloration.

Il faudrait donc établir d'une façon précise ces points et tenter le raccordement avec le Salmien de la haute Lienne avant de pouvoir présenter des conclusions définitives.

Géologie. — **Le contact du Dévonien et du Calcaire carbonifère à Horion-Hozémont,**

par P. FOURMARIER (1).

A Horion-Hozémont, le terrain silurien du massif du Brabant n'est séparé du Houiller du Nord du bassin de Liége que par une étroite bande de calcaire appartenant en partie au Dévonien (étage frasnien), en partie au Calcaire carbonifère; la réduction considérable de ces dépôts, par rapport aux régions voisines, a été interprétée par des failles; c'est, notamment, à une faille que l'on a eu recours pour expliquer l'absence de l'étage famennien qui, normalement, sépare le Frasnien du Calcaire carbonifère.

Au cours de l'excursion organisée à Horion, en septembre 1919, par la Société géologique de Belgique, des observations intéressantes ont été faites qui permettent d'établir avec certitude les relations entre ces deux formations.

Dans le parc du château de Lexhy, on voit affleurer au voisinage du Silurien, des bancs de calcaire renfermant les fossiles caractéristiques de l'étage frasnien; immédiatement au Sud se trouve du calcaire à crinoïdes, accompagné de calcaire oolithique, identique au Calcaire carbonifère tel qu'il se présente habituellement dans cette région.

En un point, on peut observer très nettement le contact entre les deux calcaires; sur le Frasnien bien caractérisé repose un banc de 0^{m}50 environ de calcaire très crinoïdique, un peu argileux, renfermant des traces organiques brunâtres, que je rapporte provisoirement à des restes de poissons. Ce banc supporte à son tour le Calcaire carbonifère, tel que je viens de le décrire, et peut être considéré comme la base de cette formation (¹).

---

(1) Présenté par M. Lohest.

Il est tout à fait remarquable que tous les bancs, depuis le Frasnien fossilifère jusqu'au Calcaire carbonifère, se succèdent normalement sans trace de faille et en parfaite concordance de stratification, tout au moins en apparence.

J'ajoute cette restriction parce que, en réalité, le contact, même en bancs parfaitement parallèles, du Calcaire carbonifere sur le Frasnien est un fait anormal en Belgique; partout ces deux étages sont séparés par une importante série de schistes et de psammites constituant l'étage famennien.

A Horion-Hozémont, le contact anormal ne peut pas s'expliquer par faille, puisqu'on voit les bancs se succéder parallèlement les uns aux autres; on pourrait, il est vrai, admettre l'existence d'une cassure strictement parallèle à la stratification, mais une telle faille, outre que son mode de formation serait difficilement explicable à l'endroit envisagé, aurait laissé des traces de dislocation dans les bancs les plus voisins, des stries de glissement, des froissements; l'observation ne montre rien de semblable.

Il faut donc admettre ou bien que le Famennien n'a jamais existé à cet endroit, ou bien qu'il a été enlevé par érosion avant le dépôt du Calcaire carbonifère.

La comparaison de la coupe de Horion-Hozémont avec celle de la vallée de la Mehaigne donne quelques indications pour la solution du problème.

Dans la vallée de la Mehaigne, entre Moha et Huccorgne, on

(¹) M. l'abbé A. Salée, professeur à l'Université de Louvain, me fait savoir qu'il a trouvé dans ce banc des débris de poissons, de très nombreux Ostracodes et une petite forme de *Spirifer tornacensis* qui est fréquente dans les couches que l'on peut rapporter à la zone à *Cleistopora,* notamment à Feluy, et qui serait l'équivalent de l'assise de Comblain-au-Pont.] [*Note ajoutée pendant l'impression.*]

voit les calcaires frasniens passer vers le haut à une assise schisteuse contenant quelques rares bancs de psammite, qui représente le Famennien ; sur ces schistes repose le Calcaire carbonifère débutant par une assise de dolomie recouverte, à son tour, par des calcaires crinoïdiques rappelant ceux de Horion-Hozémont.

La série ici est complète, mais le Famennien est très atténué et réduit à ses schistes de base ; les psammites qui en forment la partie supérieure font défaut dans la coupe de la Mehaigne, alors qu'ils sont bien représentés à peu de distance à l'Ouest. La partie inférieure du Calcaire carbonifère est elle-même très réduite sur la Mehaigne, puisque la dolomie n'a que quelques mètres de puissance, tandis qu'au Sud et à l'Ouest, elle atteint un développement relativement considérable.

Le Famennien et le Calcaire carbonifère de la vallée de la Mehaigne présentent donc déjà des anomalies ; il suffit de supposer que ces anomalies se sont accentuées vers le Nord-Est, de telle sorte qu'à Horion-Hozémont le Famennien ait disparu, de même que les bancs dolomitiques de la base du Calcaire carbonifère.

Ce fait de la réduction extrême du Famennien n'est pas spéciale à Horion-Hozémont. Sans parler de Visé, dont la tectonique n'est pas encore bien élucidée, il existe une disposition analogue à l'Ouest de la vallée de l'Orneau entre Saint-Martin et Ligny. Comme à Horion, elle a été expliquée par une faille, mais il est fort probable que cette cassure n'existe pas plus qu'à Horion-Hozémont. La réduction extrême du Famennien, pouvant aller jusqu'à sa disparition complète, est due selon toute vraisemblance à des mouvements du sol au cours même de la sédimentation de la série dévono-carbonifère, puisqu'elle se retrouve en plusieurs points du bord nord du synclinal de Namur.

Séance publique du mardi 16 décembre 1919.

M. A. Gravis, vice-directeur, occupe le fauteuil.

M. Paul Pelseneer, secrétaire perpétuel.

Sont présents : MM. Léon Fredericq, Maurice Delacre, A. Lameere, Fr. Swarts, Jean Massart, A. Demoulin, A. Rutot, A. de Hemptinne, Victor Willem, Paul Stroobant, J. Verschaffelt, Émile Marchal, *membres;* A. Brachet, *correspondant.*

Assistent à la séance :

Classe des lettres. — MM. Jules Leclercq, Maurice Wilmotte, Louis de la Vallée Poussin, Léon Parmentier, *membres.*

Classe des beaux-arts. — MM. Jules Brunfaut, *vice-directeur,* J, Winders, Émile Mathieu, Louis Le Nain, Léon Frédéric, Fernand Khnopff, A. Baertsoen, *membres.*

La découverte scientifique.

LECTURE FAITE A LA SÉANCE PUBLIQUE DU 16 DÉCEMBRE 1919,

par A. DE HEMPTINNE.

La découverte! Que de sentiments et d'idées ce mot n'évoque-t-il pas? Espoir de contempler des vérités nouvelles, de pénétrer plus avant dans les mystères de la nature, ou d'asservir ses forces puissantes. C'est aux découvertes, ne l'oublions pas, que nous devons les progrès de l'industrie et de la technique. Elles nous révèlent les causes cachées de nos maux, elles nous permettent de lutter victorieusement contre la maladie; ainsi furent vaincues la rage et la diphtérie. Que de cœurs n'ont pas tressailli à cette nouvelle!

Les découvertes! Elles nous apparaissent comme les degrés successifs par lesquels la science s'est élevée lentement. Chacune d'elles est, si je puis employer cette comparaison, comme une pierre précieuse extraite du sein de la terre où elle se trouvait cachée. Mise en valeur par un travail suffisant, elle éclaire de ses feux tout ce qui se trouve dans la zone de son rayonnement, et nous apporte ainsi de nouvelles lumières.

De même qu'il est des mineurs plus habiles que d'autres, n'y a-t-il pas des chercheurs doués d'une sorte de don de divination et qui, semblables aux sourciers, sont guidés par leur intuition, comme par une baguette magique directrice de leur esprit?

Cependant, le succès d'un mineur dépend souvent des travaux d'approche réalisés par la collectivité; n'en est-il pas de même pour le savant? Les progrès qu'on lui doit ne sont-ils pas en grande partie l'œuvre des générations successives, des groupes associés? L'étude de l'histoire des sciences nous aidera à élucider ces questions.

La biographie des savants nous fera connaître les qualités communes qui les distinguent, nous apprendra dans quelles circonstances leurs découvertes les plus importantes ont eu lieu, nous permettra de déterminer la part qui revient à la collectivité.

Ce sont ces deux points de vue que nous examinerons successivement.

Laissez-moi tout de suite vous faire part du résultat de mes recherches.

Les découvertes, les inventions, les conceptions d'hypothèses nouvelles sont le fruit d'associations d'idées plus ou moins conscientes et multiples. Le chercheur a l'esprit continuellement tendu vers la solution du problème qu'il se propose de résoudre; un grand nombre de solutions s'ébauchent dans son cerveau, souvent même à l'occasion d'un fait ou d'une circonstance fortuite, sans liens apparents avec le sujet. Soudain, l'une des idées se dresse, dominant toutes les autres : c'est la solution cherchée qui apparaît. Cette faculté d'association d'idées nombreuses et rapides entre éléments disparates se révèle par l'imagination (ce mot étant pris ici dans un sens très large); c'est pourquoi nous trouvons souvent cette faculté très développée chez les savants. Elle leur donne l'originalité, les fait sortir des chemins battus, les mène par des sentiers inconnus qui conduisent aux grandes découvertes. Au fond, il y a peut-être sous ce rapport une ressemblance plus grande qu'on ne le croirait au premier abord, entre les savants qui cultivent les sciences positives, les poètes et les artistes. Le rôle personnel des chercheurs doués de qualités remarquables nous apparaîtra cependant comme assez limité. Il se borne le plus souvent à avancer de quelques années la naissance des découvertes.

Mais passons aux exemples :

Vous connaissez tous l'histoire d'Archimède : Le tyran de

Syracuse, soupçonnant ses orfèvres de lui avoir fourni un ornement d'or composé d'un mélange de métaux moins précieux, ordonne au savant d'en trouver la preuve. Préoccupé jour et nuit de résoudre ce problème, Archimède y pense sans cesse, mais ne trouve pas la solution désirée. Elle lui apparaît soudain, au moment où il prend un bain, et tout heureux, avant même d'avoir vérifié ses prévisions, il s'élance dans la rue en criant : « Je l'ai trouvé ! » Au premier abord, il n'y a aucun rapport entre le problème posé et l'acte de prendre un bain. Mais le savant, en se plongeant dans l'eau, avait été frappé de la diminution de son poids ; une relation lui était immédiatement apparue entre la composition des corps et leur perte en poids lorsqu'ils sont plongés dans un liquide. Nul ne niera qu'il fallait être doué d'une bien vive imagination pour établir une relation entre une couronne d'or et les effets d'un bain. L'imagination, chez les savants, se révèle souvent par leur amour pour les arts et la poésie. Peut-on donner un plus bel exemple que Léonard de Vinci, le célèbre auteur de la *Joconde*, le génie puissant et fécond, à la fois savant, peintre, ingénieur, architecte...

Newton cultivait aussi la peinture avec succès, ainsi que la poésie. Si l'exercice de ces arts ne lui a pas valu la célébrité, ces faits sont pourtant intéressants à noter. Quand on demandait à l'immortel créateur de la théorie de la gravitation universelle comment il avait fait des découvertes, il répondait : « en y pensant toujours ». Il nous apparaît donc comme un laborieux, mais chez qui la moindre circonstance éveillait la solution des problèmes dans sa vive imagination. L'histoire nous rapporte que l'incident si banal de la chute d'une pomme fut la cause de ses théories les plus importantes sur la gravitation.

Parmi les savants les plus illustres du XIX^e^ siècle, il faut citer Ampère et Faraday. On leur doit la découverte des lois les plus importantes qui régissent les phénomènes électriques ; leurs travaux ont servi de base et de point de départ aux nombreuses applications dont nous éprouvons les bienfaits. Au sujet d'Ampère, l'illustre Arago, son biographe, s'exprime de la façon suivante : « Ce savant possédait des connaissances d'une grande étendue, il aimait la littérature et la poésie, s'intéressait beaucoup à la psychologie, fréquentait l'école des savants et des philosophes. Son ardente imagination y subissait journellement de rudes épreuves ; il saisissait au milieu de minutieux détails, d'immenses généralisations. Un seul mot, vrai ou faux, prononcé devant notre confrère, le jetait souvent dans des routes inconnues qu'il explorait avec une étonnante perspicacité. » Il était donc doué d'une faculté d'association d'idées des plus active. Mais le goût de l'expérience en modérait les écarts, car pour autant que son sujet pouvait le comporter, il se rapprochait de la voie expérimentale. Ampère était sans cesse absorbé par ses idées, et comme il le déclare lui-même, souvent la solution d'un problème lui apparaissait soudainement. Et lui aussi y pensait toujours ; de là les distractions devenues légendaires. On a même été jusqu'à prétendre qu'elles étaient voulues. On ne voit pourtant pas quel avantage il convoitait, le jour où, assis à la table de personnes que tout lui commandait de ménager, il se crut un instant dans sa propre maison, et s'écria, avec l'accent d'un mécontentement profond : « Vraiment, ce dîner est détestable ! Ma sœur comprendra-t-elle enfin qu'elle a tort d'accepter des cuisinières sans s'être assurée personnellement de leur savoir-faire ! »

Mais passons à Faraday, le contemporain d'Ampère ; d'abord garçon de laboratoire et ensuite assistant du grand chimiste anglais Davy, dont un poète a dit : « S'il n'avait pas été le plus grand chimiste de son époque, il en aurait été le plus grand poète. » Faraday, lui aussi, était doué d'une imagination très vive et, comme il le déclare lui-même, il croyait aussi volontiers aux contes des *Mille et une nuits* qu'au lexique de la conversation. Mais, comme le dit Tyndall : « Quoique la force de son imagination fût énorme, il la tenait en bride comme un vigoureux cavalier et il ne permit jamais à son intelligence de se laisser désarçonner. » Ses idées lui apparaissaient souvent soudainement, comme par une révélation subite où le raisonnement n'a aucune part. Si, sous bien des rapports, il existe une assez grande analogie entre les qualités d'esprit d'Ampère et de Faraday, sous un rapport cependant, ces deux savants étaient profondément différents : la mémoire de Faraday était aussi faible que celle d'Ampère était puissante; cette faculté ne semble donc pas indispensable pour faire des découvertes.

Parmi les grands savants de la seconde moitié du XIX^e^ siècle, il faut citer Helmoltz et lord Kelvin. Tous deux ont fait faire des progrès notables aux chapitres les plus importants de la physique, en particulier à ceux de la chaleur, de la conservation de l'énergie et de l'électricité. Le premier a donné, lui-même, des indications et des réflexions générales à propos de ses découvertes. Il nous dit : « L'orgueil que le résultat final aurait pu me donner était notablement atténué, car je savais bien que j'avais presque toujours trouvé la solution des problèmes en généralisant progressivement des exemples favorables, et par une série d'idées heureuses, après bien des fausses routes. J'étais obligé de me comparer à un ascensionniste qui, sans connaître le chemin, grimpe lentement et péniblement, se trouve souvent obligé de retourner en arrière parce qu'il ne peut plus avancer, découvre, tantôt par ses réflexions et tantôt par hasard, de nouveaux indices de chemin qui le conduisent un peu plus avant, et enfin, quand il arrive au but, trouve à sa confusion une route royale par laquelle il aurait pu monter en voiture, s'il avait été assez adroit pour en trouver le bon bout. Dans mes travaux, je n'ai pas fait part au lecteur de mes fausses routes; je ne lui ai décrit que le chemin aplani par lequel il peut maintenant, sans peine, atteindre le but. » Helmoltz était sans cesse occupé de ses recherches, car il dit encore : « Mais qui voudra compter et peser ces éclairs de l'esprit? Qui voudra deviner et suivre les chemins secrets des enchaînements d'idées, de ce que l'homme, sans le savoir ou sans le penser, agite confusément en son sein dans la nuit? Souvent je me suis trouvé dans une position embarrassante, obligé d'attendre des idées favorables ; j'ai donc acquis quelque expérience en ce qui concerne le moment et le lieu où elles me vinrent. Elle glissaient souvent assez silencieusement dans le cercle de mes pensées, sans que j'en reconnusse, dès le début, l'importance. Parfois, plus tard, et seulement de temps à autre, une circonstance fortuite m'aidait à reconnaître quand elles avaient surgi et dans quelles conditions. Bien souvent elles se présentent à vous sans que l'on ne se rende compte comment elles ont pris naissance. Il est des fois qu'elles apparaissent soudainement, sans effort, comme d'inspiration. Selon ma propre expérience, je puis dire qu'elles ne me sont jamais venues quand j'avais l'esprit fatigué et que j'étais à ma table de travail. Souvent les bonnes idées me venaient le matin ou à la promenade. » Le savant physicien et mathématicien Gauss exprime en peu de mots ce que Helmoltz nous a dépeint plus longuement, lorsqu'il dit : « Ma découverte est achevée, il ne me reste plus qu'à trouver comment je l'aurais dû faire. »

Lord Kelvin vivait à la même époque que Helmoltz ; il lui est comparable par l'importance et la nature de ses travaux. Durant sa longue carrière scientifique, il a travaillé sans relâche. Poincaré nous apprend qu'il ne pensait pas en formules, mais en images ; il cherchait à se représenter les phénomènes naturels par des modèles, et son imagination féconde y trouvait les moyens d'y exercer son activité. Lord Kelvin avait un don spécial pour découvrir le chaînon qui relie les choses en apparence étrangères, cette faculté dominante, considérée comme une des caractéristiques de son esprit, se manifestait parfois d'une façon un peu insolite au cours de ses lecons et l'écartait bien loin du sujet qu'il devait exposer à ses élèves. Les écarts de son imagination étaient modérés par un sens pratique très développé, qui s'est affirmé par des recherches expérimentales et des applications industrielles.

Par ses travaux, dans le domaine de la physico-chimie, Van t'Hoff occupe une place prépondérante parmi les savants contemporains. Il me dit un jour : « Je n'ai jamais trouvé ce que je cherchais, mais souvent beaucoup mieux. » Que faut-il conclure de là, sinon que l'esprit de ce savant, sans cesse en éveil, découvrait à l'occasion de la moindre circonstance le chemin qu'il fallait suivre pour arriver à des régions inconnues? Lors d'une fête donnée en son honneur à l'Université d'Utrecht, il s'adresse aux étudiants et leur dit : « Messieurs les étudiants, je vais vous donner une recette pour faire des découvertes. En relation, et à propos de ce qui a été dit ici de la bibliothèque; je veux vous faire remarquer que celle-ci a toujours exercé sur mon esprit une impression mortelle. Quand, dans le temps, j'étudiais à la Bibliothèque d'Utrecht les travaux de Wislicenus sur l'acide lactique, j'ai interrompu mes études à mi-chemin pour faire une promenade, et c'est durant cette promenade que, sous l'influence de l'air frais, les idées sur le carbone asymétrique me sont apparues. » L'hypothèse du carbone asymétrique est une des plus importantes qui aient été imaginées pour le progrès de la chimie organique.

Jusqu'à présent, je vous ai parlé des savants, passons aux inventeurs.

Le savant est celui qui cherche à découvrir les lois inconnues de l'univers; il s'efforce de projeter la lumière sur ce qui est ombre et mystère. L'inventeur est plutôt celui qui, par des combinaisons d'objets, ou de choses connues, parvient à créer un mécanisme nouveau. Lorsque Branly trouva que certaines poussières métalliques subissent l'action à distance des vibrations électriques, au point de devenir conductrices, il fit une découverte. L'utilisation de cette propriété et la combinaison de différents appareils pour la mettre pratiquement en évidence constituent l'invention de la télégraphie sans fil, faite par Marconi. Si, à différents points de vue, la mentalité des savants et des inventeurs est très différente, il y a cependant entre eux certaines ressemblances. C'est ce que je veux vous prouver en vous parlant brièvement de deux inventeurs célèbres : Watt, l'inventeur de la machine à vapeur, et Édison, dont les inventions vous sont familières.

Watt avait été consulté sur le moyen de faire traverser la Clyde, à Glasgow, par une canalisation d'eau ; la solution du problème avait été vainement tentée par les ingénieurs les plus habiles, parce que le fond du fleuve ne constituait pas un plancher stable. Watt, consulté, apporte la solution au bout de quelques jours ; la vue d'un homard, sur la table de famille, lui avait suggéré l'idée de construire une canalisation articulée comme la queue du crustacé. La lampe à incandescence à filament de carbone a été trouvée par Édison ; cet ingénieux inventeur s'était dit que si l'on parvenait à diviser la lumière contenue dans la lampe à arc, on utiliserait bien plus avantageusement l'énergie électrique. Mais comment arriver à résoudre cette difficulté ? Un soir, assis devant la table de son laboratoire, il prend machinalement entre ses doigts un peu de poussière de charbon qui se trouvait là pour être utilisée à la construction d'un microphone. Il roule cette poussière entre ses doigts, comme un convive mal élevé ferait d'une boulette de pain ; il aplatit et étire la substance, et soudain jaillit l'idée de la lampe à filament de carbone. Je vous épargne le récit des difficultés techniques qu'Édison a dû surmonter pour arriver à la construction pratique de sa lampe. J'ai voulu vous citer ces exemples parmi beaucoup d'autres, pour vous montrer que, chez l'inventeur comme chez le savant, l'idée féconde apparaît souvent soudainement à l'occasion d'une circonstance fortuite, et que l'un comme l'autre a l'esprit sans cesse tendu vers la solution du problème qui l'occupe.

La faculté d'association d'idées constitue la partie essentielle de notre pensée ; sa valeur distingue nécessairement le savant de marque. Tout se résume donc à savoir par quoi elle se caractérise chez ces personnalités. Est-ce par l'abondance ? Est-ce par la qualité ? Il semble bien que c'est par l'abondance. Elle se révèle par une puissance d'imagination très vive. Descartes, esprit positif, philosophe et savant, semble déjà avoir compris le rôle de l'imagination lorsqu'il dit : « Elle fait sortir de l'esprit les semences de la sagesse avec plus de facilité et de brillant même que ne peut le faire la raison du philosophe. »

Faut-il en conclure qu'il suffit d'être doué d'une forte imagination pour être un savant de mérite? Loin de là ! L'imagination abandonnée à elle-même et sans frein est aussi nuisible qu'elle peut être bienfaisante autrement. Mais, nous l'avons vu, les savants de mérite ont toujours su mettre un frein aux écarts de leur imagination, par un contrôle incessant de leurs idées et par la pratique expérimentale qui développe le sens de la réalité des choses. Mais ce contrôle et cette élimination de tout ce qui est faux demandent un travail considérable et incessant; c'est pourquoi, comme le dit Poincaré, « tous les savants ont été des laborieux; si bien doué que l'on soit, on ne fait rien de grand sans travail. Ceux qui ont reçu l'étincelle sacrée n'en sont pas exempts plus que les autres. Leur génie même ne fait que leur tailler de la besogne! » C'est cette application continue et souvent presque inconsciente qui a souvent donné aux savants l'illusion de la spontanéité de leurs découvertes, parce qu'elles leur sont apparues après un repos plus ou moins prolongé. Ce fait prouve que le chercheur est souvent incapable de discerner la vérité dans la multitude de ses idées; il lui faut le recul du temps qui efface les moins importantes.

Jusqu'à présent nous avons considéré les découvertes au point de vue individuel. Il importe aussi de les considérer au point de vue collectif. L'histoire des sciences nous révèle un fait très frappant et assez fréquent : celui de la découverte simultanée et indépendante de mêmes lois, de la création d'hypothèses à peu près semblables par des chercheurs différents. Jusqu'à quel point cette indépendance est-elle réelle et complète? Y a-t-il une coïncidence due au hasard, ou la simultanéité est-elle une conséquence naturelle de l'évolution de l'esprit humain? Dans ce cas, les découvertes seraient pour ainsi dire la résultante du progrès de la société et jusqu'à un certain point indépendantes des influences individuelles. Elles seraient principalement l'œuvre des générations successives.

Le calcul des infiniment petits a été imaginé à peu près en même temps par Leibnitz en Allemagne et Newton en Angleterre. Si cette méthode originale et féconde lui a été utile pour faire ses découvertes, il n'en est pas moins vrai que la théorie de la gravitation universelle de Newton nous apparaît comme la résultante et le couronnement des observations de ses prédécesseurs : Tycho-Brahé, Copernic, Galilée, Képler. Au XVII^e^ siècle, les physiciens cherchent à pénétrer les mystères de l'action de l'air atmosphérique. Jusqu'à ce moment, ils s'étaient contentés de les expliquer par l'horreur du vide. Ceci les amène à étudier comment les gaz se comportent dans différentes circonstances. Boyle, en Angleterre, découvre la loi de compressibilité. Quelques années plus tard, Mariotte, en France, sans connaître les travaux de Boyle, arrive aux mêmes résultats. Un fait analogue se produit encore pour les effets de la chaleur sur les gaz. Dalton, Gay-Lussac et le physicien Charles en trouvent presque simultanément les lois. Leur connaissance amène bientôt le physicien italien Avogadro à trouver les bases scientifiques de la théorie atomique. Trois ans après et sans rien connaître des travaux d'Avogadro, Ampère les découvre à son tour. On ne doit pas être trop surpris de l'ignorance des physiciens à l'égard des travaux de leurs confrères. Il ne faut pas perdre de vue qu'au début du XVIII^{e} siècle les publications scientifiques étaient encore très limitées et les moyens de communication difficiles.

Pour l'électricité, je pourrais donner plus d'un exemple encore.

Je me bornerai à citer celui de la découverte du condensateur, connu sous le nom de bouteille de Leyde, qui s'est faite à peu près en même temps en Allemagne et en Hollande.

Dans la première moitié du XIX^{e} siècle, le médecin allemand

Mayer et le physicien anglais Rumford arrivent par des voies différentes au principe de la conservation de l'énergie. Je vous épargne d'autres exemples qui touchent au même sujet.

Dans le domaine de la lumière, Descartes a été accusé injustement de plagiat à propos de la loi de réfraction de la lumière, trouvée par Snell, mais restée inédite.

Puis, plus tard, à propos de la découverte de la photographie, lorsque Arago eut annoncé à l'Académie et au monde, le 7 janvier 1837, la découverte du Daguerréotype, sans toutefois en révéler la nature, Talbot s'empressa de présenter à la Société royale de Londres, le 30 du même mois, une communication sur les images négatives qu'il obtenait au moyen de son papier. Il adressa à l'Académie une réclamation de priorité, mais il est prouvé que Daguerre ignorait les travaux de Talbot.

Je vous ai parlé de la théorie du carbone asymétrique trouvée par Van t'Hoff. Eh bien, la même théorie fut imaginée, et publiée à quelques semaines d'intervalle, par le chimiste français Le Bel.

Les mêmes coïncidences se rencontrent pour les inventions. Le 15 février 1876, le Bureau des brevets des États-Unis recevait deux demandes, l'une de Graham Bell, du Massachusetts, l'autre de Gray, de Chicago : Il s'agissait de l'invention d'un appareil pouvant transmettre la voix télégraphiquement. L'examen des demandes prouva qu'elles étaient si semblables que, pour accorder les brevets, on dut rechercher laquelle avait été déposée la première.

Il semble bien, comme l'a dit Poincaré, qu'il y a des moments où le blé, depuis longtemps semé, est prêt à naître, et on le voit sortir de terre sur tous les points à la fois. Ainsi, dans un intervalle de temps, souvent restreint, la même découverte a été faite, ou la même théorie imaginée d'une façon tout à fait indépendante par des chercheurs différents. L'influence des personnalités se limite donc à avancer de quelques années le progrès de la science. Pour exprimer ce fait sous une forme poétique, nous ne pouvons mieux faire que de citer les paroles de Dumas : « Il en coûte aux plus rares esprits de sentir que dans la marche lente mais sûre du génie de l'humanité, ils ne sont qu'un accident; de reconnaître que dans ce mouvement de la marée intellectuelle, qui élève le niveau de l'âme humaine, ils ne sont qu'une vague un peu plus vigoureuse qui précède les autres, mais qui ne dépasse guère la ligne qu'elles allaient toutes bientôt franchir, poussées par la main de Dieu. »

Si l'on y réfléchit, on trouve d'ailleurs que des découvertes et des théories, qui surpassent de beaucoup le niveau de culture moyen du moment, ne peuvent être comprises et adoptées.

En effet, le caractère essentiel de la science est de relier les faits entre eux, d'établir des relations. Il en résulte que les progrès qui devancent de beaucoup l'époque de leur arrivée normale restent isolés ; ils ne peuvent être rattachés à l'ensemble des connaissances du moment, et, par suite, passent nécessairement inaperçus.

Le génie qui précède de trop loin l'œuvre des générations reste isolé. Il est semblable à l'explorateur qu'une marche trop rapide a séparé de ses compagnons. Il ne peut les faire bénéficier immédiatement des pays nouveaux qu'il a découverts. Il doit les attendre s'il veut les guider plus loin. C'est ainsi qu'il apparaît que les découvertes sont nées, se sont développées par des poussées successives de l'effort individuel et collectif de la pensée, qui arrache petit à petit à la nature ses secrets. L'ombre épaisse et immense qui nous enveloppe s'éclaire ainsi, bien faiblement sans doute, mais assez pour affirmer la victoire de l'esprit sur la matière.

L'ATLANTIDE (1),

par A. RUTOT.

L'Atlantide! Que de controverses ce mot évoque dans nos esprits! que de flots d'encre ont coulé, depuis un siècle, pour n'aboutir, semble-t-il, à aucun résultat décisif; et, d'autre part, que de légendes et de spéculations se sont greffées sur le récit de Platon, suggérées surtout par le côté sentimental de la fin mystérieuse et tragique de l'île des Atlantes.

Enfin, à ces exagérations, il convient d'ajouter l'interprétation inacceptable de certains poèmes védiques, d'après laquelle les adeptes des doctrines ésotériques font, à tort, intervenir l'Atlantide parmi leurs étranges théories sur les origines du monde et de l'Humanité. (Voir note **1**.)

Au point où en sont arrivées les choses, il est devenu nécessaire d'opposer une digue au flot des spéculations dangereuses qui envahissent non seulement la littérature et les croyances, mais qui menacent même la Science positive.

Certes, on peut affirmer que les récits de Platon sont respectables, et il ne peut être question de les rejeter en bloc comme d'aucuns ont voulu le faire; mais il conviendrait désormais de ne plus en tirer de conséquences démesurément exagérées et insoutenables; il est préférable d'en analyser les textes à la lueur des données de la Science, afin d'en déduire l'enseignement historique qu'ils comportent.

---

(1) Voir les notes complémentaires insérées à la suite du texte de la lecture faite en séance publique de la Classe des sciences de l'Académie royale de Belgique le 15 décembre 1919.

M'étant trouvé en situation de devoir me faire une opinion sur ce que pouvait être l'Atlantide de Platon, j'ai parcouru les principaux ouvrages traitant de la question, et c'est au cours de mes recherches que le hasard m'a fait connaître l'existence d'un mémoire que je n'avais jamais vu cité par les auteurs consultés et qui, à mon avis, donne la véritable solution du problème.

Le mémoire dont il s'agit est intitulé : *Les Atlantes. Histoire de l'Atlantis et de l'Atlas primitif, ou introduction à l'Histoire de l'Europe.*

L'auteur est M. E.-F. Berlioux, professeur de géographie à la Faculté des lettres de Lyon, et le travail sert d'entrée en matière au premier fascicule de l'*Annuaire de la Faculté des lettres de Lyon* (histoire et géographie), paru en 1883.

Ayant pu me procurer ce fascicule à la Bibliothèque royale de Belgique, mon étonnement de ne pas avoir vu cité le travail dont il s'agit a été moins vif lorsque j'ai constaté qu'aucun lecteur n'en avait jamais coupé les pages (**2**).

Quoi qu'il en soit, je n'en suis pas moins convaincu que M. le Prof^{r} Berlioux a donné, depuis près de quarante ans, la solution complète de la question de l'Atlantide (**3**).

Que dit Platon ?

Chacun se rappellera que l'illustre philosophe grec nous a laissé, dans ses œuvres, deux relations se rapportant à l'Atlantide: une première, résumée mais entière, dans le livre intitulé : *Timée ou De la Nature ;* une seconde, malheureusement incomplète, dans *Critias ou De l'Atlantide ;* celle-ci renferme foule de détails intéressants.

Dans le *Timée,* Platon rapporte une conversation entre quatre personnages, dont l'un, du nom de Critias, relate que jadis, le célèbre législateur Solon a raconté à son bisaïeul Dropide, qui lui-même l'a transmis à son aïeul, un fait de l'histoire ancienne de la Grèce. C'est cet aïeul qui, à son tour, fit part à Critias du récit que nous allons résumer succinctement : Solon, après avoir donné des lois aux Athéniens, partit pour un long voyage en Orient, au cours duquel il eut l'occasion de visiter l'Égypte.

S'étant arrêté dans la ville de Saïs, il se mit en rapport avec les prêtres du temple dédié à la déesse Neïth, auxquels il exposa ce qu'il savait de l'histoire de sa patrie (**4**).

Les faits ne se rapportant guère qu'à une époque assez récente, un vieux prêtre, prenant la parole, déclara que les livres sacrés du temple lui permettaient de reculer beaucoup plus loin dans le passé et qu'il pouvait certifier qu'environ 8000 à 9000 ans auparavant, la ville d'Athènes avait réalisé de grandes et admirables choses, tombées depuis lors dans l'oubli.

L'un de ces faits glorieux consistait à avoir repoussé une formidable attaque des Atlantes contre les pays de l'Orient, qu'ils voulaient asservir.

Ces Atlantes, venus de la mer Atlantique (**5**), habitaient une île plus grande que la Lybie et l'Asie, située au-devant du détroit des Colonnes d'Hercule ; ils constituaient un peuple riche et puissant, dont les rois étaient non seulement maîtres de l'île, mais encore des bords de la Méditerranée jusqu'à la Tyrrhénie, voisine de la Grèce.

Toute cette puissance se réunit un jour pour asservir la patrie de Solon, l'Égypte et tous les peuples voisins.

C'est alors qu'éclatèrent au grand jour la vertu et le courage d'Athènes, qui exerçait la suprématie sur les Hellènes.

Ces populations s'étant vues obligées d'abandonner Athènes à son sort, celle-ci brava seule les plus grands dangers et arrêta l'invasion; puis, plus tard, de grands tremblements de terre accompagnés d'inondations s'étant produits, l'île des Atlantes fut engloutie sous la mer en un seul jour et en une nuit fatale, avec tout ce qu'il y avait en Grèce de guerriers (**6**).

Depuis ce jour, la mer est devenue inaccessible et a cessé d'être navigable, à cause de la quantité de limon que l'île abîmée a laissée à sa place.

En somme, Platon nous apprend que l'Atlantide était une île baignée par la mer Atlantique, située en face des Colonnes d'Hercule et qui, peu de temps après une agression repoussée par Athènes, fut engloutie sous la mer environ 8000 ans avant Solon.

Maintenant, que dit M. Berlioux?

Il confirme l'existence de l'Atlantide, il admet la véracité du récit de Platon, mais il montre que le pays des Atlantes n'était nullement l'île hypothétique que tous les auteurs placent dans l'océan Atlantique, mais qu'il consiste dans les territoires du Nord de l'Afrique comprenant, de nos jours, le Maroc, l'Algérie et la Tunisie. Il conclut donc que l'Atlantide n'a pas disparu sous la mer, mais qu'elle n'a sombré que dans la barbarie et l'oubli.

Pour ce qui me concerne, je déclare adhérer entièrement à ces conclusions, en ajoutant que les faits signalés par le prêtre de Saïs remontent non pas à 8000 ans, mais tout au plus à 800 ans avant Solon.

C'est ce que nous allons essayer de prouver en nous aidant des lumières de la géographie, de la géologie, de la préhistoire, de l'anthropologie et de l'histoire proprement dite.

Abordons d'abord le problème au point de vue géographique.

Si nous nous rémémorons la carte de la partie occidentale du Nord de l'Afrique, nous voyons que l'ensemble Maroc-Algérie-Tunisie forme comme un vaste quadrilatère dont trois côtés sont baignés par la mer.

Aux quatre angles du quadrilatère, nous trouvons : le mont Atlas, les Colonnes d'Hercule, aujourd'hui détroit de Gibraltar, l'antique Carthage, puis le fond du golfe dénommé par les anciens Petite Syrte, aujourd'hui golfe de Gabès.

Mais, dira-t-on, les territoires désignés ci-dessus ne constituent pas une île.

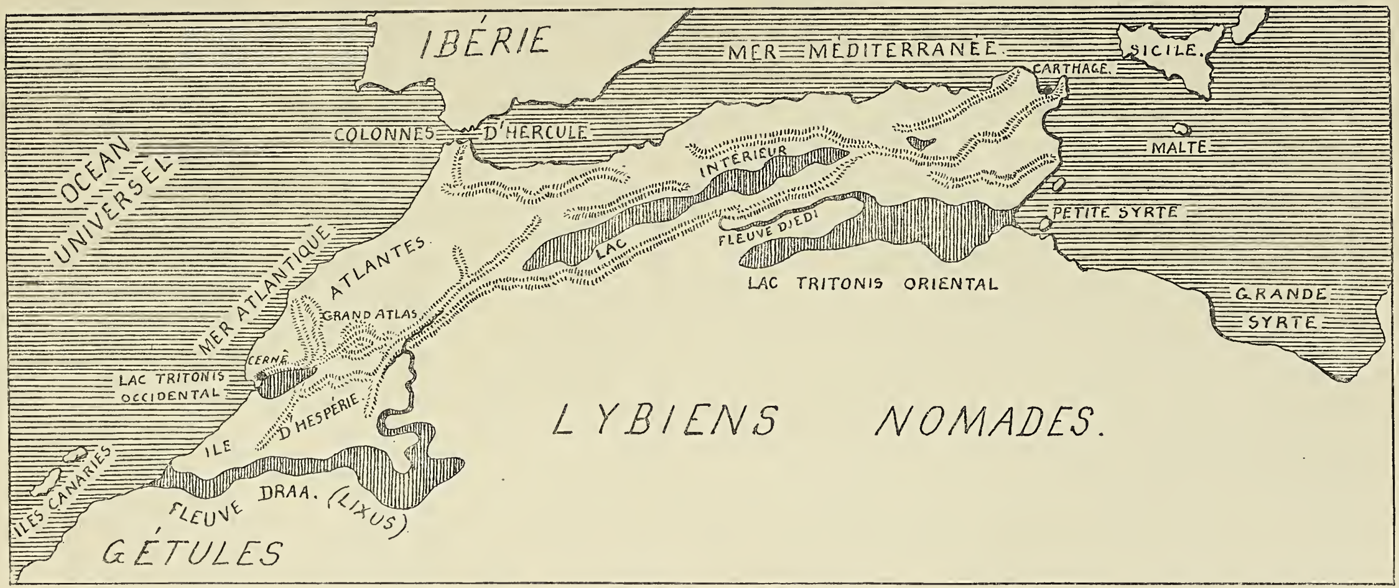

IBÉRIE
MER MÉDITERRANÉE
SICILE.
CARTHAGE.
MALTE
COLONNES D'HERCULE
OCEAN UNIVERSEL
INTÉRIEUR
LAC
FLEUVE DJEDI
PETITE SYRTE
LAC TRITONIS ORIENTAL
GRANDE SYRTE
ATLANTES
MER ATLANTIQUE
GRAND ATLAS
CERNÉ
LAC TRITONIS OCCIDENTAL
ILE D'HESPÉRIE
LYBIENS NOMADES.
ILES CANARIES
FLEUVE DRAA. (LIXUS)
GÉTULES

Fig. 1. — Carte de l'île Atlantide reconstituée.

Remarquer à l'Est le lac Tritonis oriental s'ouvrant dans la Petite Syrte et, à l'Ouest, le lac Tritonis occidental s'ouvrant sur l'Océan, ainsi que les fleuves Lixus (Draa), d'une part, et Tritonis (El-Djedi), d'autre part, complétant, avec le grand lac intérieur, la barrière liquide séparant l'Atlantide du continent africain.

Certes, mais considérons la base du quadrilatère, telle qu'elle se présente actuellement à nos yeux.

Partant de l'Est, c'est-à-dire du fond du golfe de Gabès, nous rencontrons d'abord, sur plus de 400 kilomètres de longueur, un chapelet d'énormes lacs desséchés dénommés *Chotts*, aujourd'hui distincts, mais donnant l'impression qu'anciennement ils formaient un tout continu jusqu'à la mer (7). Voici donc plus d'un tiers du côté sud nettement séparé du continent africain.

Si maintenant nous portons nos regards vers l'Ouest, nous constatons l'existence de deux longues zones de terrain plat, formées d'alluvions, au travers desquelles serpentent les fleuves Sous et Draa. A son tour, cette zone donne l'impression de la présence, aux temps anciens, de bras de mer terminés par de vastes lacs séparant un deuxième tiers du côté sud du continent.

Reste le troisième tiers; or un coup d'œil sur la carte suffit pour constater l'existence de deux fleuves principaux ayant leurs sources situées dans le massif montagneux du Nord et se dirigeant l'un vers l'Est, l'autre vers l'Ouest, où ils rejoignent d'une part le chapelet des grands lacs, d'autre part les grandes plaines d'alluvions. Ces fleuves, très larges autrefois, complétaient approximativement, avec la longue ligne de *Chotts* intermédiaires encore existante, la barrière aqueuse nécessaire à l'appellation d'île. (Voir figure 1 la carte de l'Atlantide reconstituée.)

Ajoutons que l'on ne peut nier que cette île se trouve *devant* le détroit de Gibraltar, car tout dépend de l'interprétation que l'on veut donner au mot « devant » employé par l'auteur des captivants récits.

Nous venons de voir ce que nous apprend la géographie moderne; que va nous révéler maintenant la géographie ancienne?

Platon est loin d'être le seul écrivain de l'antiquité qui ait parlé de l'Atlantide; non seulement il n'y est pas allé, mais il a simplement recueilli un récit qui avait déjà passé, depuis la narration du prêtre de Saïs jusqu'à Critias, par cinq bouches en plus de deux cents ans, ce qui présume, assurément, plus d'une transformation sensible.

Or, Hérodote, géographe et voyageur, qui vivait une centaine d'années avant Platon, avait visité le pays des Atlantes, et, 400 ans après Platon, Diodore de Sicile, contemporain du Christ, nous a laissé des compilations intéressantes d'auteurs anciens, dont les œuvres ont, en majeure partie, disparu.

Voyons ce que dit Hérodote dans sa description d'un itinéraire traversant toute la Lybie, de l'Est à l'Ouest.

Il nous apprend d'abord que pour atteindre la Lybie occidentale, il existait deux routes principales : l'une, partant de Grèce, empruntait la voie maritime jusqu'au fond de la Petite Syrte, tandis que l'autre, terrestre, partait de Memphis, sur le Nil, et rencontrait la première pour se diriger vers l'Ouest.

Après une longue description des tribus peuplant la région orientale, le voyageur arrive à celle où s'enfonce la Petite Syrte et il dit : « Aux Lotophages confinent, le long de la mer, les Machyles, qui font aussi usage du lotus, mais beaucoup moins que les premiers. *Ils s'étendent jusqu'au Triton, fleuve considérable qui se jette dans un grand lac du même nom, où l'on voit l'île de Phla.* »

Ajoutons, en passant, que le géographe Ptolémée dit que le fleuve Triton prend sa source au mont Ouasaleton, assez loin de la Petite Syrte, qu'il forme successivement le lac de Pallas, le lac Tritonis, puis qu'il se jette dans la Petite Syrte au nord et à peu de distance de Tacape, aujourd'hui Gabès.

Hérodote continue : « Immédiatement après les Machyles, on trouve les Ausséens. *Les deux nations habitent autour du lac Triton, mais elles sont séparées par le fleuve du même nom.* » Puis, ayant encore décrit quelques peuplades, en marchant toujours vers l'Ouest, il arrive dans la région où s'élève le mont Atlas.

Voici ce qu'il nous raconte : « Après dix jours de marche encore, autre tertre de sel avec de l'eau et des hommes à l'entour (**8**). Auprès du sel s'élève une montagne dont le nom est Atlas, étroite, régulièrement circulaire et si haute, dit-on, qu'il est impossible d'en voir le sommet, car jamais les nues ne l'abandonnent, été comme hiver (**9**). Les habitants de ce pays disent que c'est la colonne du ciel; *ils lui empruntent leur nom car on les appelle Atlantes.* »

Un peu plus loin Hérodote ajoute : « J'ai pu énumérer et nommer, jusqu'à ces Atlantes, les habitants de cette lisière culminante du désert; au delà je ne le puis, quoiqu'elle s'étende jusqu'aux Colonnes d'Hercule et plus loin. »

Donc Hérodote parle nettement des Atlantes comme habitant la province de Lybie appelée Atlas, du nom de la grande montagne, sans faire la moindre allusion à l'existence d'une île.

De son côté, Diodore de Sicile parle longuement de la Lybie et fournit des détails sur la région où s'élève l'Atlas, la plus haute montagne de ces contrées, dont les pentes tombent dans l'Océan; mais aux temps où écrivait Diodore, les Atlantes avaient déjà disparu comme peuple autonome.

Toutefois, l'historien, au cours de ses récits, fournit d'intéressants détails nous apprenant, confusément il est vrai, qu'au Sud du territoire de l'Atlas, existaient deux grands lacs, l'un communiquant avec la Petite Syrte, l'autre débouchant dans l'Océan, ce qui confirme ce que nous disions ci-dessus au sujet de l'hypothèse relative aux deux lacs.

Le même auteur nous apprend aussi le nom de la capitale des Atlantes : c'est Cernè, omis par Platon, malgré la description détaillée qu'il en donne.

Cette capitale se trouvait sur le bord du lac Tritonis occidental, au débouché d'un canal qui reliait le lac à l'Océan (**10**).

Diodore de Sicile ajoute : « La Mythologie des Atlantes diffère peu de celle des Grecs, au sujet de la naissance des dieux...; plus loin il dit : « *Les Atlantes qui habitent les bords* *du Grand Océan* et cultivent un territoire fertile, se distinguent de leurs voisins par leur piété et par leur humanité envers les étrangers. »

Plus loin encore, il confirme : « Tels sont les faits recueillis par les Mythologues des Atlantes, habitant les bords de l'Océan. »

Il résulte des citations précédentes que Platon est le seul auteur ancien qui qualifie l'Atlantide d'île, bien qu'en fait la disposition ancienne, caractérisée par l'existence des deux lacs Tritonis et des deux fleuves qui s'y jetaient, justifiait cette appellation au moins aussi bien que celle « d'île de Méroë » donnée au territoire de la Haute-Égypte compris entre deux bras du Nil

Quant aux autres auteurs de l'antiquité, leurs récits montrent que les uns ont connu la contrée de l'Atlas sous son aspect primitif, tandis que les autres se sont trouvés en présence de l'état de choses actuel, selon qu'ils avaient voyagé avant ou après le tremblement de terre dont parle Diodore et qui, d'après Dionysios, amena la disparition du lac Tritonis occidental à la suite de la déchirure de son enceinte tournée vers l'Océan.

Pour tous ces auteurs, les Atlantes sont donc simplement les habitants de la région que domine l'Atlas, celle-ci n'étant que l'extrémité occidentale de la Lybie.

Abandonnons maintenant les généralités pour vérifier si la partie Sud-Ouest du Maroc, avec le Tritonis restitué, répond à la description que donne Platon des environs de la métropole des Atlantes, c'est-à-dire de Cernè.

Voici ce qui y est dit : « Le pays consiste en une plaine fertile s'étendant vers le Sud, entourée, vers le Nord, de montagnes qui dépassent en élévation et en beauté toutes celles qui existent aujourd'hui et qui descendent jusqu'à la mer. »

Quant à la capitale, elle était bâtie sur la rive d'un canal reliant le lac Tritonis à la mer, et du port de laquelle on pouvait s'embarquer pour les îles et même, ajoutons-nous, pour l'Amérique, ce qui est maintenant prouvé, ainsi que nous le montrerons ci-après.

La disposition indiquée n'est-elle pas précisément celle de la contrée montagneuse semi-circulaire, dominant la grande plaine d'alluvions au travers de laquelle serpente, de nos jours, le fleuve Sous?

Notons enfin que certains auteurs anciens parlent non seulement de la disparition du lac Tritonis occidental, par déversement de celui-ci dans l'Océan et sa transformation en une mer de boue, mais ils signalent encore que le même soulèvement sismique a profondément modifié la région orientale, en supprimant le déversoir de l'ancien lac dans la petite Syrte et en le fractionnant en chotts.

Il a pu être établi que cet événement s'est produit avant l'arrivée des Phéniciens et la fondation de Carthage, datant d'environ 825 ans avant notre ère.

Comme on le voit, l'étude géographique, à elle seule, jette déjà une vive lumière sur la question.

Les partisans comme les adversaires de l'Atlantide océanique ont demandé à la géologie de venir appuyer leur thèse, mais satisfaction complète n'a pu être donnée ni aux uns ni aux autres.

Des géologues de grande autorité, tels MM. de Lapparent, Termier et d'autres, ont étudié le problème et sont arrivés à cette conclusion qu'il est *possible* que l'Atlantide océanique ait existé, mais il n'y a aucune certitude qu'il en soit ainsi.

La réalité est que l'océan Atlantique est de formation assez récente, car pendant une grande partie des temps géologiques, il existait, autour des pôles, deux vastes continents séparés par une mer équatoriale, dite Thétis, dont la Méditerranée actuelle, la mer de la Sonde et celle des Antilles représentent les derniers restes.

Le morcellement du grand continent boréal a commencé à se produire pendant l'époque tertiaire et les effondrements partiels se sont succédé durant cette période et même jusqu'à la fin du Quaternaire.

C'est ainsi que l'on attribue la grande glaciation quaternaire à un effondrement qui a permis aux eaux de l'océan Glacial de s'écouler dans la partie tropicale, de manière à modifier très notablement la climatologie du Nord de l'Europe et de l'Amérique et à provoquer une énorme extension des glaciers tant arctiques que ceux descendant des hautes montagnes (**11**).

Les sondages ont montré que le fond de l'Océan, entre Gibraltar et l'Amérique, est très mouvementé, mais que, d'une manière générale, on constate, le long des rivages africain et américain, deux longues dépressions encadrant une zone surélevée, constituant comme un long promontoire partant du Groenland, englobant l'Islande, puis descendant vers le Sud, en s'amincissant, jusqu'au 70^{e} degré de latitude australe.

Sur ce plateau submergé, les volcans abondent, car sa direction est jalonnée par les îles Gough, Tristan d'Acunha, Sainte-Hélène, de l'Ascension, les îles du Cap Vert, les Canaries, Madère, les Açores, l'Islande et l'île de Jean Mayen, toutes volcaniques sans exception.

Il suit de là qu'il a pu encore exister, vers la fin des temps quaternaires, une grande terre émergée dans la région des Açores, terre formée d'un socle de roches anciennes supportant quelques lambeaux de roches sédimentaires et couverte de volcans éteints; terre qui, à son tour, se serait effondrée sous la mer à l'aurore des temps modernes.

Il y a lieu de remarquer qu'il n'est ici question que d'une possibilité qui, si même elle avait été une réalité, ne serait venue contredire en rien la manière de voir de M. le Prof^{r} Berlioux, lequel, d'accord avec les géographes de l'antiquité, place l'Atlantide en dehors de l'Océan.

Il nous reste maintenant à voir quelles lumières peut nous apporter l'application des données de la préhistoire, de l'histoire et de l'anthropologie; toutefois nous ferons observer, tout d'abord, que ces trois sciences se relient ici de façon si complète, s'entrepénètrent si intimement, qu'il est impossible de traiter chacun des sujets séparément. Pour voir clair dans l'ensemble des faits, le mieux est de suivre le déroulement de l'histoire, qui nous est fourni dans le deuxième récit de Platon, ayant pour titre : *Critias ou De l'Atlantide,* récit beaucoup plus détaillé que le premier, mais dont une moitié seulement est parvenue jusqu'à nous.

Nous y lisons qu'à l'époque où les dieux se partagèrent le monde, la région qui entoure l'Atlas échut à Poseïdôn ou Neptune, qui s'y installa avec sa famille.

Clito, femme de Neptune, ayant rendu celui-ci cinq fois père de deux jumeaux, ce fut le fils aîné, Atlas, qui, plus tard, prit la souveraineté de l'île et lui donna son nom (**12**).

Atlas fut un grand roi ; sous son règne, une importante civilisation se développa à la fois sous le rapport matériel, politique et sacerdotal ; il s'occupa d'abord de fonder des villes, parmi lesquelles la capitale Cernè, qui devint bientôt un centre à la fois artistique et scientifique important et qu'il ne faut pas confondre avec la Cernè fondée plus tard par les Phéniciens, beaucoup plus au Sud, sur la côte de l'Océan.

Platon ajoute que l'île Atlantide formait une plaine entourée de montagnes, sauf vers le Sud, et située près de la mer; au milieu se trouvait la partie la plus fertile.

Ensuite vient une longue description de la capitale-métropole, de ses édifices en pierres blanches, rouges et noires tirées du sol, des bassins creusés dans le roc, destinés à amarrer les navires, de l'Acropole, au milieu de laquelle s'élevait un temple fastueux mais d'aspect barbare, plaqué intérieurement d'or, d'argent et d'ivoire et, extérieurement, de bronze.

A l'intérieur du temple se trouvait une gigantesque statue de Poseïdôn assis sur un char traîné par six chevaux ailés, autour de laquelle s'alignaient cent statues représentant les Néréïdes portées par des dauphins. En outre, on voyait encore la colonne de bronze sur laquelle était gravée la constitution ou les lois des

Atlantes; enfin, la capitale et son port étaient entourés d'une triple enceinte fortifiée. Quant au port, il était rempli de navires et de marchands venus de tous les pays où, jour et nuit, il régnait une grande animation.

Cette description qui, il y a trente à quarante ans, pouvait être jugée intéressante et pittoresque, devient actuellement pour nous un document précieux et révélateur, car elle situe dans le temps, de manière précise, l'histoire des débuts du peuple atlante.

Nous voici donc en présence d'un pays qui, après un développement relativement court, possède une civilisation nettement déterminée, qui ne se distingue en rien, dans ses lignes principales, d'aucune autre civilisation connue, telle que celle de l'Égypte, de la Babylonie, des îles de la mer Égée, etc.

Nous y remarquons des villes fortifiées avec port, temples, palais, législation, armée, sacerdoce, écriture et, fait capital, connaissance et emploi, non seulement des métaux précieux, or et argent, mais aussi du bronze.

Or, chacun sait, maintenant, que des dates ont pu être attribuées à l'apparition de l'usage des métaux dans tout le bassin de la Méditerranée, depuis l'Ibérie jusqu'à l'Égypte, et ces dates, évidemment, viennent illuminer subitement tout le problème d'un jour éclatant.

Les spécialistes sont actuellement d'accord pour adopter l'an 3000 avant notre ère comme date des débuts de la dissémination et de la propagation du métal bronze qui, après une courte période du cuivre, vient détrôner à jamais l'usage de la pierre taillée et polie.

Le bronze semble avoir fait sa première apparition en Égypte, un peu avant les rois de la première dynastie, à laquelle appartient Menès, c'est-à-dire à une date que l'on peut évaluer, au minimum, à 3500 ans avant notre ère.

De l'Égypte, le bronze paraît s'être assez rapidement propagé dans l'Asie Mineure et notamment dans la Troade, car les deux installations de la Troie primitive, qu'il ne faut pas confondre avec la Troie homérique, bien postérieure, ont été édifiées entre 3000 et 2400 ans avant notre ère. Pendant cette première évolution, l'usage du bronze s'est développé, en même temps que la construction de fortifications en pierres, pour la protection des villes.

En Crète et dans les Cyclades, l'âge de la pierre ou *Néolithique* a cessé vers l'an 3000, pour faire place à la transition de la pierre au métal cuivre, transition dite *Énéolithique,* qui dure environ huit cents ans.

C'est alors que se substitue au cuivre l'alliage de cuivre et d'étain, connu sous le nom de bronze, et peu après, vers l'an 2000, s'élève en Crète le premier des palais de Cnossos, devenus célèbres depuis les importantes fouilles de M. Arthur Evans.

Ensuite, l'usage du cuivre, puis du bronze se propage rapidement vers l'Occident au travers de la Méditerranée, grâce à une marine marchande active, et il se répand enfin, des deux côtés des Colonnes d'Hercule, au pays des Atlantes d'abord, ensuite en Ibérie.

Le mouvement civilisateur des Atlantes s'effectue donc normalement, sous l'influence des civilisations égéenne et égyptienne, mais avec un certain retard dû au temps nécessité par la translation, de telle sorte que rien n'autorise à supposer que la civilisation des Atlantes soit plus ancienne que celle des peuples de l'Orient.

Rien n'indique, dans cette civilisation, l'existence d'une particularité caractéristique qui permette de la séparer et d'en faire une entité distincte de celle d'aucun autre peuple de l'antiquité. De par la description détaillée de Platon, confirmée par les écrits des auteurs grecs, la civilisation des Atlantes rentre dans le moule des civilisations synchroniques, et elle doit être soumise à la même chronologie.

Etant donné que le premier âge du Bronze commence à

Cnossos vers l'an 2200 avec l'édification, par Minos, du premier palais; qu'il prend son extension avec le second palais, c'est-à-dire de 1800 à 1600 ans avant notre ère, il n'est plus possible d'admettre que la description de Platon concorde avec une époque sensiblement différente de l'an 1500, ce qui nous conduit fort loin des 9000 ans avant Solon, attribués — peut-être à tort — au vieux prêtre de Saïs, comme date des événements qu'il narre.

Et puis, voit-on Athènes, fondée vers 1550 par l'Égyptien Cécrops, assez puissante en armées et en marine militaire pour repousser, à elle seule, la dangereuse agression des Atlantes 8000 ans auparavant !

Or l'histoire de la Grèce primitive, c'est-à-dire l'âge pélasgique, reste entourée d'épaisses ténèbres qui ne se dissiperont vraisemblablement jamais. Tout ce que l'on en sait, c'est que les Pélasges, vers l'an 2200 et après, se répartissaient en cinq ou six tribus ou royaumes barbares, non seulement sans unité, mais en guerre perpétuelle entre eux et avec les voisins, où la cruauté, la rapine et le brigandage étaient seuls honorés et glorifiés.

Ce n'est qu'à partir de l'an 1400, avec l'âge hellénique, dit aussi héroïque, à cause des grandes figures d'Hercule, de Thésée, de Jason, que débute le développement des Hellènes, avec l'établissement des républiques de Sparte et d'Athènes, époque où brille d'abord Lycurgue, vers 880, puis Solon, Pisistrate, Pythagore, Hérodote, Socrate, Platon, les poètes et enfin Périclès, à partir duquel (422) les deux républiques, aggravant leur conflit séculaire, entament la lutte fatale qui entraîna non seulement la chute d'Athènes, mais aussi la décadence générale et profonde de la Grèce, vouée désormais à la domination étrangère.

On voit donc qu'il n'y a aucun accord possible entre la date de 8 à 9000 ans assignée aux événements relatés par Platon et la possibilité de l'existence de nations comme l'Atlantide et la

Grèce, possédant des armées et des marines organisées, des villes fortes, des législateurs et surtout l'usage industriel intensif du bronze.

Vers 8000 ou 9000 ans avant Solon, nous sortions à peine de l'âge du Renne, de l'époque des cavernes, de la fin de la grande glaciation quaternaire.

Si donc nous devons situer dans le temps l'apogée des Atlantes, nous devons simplement reculer, depuis l'époque de Solon, soit 600 ans avant notre ère, jusque vers 1500, c'est-à-dire 8 à 900 cents ans avant Solon, pour trouver l'état précis de civilisation requis pour concorder avec le bel âge du bronze dévoilé par la protohistoire.

Notons que le fameux siège de Troie, chanté par Homère, où les armées et la marine grecques furent conduites par Agamemnon, s'est terminé en 1180, soit environ 120 ans au minimum avant les débuts de la propagation du fer au travers de l'Ancien Monde (**13**).

Nous voici donc fixés sur la date à laquelle a dû se passer l'apogée des Atlantes, suivi de près de leur décadence et de la prétendue submersion de leur île.

Or les plus anciens auteurs rapportent qu'entre la décadence des Atlantes, soit pour nous l'an 1500 environ, et la fondation de Carthage vers 825, s'est produit le violent tremblement de terre qui, par la disparition plus ou moins totale des deux lacs Tritonis, a permis le rattachement de l'île primitive au continent africain.

Mais, d'après Platon, le désastre du pays des Atlantes a également concordé avec de grandes inondations en Grèce, où des armées furent détruites, et, précisément vers la même époque, nous voyons, signalé par les historiens, un événement qui a reçu le nom de déluge de Deucalion, dont la date n'a pu être précisée, mais que l'on place généralement 1550 ans avant notre ère.

Il découle donc de la comparaison des faits et des dates certains accords impressionnants.

Nous connaissons ainsi quelques précisions militant en faveur de la thèse de M. le Prof^r^ Berlioux, mais il paraîtra sans doute intéressant de se faire une idée des Atlantes eux-mêmes.

Sont-ce des géants à un œil, genre Cyclope, comme le prétendent les occultistes?

Non, car les Atlantes nous sont parfaitement connus : ce sont des gens comme il en existe encore chez nous et dont il reste, de nos jours, des représentants appelés Berbères, groupés en tribus, aux frontières de l'Algérie et du Maroc et auxquelles appartiennent notamment les Kabyles; en outre il en vit encore aux îles Canaries, notamment à Ténériffe, où, plus ou moins métissés, ils sont connus sous le nom de *Guanches*.

Bref, ce sont des hommes blancs, de haute stature, à crâne long (dolichocéphales), aux cheveux blonds ou roux et aux yeux bleus; ce sont des survivants de la race préhistorique bien connue des anthropologues sous le nom de Cro-Magnon. Comment pouvons-nous être aussi catégorique?

Pour plusieurs raisons, dont l'une des principales est que leurs voisins et contemporains les Égyptiens nous en ont laissé le portrait fidèle, avec le récit de leurs démêlés réciproques pendant plus de 2000 ans.

On sait que les Égyptiens, peuple hautement civilisé, nous ont conservé, dans leurs bas-reliefs, une documentation historique précieuse, comportant la représentation graphique des faits accomplis.

Chacun de nous se rappellera que sur les nombreuses sculptures de leurs temples et de leurs monuments funéraires, à Thèbes principalement, les artistes égyptiens ont gravé, avec une scrupuleuse exactitude, les événements divers et les personnages qui y ont pris part.

C'est ainsi que l'on peut reconnaître facilement, à tous leurs caractères ethnographiques, non seulement les gens de leur nationalité, mais aussi les Sémites, les Assyriens, les Nègres, les Éthiopiens et les Lybiens, leurs voisins occidentaux, dont

Représentations de Lybiens d'après les peintures du tombeau du roi Séti Ier, à Thèbes.

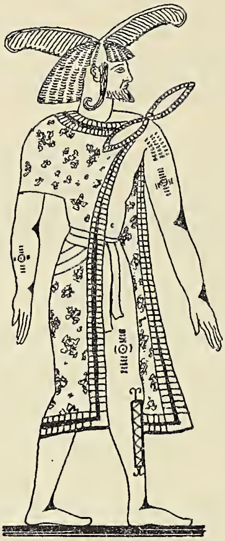


Fig. 2. — Portrait en pied d'un Lybio-Atlante.
Remarquer les dessins imprimés sur le corps.

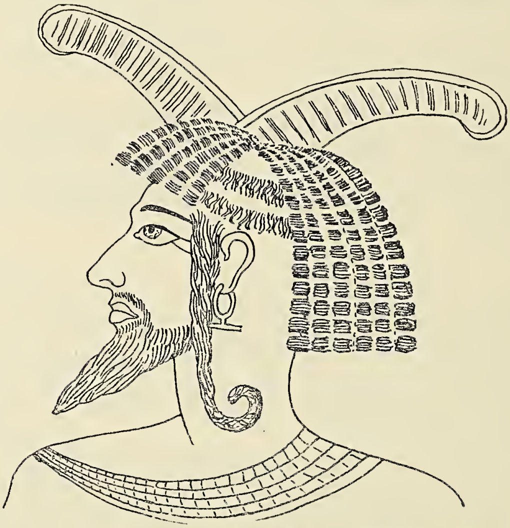


Fig. 3. — Profil agrandi d'un Lybio-Atlante.
Remarquer les cheveux rasés et la mèche pendant sur l'oreille.

les Atlantes constituaient la tribu la plus éloignée et la plus civilisée, parce que la plus dense et la plus pure.

Comment sont figurés ces Lybiens?

On les voit notamment en pied, vêtus d'une longue houppelande en peau de bœuf ou en laine, nouée à l'épaule et ouverte par devant, montrant le corps largement peint ou tatoué, la chevelure de couleur blonde, avec perruque portant deux plumes d'autruche placées en travers et une longue mèche pendant sur l'oreille. (Fig. 2 et 3.)

Comme on s'en convaincra facilement, la représentation est parfaite, car Hérodote nous dit : « Les habitants, autour du lac Triton, ne sont plus nomades; ils laissent croître leurs cheveux sur le côté droit de la tête, rasent le côté gauche et se peignent le corps avec du vermillon. »

Les Égyptiens et les Lybiens se sont trouvés plusieurs fois en contact, le plus souvent en conflit armé, et les premiers ont tenu soigneusement note des événements.

J'ai cru utile de rechercher dans le récent et savant travail synthétique de M. Édouard Meyer les époques auxquelles ont eu lieu les principaux conflits.

La plus ancienne mention remonte aux deux premières dynasties thinites (3315 à 2895 avant notre ère), pendant lesquelles les Lybiens du Nord-Ouest de l'Égypte (Zehenous de Marmarica) furent vaincus.

Pour ce qui concerne l'Ancien Empire (2896 à 2540), un grand bas-relief du temple funéraire de Sahoué mentionne une expédition contre les Lybiens, à la suite de laquelle un grand nombre de chefs, avec femmes et enfants, furent amenés prisonniers.

Dans les deux cas, il semble être question d'expéditions offensives contre les Lybiens pillards de la frontière ouest.

Vers la fin de l'Ancien Empire et pendant la transition qui suit (2360 à 2160), les Lybiens entrent comme mercenaires au service de l'Égypte.

Pendant le Moyen Empire (2160 à 1785), Usertesen I et Usertesen III, de la XII^e dynastie, combattent les Lybiens.

Plus tard, durant la domination des Hyksos, il n'est pas question d'intervention en Lybie et, au début du Nouvel Empire, sous la XVIII^e dynastie, il y aurait même eu, au temps de la reine Tii, une alliance avec les Lybiens.

Une inscription datant de Thoutmès III montre les Lybiens apportant des présents à ce Pharaon.

Mais à partir de la XIX^e dynastie, il y eut changement de race royale et c'est alors qu'une longue lutte commence.

Elle débute sous Séti I^er et se poursuit sous Ramsès II, dit Sésostris (1300 à 1234), puis sous son fils Mernephtah, contemporain de Moïse.

La guerre semble cesser sous les successeurs, peu connus, de ce Pharaon, mais elle reprend avec la plus grande vigueur sous le règne de Ramsès III, fondateur de la XX^e dynastie (1200 à 1169).

Sous Mernephtah, les Lybiens s'avancèrent jusque dans la Moyenne Égypte, où ils s'installèrent, et ce n'est que sous Ramsès III qu'ils furent définitivement battus, avec leurs alliés européens, tant sur terre que sur mer, grâce aux secours donnés aux Égyptiens par les Athéniens et les Phéniciens (**14**).

Ces derniers épisodes ne concordent-ils pas de manière frappante avec les déductions que nous avons émises précédemment? Car de Mernephtah jusqu'à Ramsès III (1234 à 1200, d'après Édouard Meyer), l'agression des Lybiens fut telle qu'elle dut comprendre non seulement toutes les tribus africaines, y compris les Atlantes, possesseurs d'une marine importante, mais encore les peuples alliés — et probablement de même race — qui habitaient les bords de la Méditerranée, de l'Ibérie à la Tyrrhénie et même jusqu'au nord de la Grèce (**15**).

A mon avis, il n'est pas douteux que l'histoire de l'Égypte fixe définitivement l'époque de la grande agression lybienne, avec la collaboration de la marine des Atlantes, agression d'abord victorieuse, puis finalement écrasée avec violence par Ramsès III, avec le concours des flottes grecque et phénicienne.

Ce ne peut être qu'à ce grand événement que le prêtre de Saïs a pu faire allusion lors de sa conversation avec Solon, rapportée deux cents ans plus tard par Critias à Platon.

Il suit de là qu'il convient de placer vers l'an 1200 avant notre ère, le dernier acte de la décadence des Atlantes, suivi de près par le grand mouvement sismique qui a provoqué la réunion de l'île des Atlantes au continent africain, ainsi que les grandes inondations signalées en Grèce.

Il est à remarquer qu'en adoptant l'an 1200, déduite de la chronologie égyptienne de M. Édouard Meyer, la concordance de la catastrophe avec le déluge de Deucalion paraît peu vraisemblable; mais il faut se rappeler que nous ne sommes pas ici en présence de dates absolument précises et que la chronologie des divers auteurs laisse un flottement d'environ 200 ans, ce qui, d'ailleurs, n'a rien d'excessif pour des temps aussi reculés. De même, la période de 8 à 900 ans comprise entre la fin de la puissance atlante et l'époque à laquelle vivait Solon, se réduirait à 600 ans; mais, ainsi qu'on le constate, les différences sont de l'ordre des erreurs que l'histoire de l'antiquité peut commettre en se basant sur des dates plus ou moins incertaines.

De toute façon, en 1200, on en était en pleine et belle civilisation du Bronze, et Athènes, fondée 350 ans auparavant, pouvait posséder une marine redoutable.

Voilà donc, grâce aux déductions tirées de la chronologie égyptienne, quelques points définis de manière entièrement satisfaisante, tous en faveur de la thèse de M. Berlioux, et, pour terminer, nous pourrions nous en tenir à ces acquisitions importantes pour la démonstration que nous avons à fournir; mais le décousu forcé de l'argumentation ne nous a pas permis de nous former une idée d'ensemble de l'enchaînement et de la succession des faits; c'est pour remédier à ce manque de suite que nous croyons devoir donner ci-après un aperçu sommaire de l'histoire des Atlantes.

Disons tout d'abord que les éléments de préhistoire actuellement connus nous permettent d'éluder la phase mythologique des dieux se partageant le monde, chère aux auteurs anciens, ainsi que de Poseïdôn et de son intéressante famille. L'histoire primitive de l'Orient nous a appris que les dieux de l'antiquité sont des chefs de tribus que leurs peuples ont divinisés en raison de leur valeur, de leur sagesse ou de leurs bienfaits.

Entamant la narration à un moment où les notions scientifiques commencent à se préciser, nous pouvons avancer que, vers la fin des temps quaternaires, il y a une dizaine de mille ans, diverses races humaines peuplaient les bords du bassin méditerranéen. En Europe, domine la race de Cro-Magnon, de grande taille, au teint clair ; en Afrique septentrionale — et peut-être au travers de l'Asie jusqu'au Japon — les descendants plus ou moins modifiés de la race de Galley-Hill, de taille moyenne, au teint basané, sont largement disséminés.

L'Espagne, à l'aurore du Néolithique, était presque déserte; il y vivait une population très clairsemée du petit type azilien qui continua, pendant longtemps encore, à se servir de ses pauvres instruments de silex.

Beaucoup plus tard, à une époque voisine de 3500 ans avant notre ère, des tribus de Cro-Magnon, venant de l'Est, en possession de l'industrie de la pierre polie qui caractérise la fin du Néolithique, analogue à celle des habitants des villages sur pilotis des lacs suisses, se répandirent en Ibérie et s'y installèrent en groupes restreints, pendant que le plus grand nombre, traversant le détroit de Gibraltar, probablement moins large qu'aujourd'hui, envahirent assez rapidement le Nord de l'Afrique, se mêlant à la faible population autochtone et finissant par la dominer et se l'assimiler.

Ces émigrants inhumaient leurs morts dans des coffres de pierre formés de grandes dalles brutes qui sont l'origine des monuments rudimentaires dits mégalithiques et des constructions en pierre, en général (**16**).

Sous le beau climat africain, les Cro-Magnon prospérèrent rapidement; de l'Ouest il s'avancèrent vers l'Est et ils arrivèrent ainsi jusqu'aux frontières de l'Égypte, qu'ils franchirent en attaquant les paisibles agriculteurs disséminés dans la région.

A cette époque, nous trouvons en Basse-Égypte les premières dynasties thinites, 3000 ans avant notre ère, et précisément c'est à ce moment que nous voyons relatés, par la chronologie égyptienne, les premiers conflits avec les peuples blancs d'origine européenne, occupant une vaste contrée à l'ouest de l'Égypte et à laquelle les habitants de ce pays ont donné un nom qui a été traduit par Lybie.

Les inscriptions nous apprennent que les Lybiens, dits Zehenous, furent repoussés. A la suite de cet insuccès, les incursions cessèrent pendant plus de trois cents ans.

Durant la poussée vers l'Orient, d'autres tribus de Cro-Magnon s'étaient groupées dans l'Ouest, c'est-à-dire dans la région du mont Atlas, où charmées par le climat, la fertilité du sol, la sécurité que leur donnait une situation à peu près insulaire, grâce à la mer et aux lacs qu'elles baptisèrent du nom de Tritonis, elles s'installèrent à demeure.

Le chef intelligent qui sut apprécier d'un coup d'œil tous les avantages de la contrée et qui suggéra de s'y établir, c'est évidemment celui que les Grecs ont appelé Poseïdôn et que nous nommons Neptune.

La position insulaire du royaume et l'initiative de son roi incitèrent naturellement les habitants à pratiquer activement la navigation; le commerce s'ensuivit et la région, à la mort de Poseïdôn, ayant été répartie entre ses fils, ce fut l'aîné, Atlas, qui reçut les environs de la grande montagne à laquelle il donna son nom, en même temps que son peuple prenait celui d'Atlantes.

La situation privilégiée du pays, sa stabilité, le développement de la marine donnèrent bientôt aux Atlantes une certaine originalité parmi les Lybiens, qui les fit remarquer des autres peuples navigateurs méditerranéens, avec lesquels des relations commerciales et amicales s'établirent.

Dédaignant alors la route terrestre de Memphis, ils s'enhardirent et poussèrent leurs navires jusque dans la mer Égée, la Phénicie et l'Égypte, tandis qu'eux-mêmes recevaient, dans le port de Cernè, les navires des nations avec lesquelles ils avaient noué des relations amicales.

On conçoit que, dans de telles conditions favorables, les Atlantes développèrent rapidement une civilisation remarquable; leur mentalité de race blanche leur permettant de s'assimiler les progrès qu'ils constataient en Orient. En Crète, en Phénicie, dans la Basse Égypte, en Amérique, ils purent observer comment on élevait des édifices de pierre, des temples, des palais, des enceintes fortifiées, des ports bien aménagés, voire même comment on colonisait.

Probablement dès l'apparition du bronze en Orient, ils adoptèrent l'usage de ce métal; bientôt il exploitèrent le cuivre en Ibérie, puis ils envoyèrent des expéditions aux îles Cassitérides pour la recherche de l'étain.

C'est ainsi que, mis à l'abri contre les agressions de leurs voisins du Sud, les Gétules (**17**), de race inférieure, nous voyons les Atlantes, entre 2000 et 1500 ans avant notre ère, en plein épanouissement, possédant de riches métropoles avec palais et temples ornés d'or, d'argent et d'ivoire à l'intérieur et plaqués de bronze au dehors.

C'est pendant cette brillante période que les navigateurs atlantes s'aventurèrent hardiment dans l'Océan, abordant d'abord aux îles Canaries, sans doute inhabitées et où ils s'établirent, ainsi que le prouve la présence de leurs descendants, les Guanches (**18**); puis, poussant plus loin, ils atteignirent l'Amérique par la côte du Yucatan.

Cette affirmation peut paraître étonnante pour certains, mais

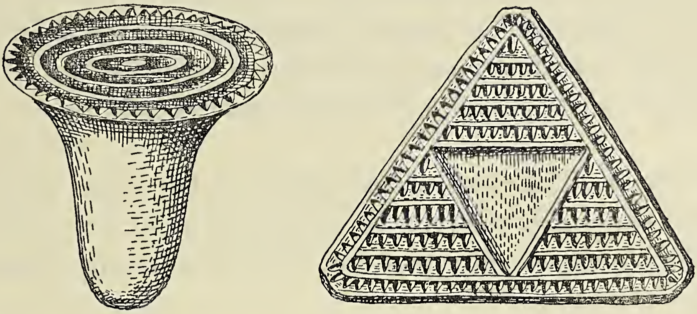


Fig. 4. — Deux Pintaderas recueillis dans la Grande Canarie.
($^3/_4$ grandeur naturelle.)

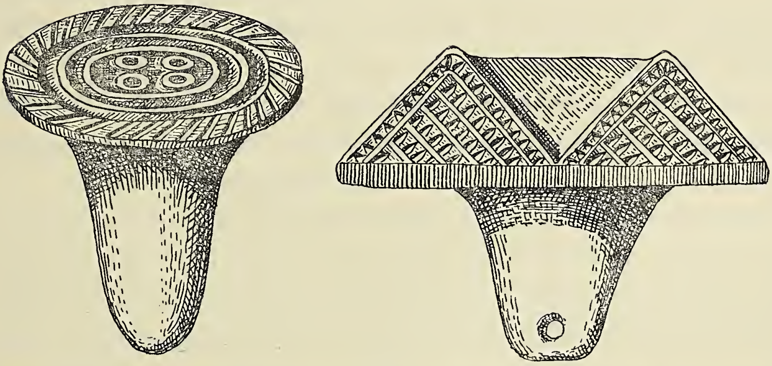


Fig. 5. — Deux Pintaderas recueillis au Mexique dans la vallée de Mexico.
($^3/_4$ grandeur naturelle.)

elle est confirmée par la découverte, aux Canaries, comme au Mexique, de haches polies en pierre de même modèle et surtout de sortes de cachets tronc-coniques en argile cuite, dits *Pintaderas*, et portant des dessins caractéristiques en relief. On suppose que ces instruments servaient à imprimer les dessins en couleur sur la peau, en guise de tatouages (**19**).

Mais les meilleures choses ont leur fin : l'opulence engendra le luxe, le désir de conquête et d'oppression, et peu à peu les Atlantes s'immiscèrent dans les conflits entre les Lybiens et les peuples orientaux.

C'est aux débuts de la décadence que, vers l'an 1400, se place l'arrivée, au cours de ses expéditions, d'Héraklès, l'Hercule grec, dans le pays de l'Atlas.

Après avoir, disent les anciens, fracturé les montagnes qui séparaient l'Océan de la Méditerranée et créé ainsi le détroit dit les Colonnes d'Hercule, le héros fut reçu avec faveur à Cernè ; il s'y instruisit aux écoles, puis, en témoignage de gratitude, il combattit en faveur du pays, en l'aidant à s'adjoindre des régions du Sud de l'Europe.

Peu de temps après apparut tout à coup, venant de l'Hespérie, c'est-à-dire du sud de l'Atlantide, une armée d'amazones, de race lybienne, qui avait levé l'étendard de la révolte.

Ces amazones, conduites par leur reine Myrina, attaquèrent les Atlantes, prirent la capitale Cernè et la détruisirent. Le reste du pays capitula, puis un accord étant intervenu, les amazones défendirent les Atlantes contre les attaques d'une autre armée d'amazones dites Gorgones, conduite par leur reine Méduse.

Après des péripéties diverses, ces dernières furent vaincues, et Myrina, rassemblant les cadavres de ses compagnes, les inhuma sous des tertres ou tumulus qui ont gardé le nom de Tombeaux des Amazones.

Mais ces guerres avaient fortement ébranlé la puissance des Atlantes, et Héraklès étant mort en Espagne, ses troupes, composées surtout d'Arméniens, de Mèdes et de Perses, se débandèrent.

Des groupes de guerriers pénétrèrent dans l'Atlas, puis longeant le littoral, arrivèrent jusqu'au territoire habité par les Gétules, où, par union, ils donnèrent naissance aux Numides.

D'autres s'allièrent aux Atlantes et leur donnèrent un regain de puissance.

Bientôt une vaste conspiration s'organisa ; les Atlantes renforcés s'unirent à leurs congénères de Lybie et d'Europe et, ensemble, conçurent le projet d'étendre leur domination sur les peuples d'Orient.

Une première tentative réussit en Égypte, mais plus tard la coalition des Égyptiens, des Phéniciens et des Grecs leur fut fatale : défaits sur terre et sur mer, sous Ramsès III, ils furent refoulés un peu après l'an 1200.

La décadence définitive commença alors pour les Atlantes, car vaincus et affaiblis, ils furent attaqués par les Numides et dispersés en groupes épars.

Pour comble de malheur, un terrible mouvement sismique dévasta la région sud de l'Atlas, déversant dans l'Océan le lac Tritonis occidental et le transformant en une mer de boue, morcelant le Tritonis oriental, détruisant la magnifique végétation qui garnissait les versants des montagnes, tandis que les deux grands fleuves Tritonis virent leur cours se réduire aux oueds actuels.

Mais la chute n'était pas encore assez profonde; il fallut, en effet, que les Phéniciens de Tyr, suivant Didon dans son exil, vinssent fonder Carthage vers 825 avant notre ère.

L'installation des Phéniciens rapaces sur la côte d'Afrique et en Ibérie donna le coup de grâce à l'Atlantide ; les malheureux habitants furent confinés dans des refuges, la contrée fut strictement interdite aux étrangers et, isolée du reste du monde, elle sombra pour toujours dans la barbarie et dans l'oubli.

A l'époque de Solon, l'Atlantide n'était plus qu'un pays de légende.

Nous voici arrivé au terme de notre étude, et il ne nous reste plus qu'à conclure.

Notre conclusion est que les récits de Platon ont été confirmés sur presque tous les points, sauf sur deux ou trois principaux, il est vrai.

D'abord l'Atlantide, tout en constituant primitivement une île, n'était pas située dans l'océan Atlantique, comme on l'admet généralement ; du reste, il est à remarquer que Platon se borne à dire qu'elle se trouvait « au-devant » des Colonnes d'Hercule, ce qui peut s'interpréter de diverses façons, y compris celle de M. le Prof^r Berlioux et la nôtre.

Ensuite, transmis de bouche en bouche à travers quatre générations, les chiffres véritables, donnés par le prêtre de Saïs, se sont inévitablement transformés, passant, de 8 à 900 ans, à 8 à 9000 ans. Pour l'Orient — et même pour le Midi — la supposition n'a rien d'improbable.

Enfin, l'Atlantide n'a pas été engloutie sous les flots, mais elle s'est, au contraire, soudée au continent africain, en disparaissant comme île, et non sans avoir été terriblement dévastée.

De plus, l'isolement complet auquel elle a été soumise sous le régime barbare des Carthaginois, puis sous les régimes romain et musulman qui suivirent, ont fortement contribué à l'effacer à jamais de la mémoire des hommes.

En somme, ce qui sort le plus meurtri de cette étude, ce sont les folles spéculations de certains littérateurs et des occultistes, qui ont fondé sur l'Atlantide des légendes extraordinaires, avec d'autant moins de scrupules que, persuadés de l'engloutissement du malheureux pays sous les flots, ils avaient la certitude qu'il était préférable de croire que d'y aller voir.

Pour terminer, s'il faut tirer une morale de l'histoire des Atlantes, il convient de faire surtout remarquer que la caractéristique de la période humaine que nous traversons depuis l'origine, c'est le perpétuel recommencement de l'Histoire, par méconnaissance de ses plus clairs enseignements.

Il ne nous faudrait pas, en effet, remonter bien haut dans nos souvenirs, pour nous remémorer les diverses phases de l'évolution d'un grand empire ambitieux et agresseur, s'écroulant grâce aux « grandes et admirables choses », comme dit Platon, réalisées par un petit peuple pour sauver la civilisation occidentale, ainsi que l'avait fait l'Athènes antique, lorsque les Atlantes mirent en danger la civilisation orientale, 1200 ans avant l'ère chrétienne.

NOTES COMPLÉMENTAIRES.

1. — Il est surtout question, dans ce paragraphe, de l'interprétation des douze stances tirées du *Livre de Dzyan,* l'un des nombreux poèmes védiques antérieurs au Bouddhisme, composés entre 2000 et 600 ans avant notre ère.

La traduction en français est relativement récente et l'interprétation que nous critiquons date d'une quarantaine d'années.

Le style de l'original est terriblement « oriental », et la traduction en langue vulgaire a dû offrir de très grandes difficultés, au point que l'on se demande, d'une part, si on peut la considérer comme exacte et, d'autre part, si la traduction, même correcte, représente vraiment la conception de l'auteur ou si elle possède un sens caché dont la clef serait perdue.

De ces stances au style funambulesque, les occultistes ont tiré toute une série de données à prétention scientifique ayant valeur de vérité révélée, relatives à la création du monde et de l'Humanité.

Parmi ce qui a rapport à l'origine de cette dernière, nous trouvons des propositions telles que les suivantes :

a) Il y a eu évolution simultanée de sept groupes humains en sept différentes régions du globe ;

b) Le corps astral est né avant le corps physique ;

c) L'Homme a précédé tous les mammifères, y compris les Anthropoïdes, dans le règne animal ;

d) L'Homme physique fut, à l'origine, un colossal géant prétertiaire, et il existe depuis dix-huit millions d'années ;

e) L'Humanité s'est développée, selon des stades bizarres, sur une série de continents successifs qui sont : la Terre sacrée impérissable (partie centrale de l'Asie, avec centre au mont Méru, qui, le premier, sortit des ondes bouillonnantes), le continent Hyperboréen, la Lémurie, l'*Atlantide*, enfin l'Europe et l'Amérique.

Il y a quarante ans, plusieurs de ces propositions paraissaient déjà fort invraisemblables ; de nos jours, elles ne peuvent plus être prises en considération, attendu qu'elles sont devenues insoutenables.

2. — Ce que nous disons s'applique naturellement aux auteurs belges, et je dois à la vérité de déclarer que la *Grande Encyclopédie* française, au mot *Atlantide*, expose la manière de voir de M. le Prof^r^ Berlioux avec quelque détail et lui accorde même une certaine importance.

3. — M. le Prof^r^ Berlioux fait remarquer, qu'à son avis, la traduction française du mot grec employé par Platon devrait être *Atlantis* et non Atlantide.

4. — Les temples égyptiens étaient rigoureusement fermés aux profanes et surtout aux étrangers, et Solon n'a pu être reçu par les prêtres de la déesse Neïth que parce que les habitants de Saïs, en Basse Égypte, se considéraient comme apparentés aux Athéniens, attendu que la déesse Neïth était la même que la Pallas-Athènè des Grecs ou la Minerve des Romains, qui elle-même est d'origine lybienne. Certaines statues archaïques de Pallas-Athènè représentent la déesse posant le pied sur la tête d'un crocodile, ce qui montre bien l'origine africaine.

C'est pendant qu'ils se trouvaient en bons rapports avec les souverains de la dix-huitième dynastie égyptienne, au temps de la reine Tii, que les Lybiens avaient apporté dans le delta du Nil, en Basse-Égypte, le culte de leur divinité Aten, qui y devint le dieu inconnu sans rival, et c'est probablement alors qu'ils avaient raconté aux Égyptiens l'histoire d'Atlas et des Atlantes.

La conception primitive de Pallas-Athènè des Grecs date de l'époque où les femmes lybiennes prenaient encore une part très active aux guerres avec les peuples voisins, et il semble admis que c'est Cécrops, l'Égyptien fondateur d'Athènes qui, venu de sa ville natale Saïs, apporta le culte de Neïth, devenue chez les Grecs Athènè, déesse dont le costume a été reconnu être, par certains détails, celui des femmes guerrières lybiennes, conduisant les chars de combat.

5. — Il est important de faire remarquer qu'il ne faut pas confondre la mer Atlantique et l'océan Atlantique.

Pour les anciens, la mer Atlantique était celle qui baignait les côtes de la région de l'Atlas, entre la sortie du canal du lac Tritonis occidental et les Colonnes d'Hercule, tandis que l'océan était dénommé « océan Universel ». Le nom d'océan Atlantique est d'origine assez récente.

D'autre part, pour ce qui concerne la situation de l'Atlantide, les traducteurs emploient indifféremment les mots « devant » ou « en face » des Colonnes d'Hercule, ce qui prête à interprétation.

6. — Cette dernière partie de la phrase est obscure et doit être nettement détachée de ce qui concerne l'Atlantide.

Il faut, sans doute, comprendre qu'au moment où la prétendue submersion de l'île des Atlantes s'effectuait, le mouvement sismique avec raz de marée s'étendit à travers la Méditerranée jusqu'en Grèce, où des armées de guerriers grecs furent également détruites sur les rivages.

Il y a lieu de regretter la perte de la seconde moitié du texte du « Critias », qui était sans doute plus explicite à cet égard.

Du reste, l'histoire ancienne de la Grèce relate l'existence de plusieurs tremblements de terre désastreux accompagnés de grandes inondations ou raz de marée. En outre des déluges d'Ogygès et de Dardanos, de date indéterminée, l'un des événements dont l'histoire a conservé le souvenir est celui dit : déluge de Deucalion, que l'on place, en Thessalie, vers 1550 avant notre ère, date qui concorde avec la fondation d'Athènes par Cécrops, ce qui laisse un certain doute pour la première, sans doute antérieure.

Plus tard, en 465, au temps de Périclès, il y eut aussi, en Laconie, un formidable tremblement de terre qui fit s'écrouler des montagnes et notamment le Taygète, qui s'abattit sur Sparte en ensevelissant 20,000 habitants. Si, sur une carte, on prolonge vers l'Est la direction de la chaîne de l'Atlas, la ligne traverse la Grèce, preuve de l'existence d'une longue zone de faible résistance de l'écorce terrestre dans la région méditerranéenne, qui, du reste, est encore en activité de nos jours.

7. — La région des *Chotts*, qui s'étend largement au Sud de la Tunisie et de l'Algérie, a été spécialement étudiée, il y a une vingtaine d'années, à la suite d'un projet ayant pour but de faire rentrer la mer dans son ancien domaine.

Bien que, d'après les nivellements, il y ait eu soulèvement du sol d'une cinquantaine de mètres, certaines parties des Chotts sont encore actuellement sous le niveau de la Méditerranée. Ils se présentent comme des fonds de lacs très étendus, plus ou moins desséchés selon la saison et le plus souvent recouverts d'une croûte saline résistante; la région elle-même est aride et déserte.

Hérodote rapporte qu'aux temps anciens, le lac Tritonis oriental, qui correspond aux Chotts actuels du Sud de la Tunisie, débouchait largement au fond du golfe de la Petite Syrte, et c'est à l'entrée du lac que le navire qui portait Jason, lors de l'expédition des Argonautes à la conquête de la Toison d'Or, fut jeté un jour par la tempête. Il est même signalé qu'il existait, dans le lac, une île nommée Phla et que ses rives étaient fertiles.

Trois cents ans après Hérodote, au temps des Ptolémées d'Égypte, des voyageurs trouvèrent le Tritonis oriental séparé de la Méditerranée, mais communiquant encore avec la Petite Syrte par un canal naturel ou émissaire d'une longueur équivalant à 37 kilomètres. De nos jours, cette communication n'existe plus.

Le grand fleuve Tritonis, ayant sa source dans la région montagneuse du Nord et qui, dirigé de l'Ouest vers l'Est, se jetait dans le lac Tritonis oriental, était constitué par plusieurs branches dont la principale actuelle est représentée par l'oued El-Djedi, en grande partie desséché, long de 400 kilomètres.

La carte du bassin méditerranéen et des colonies phéniciennes insérée page 496 du magnifique ouvrage de F. Lenormant, intitulé : *Histoire ancienne de l'Orient jusqu'aux guerres médiques,* montre toute la série des peuples lybiens, énumérée par Hérodote, le long de la route suivie de l'Égypte à l'Atlantique. On y voit représentés le lac Tritonis oriental en relation avec la Petite Syrte, ainsi que le pays des Atlantes, au sud des Colonnes d'Hercule. Il est étonnant de n'y pas voir figurer le tracé du grand fleuve Tritonis, signalé par l'auteur dans son texte, d'après Hérodote et Ptolémée.

Les suites du soulèvement qui s'est produit entre l'an 1200 et l'an 825 avant notre ère ont été désastreuses pour le pays, car la climatologie en a été complètement transformée.

Non seulement les écroulements de rochers détruisirent la végétation qui retenait l'humidité, mais le soulèvement du sol, en vidant les lacs et en les séparant de la mer, empêcha la condensation des nuages, et la contrée, en se desséchant progressivement, devint aride.

Or, non seulement les auteurs anciens nous affirment que les rives des lacs et les environs étaient fertiles, mais les explorateurs récents ont rencontré, en plein désert actuel, quantité de stations préhistoriques de la fin de l'âge de la Pierre polie, réparties dans des régions aujourd'hui inhabitées et désertiques, où la vie est impossible.

Ces faits prouvent donc que, environ 3000 ans avant notre ère, le grand désert actuel, situé au Sud de la Tunisie, de l'Algérie et du Maroc était habitable et habité par des populations qui, en raison de leur belle industrie de pierre, paraissent avoir eu des relations avec l'Égypte primitive, preuve de l'importance considérable qu'avait la présence des lacs Tritonis comme facteurs d'un climat tempéré et humide, favorable à la végétation et à la vie animale.

Pour montrer jusqu'à quel point les populations atlantes étaient en relation avec la Grèce aux époques anciennes, il n'est pas inutile de rappeler qu'il existait aussi des fleuves Tritonis en Grèce et un petit fleuve Tritonis en Crète, au pied du mont Ida. Il ne faut pas confondre ce mont Ida de Crète avec celui de Phrygie, où se place la légende de Pâris et des trois déesses.

8. — Le long de son itinéraire, Hérodote parle déjà, avant de parvenir au pied de l'Atlas, de tertres de sel entourés d'eau, autour desquels vivent des populations. Un coup d'œil sur la carte montre qu'au nord de la ligne des grands Chotts qui aboutit au golfe de Gabès, il en est une autre, également fort importante, qui débute au sud de Constantine et se poursuit sur plus de 800 kilomètres jusqu'à la frontière du Maroc, c'est-à-dire non loin des contreforts de l'Atlas. C'est le long et au nord de cette ligne de Chotts, qui s'étend entre les deux chaînes montagneuses parallèles à la rive méditerranéenne, qu'avait dû être tracée la route des caravanes, formée par la rencontre de la route partant de la Petite Syrte et celle partant de Memphis et qui conduisait au pays des Atlantes.

Dans l'antiquité, les Lybiens avaient déjà, sans doute, recueilli le sel qui recouvre l'eau des Chotts, soumise à l'évaporation solaire, et en avaient formé des amas ou monticules, afin d'en faire le commerce avec les habitants des régions élevées.

9. — Les croquis des voyageurs qui ont exploré la région du haut Atlas, représentent le pic principal (pic d'Ifguig), qui s'élève brusquement à environ 3,800 mètres d'altitude, comme régulièrement conique, ainsi que le décrit Hérodote.

10. — On peut émettre rationnellement l'hypothèse que l'embouchure du Sous actuel se trouve approximativement à l'emplacement du canal d'environ 9 kilomètres qui reliait le lac Tritonis occidental à l'Océan en traversant un seuil crayeux.

Le point où s'élevait l'antique Cernè, capitale de l'Atlantide, se trouve ainsi être à peu près indiqué.

Ce lieu doit exister non loin à l'est d'Agadir et du cap Guir, c'est-à-dire entre la première localité et Taroudant, qui est située plus à l'Est, à une centaine de kilomètres de la côte.

Des fouilles pratiquées un peu au-dessus de la plaine d'alluvions où circule le Sous feraient peut-être découvrir les substructions des édifices de l'antique capitale.

Le Sous actuel, qui coule de l'Est à l'Ouest, a plus de 200 kilomètres de long, ce qui correspond à la longueur de l'ancien lac. Le Draa (ancien Lixus), parallèle au Sous, fournit un parcours de 6 à 700 kilomètres et, entre 4 et 500 kilomètres de son embouchure, il traverse un ancien lac au sud de Tamgrout.

11. — M. de Lapparent, en examinant la disposition des extensions glaciaires quaternaires, tant en Europe qu'en Amérique du Nord, a été frappé de leur répartition en bordure de l'océan Atlantique, et il met cette disposition en rapport avec les progrès de l'affaissement de la partie de l'ancien continent austral, qui permettent chaque fois un plus facile déversement de l'océan Arctique dans l'Atlantique en formation.

Il a été démontré récemment, à la suite des expéditions polaires, que le pôle Nord se trouve en plein océan primordial, profond de 3,000 mètres, qui existe depuis la fin de la condensation des eaux à la surface de l'écorce terrestre.

Au contraire, le pôle Sud est en plein continent primordial de 3,000 mètres de hauteur, confirmant ainsi la forme du sphéroïde terrestre comparable à une toupie. Cette forme dérive de ce que la Terre suit le mouvement général du système solaire vers un point de la constellation d'Hercule, et c'est dans le sens de son hémisphère Nord que se fait la progression de la planète dans l'espace.

Pour ce qui concerne la partie Sud de l'Atlantique, sa formation est aussi de date relativement récente ; elle est due à la séparation du Brésil d'avec l'Afrique, accompagnée également de phénomènes glaciaires dans les montagnes de l'Amérique du Sud.

12. — En fixant l'Atlantide au Nord-Ouest de l'Afrique, M. Berlioux rend claires une foule de légendes contradictoires émises par les auteurs de l'antiquité et que l'on ne pouvait jamais avoir l'espoir de raccorder.

En somme, nous voyons qu'à l'origine, selon les traditions, lorsque les futurs Atlantes venant d'Europe arrivèrent dans la région de l'Atlas, ils y trouvèrent une population autochtone très clairsemée, dans laquelle je vois des descendants de la race de Galley-Hill et de Combe-Capelle. Leurs chefs, deux « enfants de la terre », c'est-à-dire des autochtones, étaient Euènor et sa femme Leucippe, dont la fille s'appelait Clito.

C'est cette Clito que le chef des futurs Atlantes, Poseïdôn, épousa et dont il eut dix fils.

De ces dix fils, quatre nous sont connus : l'aîné, Atlas, qui succéda à Poseïdôn en Atlantide, puis Hespéros, qui gouverna l'île Hespéride, territoire triangulaire et fertile situé au Sud du lac Tritonis occidental et se trouvant ainsi limité au Nord par le lac, au Sud par le large fleuve Draa (ancien Lixus) et à l'Ouest par l'océan Atlantique. Vient ensuite Eumèlos, qui s'installa des deux côtés des Colonnes d'Hercule et notamment en Ibérie, et enfin Prométhée, qui s'exila dans le Caucase, où il devint métallurgiste et d'où il envoya à son frère Atlas d'habiles métallurgistes dits Dactyles ou Telchines, provenant de Phrygie (Asie Mineure) et de Crète, qui apportèrent en Atlantide l'art de travailler le bronze.

La légende raconte que lorsque Héraklès, l'Hercule grec, qu'il ne faut pas confondre avec Melquarth, l'Hercule phénicien, passa par le Caucase, il y rencontra Prométhée qui lui conseilla de ne pas attaquer son frère Atlas, mais plutôt de s'unir à lui pour la conquête de l'Hespéride.

Hercule écouta ce conseil et, arrivé à Cernè, il y trouva des écoles fameuses où l'on enseignait, sous la direction d'Atlas lui-même, l'astronomie et la géographie, preuve de la volonté du grand roi de faire de ses sujets un peuple de navigateurs et de commerçants.

Toutes les divinités de l'époque étaient du reste des dieux marins ou fluviaux : tels Poseïdôn et Clito, c'est-à-dire Neptune et Amphitrite, entourés des Tritons, des Océanides, des Néréides, etc. Sur des pierres gravées, les Atlantes se représentaient eux-mêmes comme de grands hommes barbus, à chevelure épaisse, dont le corps se terminait en queue de poisson, et à cette époque le dauphin était en grand honneur. Le culte de Pallas Tritonide était célèbre dans l'antiquité classique.

13. — Grâce aux chronologies égyptienne et Égéenne, qui concordent parfaitement, et aux admirables résultats des fouilles opérées dans ces régions et dans la Troade, on a pu pour ainsi dire suivre pas à pas, sans lacune sensible, le courant civilisateur des premières époques de l'utilisation des métaux.

En Crète, aucun instrument d'âge paléolithique n'est connu et la présence de l'homme ne s'y révèle qu'à partir de la fin du Néolithique, c'est-à-dire de l'âge de la Pierre polie.

Alors, vers l'an 3000 avant notre ère, s'ouvre l'âge du Cuivre encore accompagné de pierre taillée ou Enéolithique, contemporain de la première dynastie égyptienne Thinite.

D'abord, les habitants vécurent dans des cabanes à sol d'argile mêlée de cendres et couvertes de branchages, ou dans des grottes, et, plus tard, dans des maisons rudimentaires en pierre.

L'industrie se compose de haches en pierre dure et de couteaux d'obsidienne, accompagnés de marteaux perforés en pierre, d'instruments divers en os, d'une céramique mal cuite, d'idoles grossières et de fusaïoles en terre cuite. L'agriculture et les animaux domestiques étaient connus.

Bientôt, vers l'an 2700, une importante poussée civilisatrice se produit; des poignards à lame triangulaire de bronze et parfois d'argent apparaissent avec des vases en pierres diverses (marbre, granite, etc.) et en terre cuite.

En même temps se montrent des sortes de cachets coniques ou cylindriques en marbre, ivoire ou terre cuite, avec dessins en creux au sujet desquels nous aurons à revenir plus loin.

Entre 2400 et 2200 la céramique prend son essor et s'orne de couleurs et de dessins géométriques, tandis que les cachets dont il a été question ci-dessus se fabriquent en pierre tendre et prennent une forme triangulaire.

Pendant cette période préparatoire connue sous le nom de Minoen ancien, pas de monument en Crète, mais sur l'emplacement futur de la ville de Troie, en Asie Mineure, on rencontre deux installations primitives avec traces de métal et d'enceinte fortifiée grossière.

Avec l'an 2200 nous entrons, en Crète, dans le premier âge du Bronze.

On ne connaît guère les débuts de cet âge que par des sépultures et des statuettes, mais on rencontre toutefois à Cnossos les restes fort dégradés d'un palais primitif.

Les Crétois étaient donc fort en retard sur les Égyptiens, car sous Zoser (fin des dynasties Thinites, 2900 ans avant notre ère) il existait déjà une pyramide en pierre à degrés, tandis que le groupe des grandes pyramides et du Sphynx date de l'Ancien Empire, 2600 ans environ avant l'ère chrétienne (IV^e dynastie).

D'autre part, la Troie préhistorique, d'où proviennent les trésors de Schliemann, bien antérieure à la Troie homérique, a existé pendant 500 ans, de 2500 à 2000. Les Crétois étaient donc aussi un peu en retard sur les Troyens.

C'est à partir de l'an 2000 que se développe la belle civilisation crétoise, avec l'édification, par Minos, du premier grand palais de Cnossos et du premier palais de Phaestos. A cette époque, nous sommes, en Égypte, au Moyen Empire (XI et XII^e dynasties); en Crète, la céramique se perfectionne et les poignards en bronze, de forme triangulaire surbaissée, persistent.

Ces premiers palais ne durèrent pas longtemps, une catastrophe inconnue les ruina une centaine d'années après leur construction, et de 1900 à 1700 un deuxième palais s'éleva sur les débris, tant à Cnossos qu'à Phaestos. Nous en sommes alors à la XIII^e dynastie égyptienne.

L'époque des seconds palais fut brillante; c'est à ce niveau que l'on a rencontré les célèbres statuettes en faïence féminines habillées de robes à volants et coiffées d'un haut bonnet. La céramique se transforme, la lame des poignards s'allonge, mais il n'y a pas encore d'épées. Une écriture linéaire apparaît à côté des hiéroglyphes. La Crète dominait alors la mer Égée et les Cyclades.

Mais vers 1700 les palais sont détruits et ils restent en cet état jusqu'en 1550, époque à laquelle ils sont remaniés et réparés. Ce laps de temps concorde avec la domination des Hyksos en Égypte.

Toutefois, en Crète, la civilisation industrielle se poursuit et l'on entre dans le deuxième âge du Bronze; l'épée courte et la lance à douille apparaissent avec des haches simples ou doubles, des couteaux, des aiguilles, des hameçons, etc. Comme céramique on trouve des cruches à col renversé, des amphores, des rhytons, avec décoration dont le motif est le poulpe.

Au palais de Cnossos remanié s'ajoute un quartier royal privé, avec salle du trône et jolies peintures à fresque sur les murs. Aux armes courtes s'adjoignent des épées longues, toujours en bronze, avec garde à cornes. La céramique a fait de grands progrès, elle comprend de beaux vases à décor floral de style égyptien.

Vers 1350, les Palais de Cnossos et de Phaestos sont incendiés et alors commence la décadence rapide de la Crète, qui perd l'hégémonie de la mer, tandis que la puissance principale passe en Grèce, à Mycènes.

Le dernier prince de Cnossos, Idoménée, habita un coin de l'ancien palais.

Quant à Troie, la ville dite préhistorique fut détruite vers l'an 2000 et, pendant 500 ans, elle fut remplacée par trois villages préhistoriques.

En 1500 s'éleva la Troie homérique, qui eut à subir le fameux siège de dix ans et succomba vers 1180. La ville subsista néanmoins jusque vers l'an 1000 avant notre ère.

Mycènes ne dura que trois cents ans, car bâtie en 1500 elle fut détruite en 1200 lors de la terrible invasion des Doriens. Un temple dorien fut construit sur les ruines du palais d'Agamemnon.

C'est après la chute de Troie que, vers 1090, apparut l'usage industriel du fer, déjà connu depuis longtemps des Égyptiens, probablement sous forme de fer natif météorique et considéré ainsi comme métal rare et précieux. Sur les ruines de la ville s'élèvent, de 1000 à 700, deux installations pré-helléniques, précédant l'Ilion des Grecs.

Après l'an 1000, l'emploi du fer se propagea en Europe, et l'on y distingue deux âges : le Hallstattien (de 900 à 500) et le Ténien (de 500 à 0).

Ce court aperçu de l'époque du Bronze dans l'Orient s'applique parfaitement à l'Atlantide, alors en grandes relations commerciales avec les peuples navigateurs orientaux, et la chronologie générale peut donc très bien servir de base à son histoire.

14. — Plusieurs des nombreux bas-reliefs du temple de Medinet-Abou, à Thèbes, commémorent la défaite, tant sur terre que sur mer, des Lybiens et de leurs alliés pélasgiques, les Pelestas.

Sur l'un de ces bas-reliefs, on voit Ramsès III, assis sur un char de guerre, contemplant les monceaux de mains coupées que des bourreaux apportent dans des paniers, tandis que des scribes prennent des annotations.

Ailleurs, de longues files de prisonniers, traités d'abominable façon, sont conduites par des soldats vers le souverain vainqueur; enfin un grand bas-relief reproduit le combat naval qui eut lieu entre les flottes égyptienne, athénienne et phénicienne et les alliés, Lybiens et Pelestas, et où ceux-ci furent surpris et battus. (Fig. 6 à 8.)

15. — J'ai pu constater l'accord de nombreux auteurs au sujet des affinités ethniques des Atlanto-Lybiens avec les Pélasges, habitants primitifs de la Grèce, qui se sont tôt révélés comme navigateurs intrépides et pirates dangereux, de race indo-européenne.

Quand on compare les diverses sources de renseignements relatives aux grandes guerres contre les Égyptiens sous Ramsès II, Mernephtah et Ramsès III, on reconnaît que les auteurs appuient sur la prépondérance de telle ou telle nation dans la confédération des agresseurs et l'on constate, en fin de compte, qu'il n'était pas seulement question des Lybiens et de leurs frères atlantes, mais aussi des peuples occupant les bords de la Méditerranée et notamment de ceux installés dans la presqu'île italique, de tous ceux correspondant au pays des

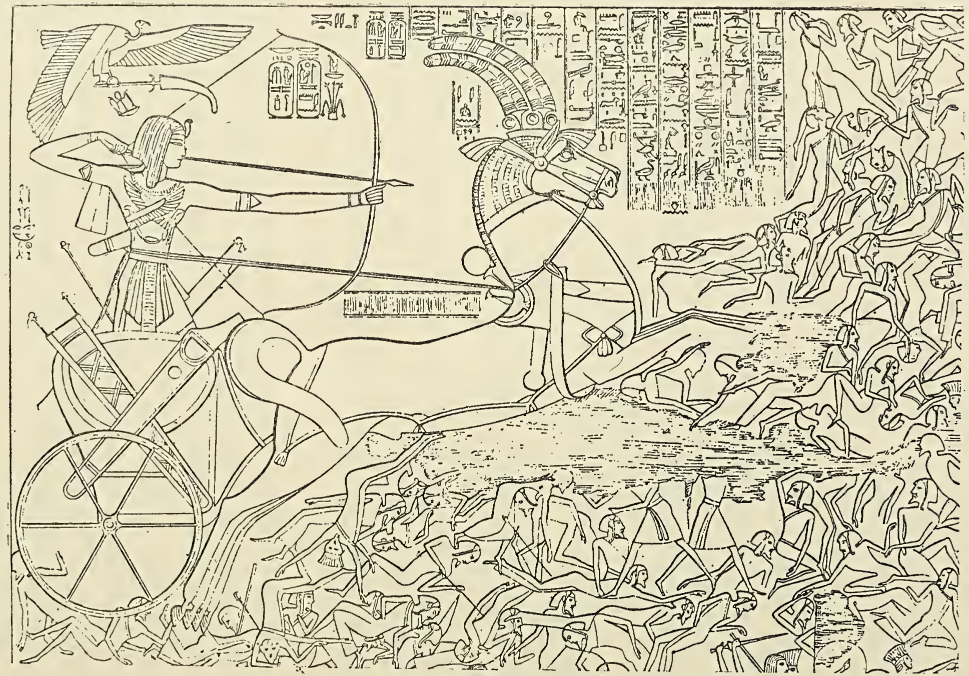


Fig. 6. — Défaite des Lybiens par Ramsès III.

Bas-relief du temple de Médinet-Abou à Thèbes. Remarquer sur la tête des Lybiens tués la mèche de cheveux caractéristique des habitants du lac Tritonis oriental.

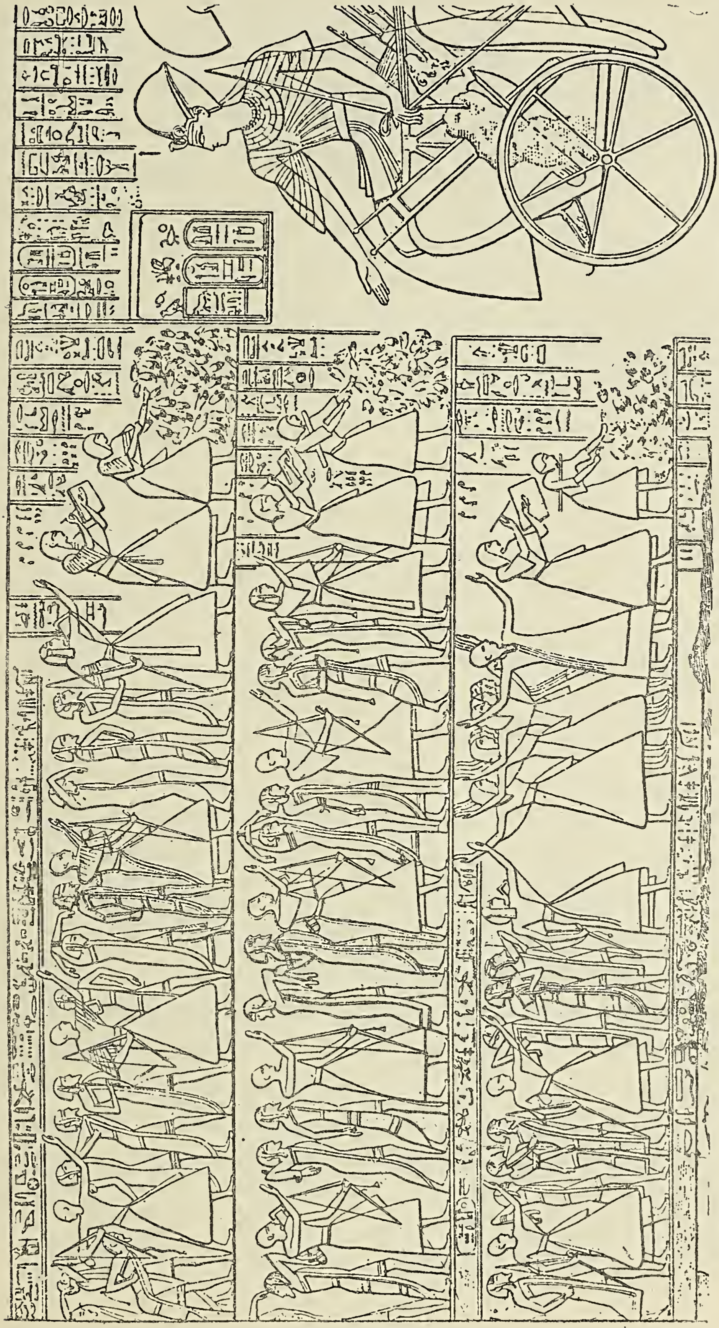


Fig. 7. — Ramsès III, après la défaite des Lybiens, contemple les monceaux de mains coupées aux ennemis.

Remarquer les scribes prenant des annotations et les files de prisonniers lybiens suppliciés. Bas-relief du temple de Médinet-Abou.

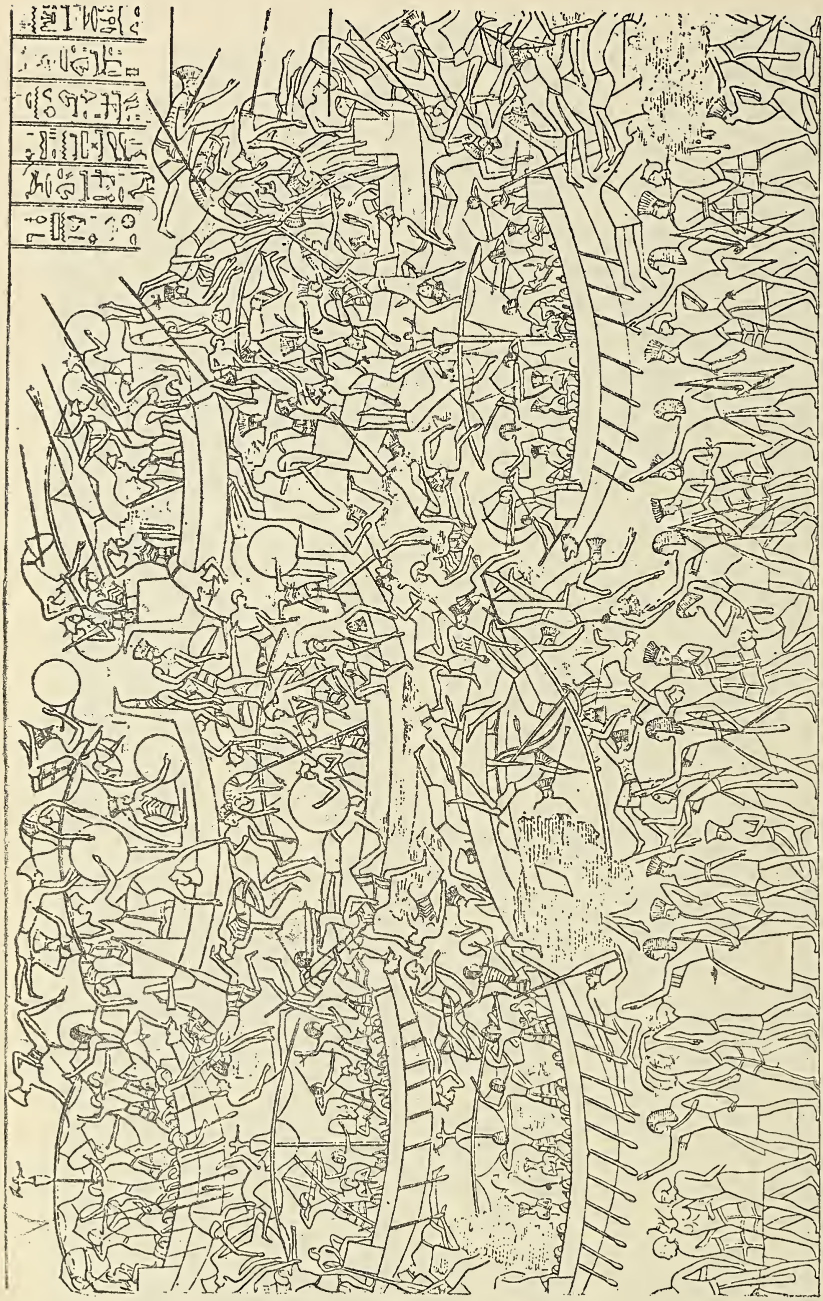


Fig. 8. — Combat naval a la pointe du delta du Nil, où les Pelestas (alliés de race pélasgique) furent défaits.
Les navires égyptiens portent à la proue une tête de lion. Bas-relief du temple de Médinet-Abou.

Pélasges, aux îles de la mer Égée, y compris la Crète et les petits royaumes de la côte de l'Asie Mineure, avec la Troade.

Ce sont principalement les peuples voisins de leur pays que les Égyptiens ont reconnus ou remarqués parmi leurs ennemis, car ils leur ont donné, en bloc, le nom de Pelestas. Les habitants du Péloponèse eux-mêmes faisaient partie des agresseurs.

On voit donc, au sujet du récit fait à Solon par le prêtre de Saïs, que celui-ci a eu raison de dire que, dans le conflit, les Athéniens de souche égyptienne se trouvèrent isolés parmi les Grecs et durent avoir le courage d'affronter le combat naval qui eut lieu, devant les bouches du Nil, entre la flotte des Pelestas et la flotte égyptienne, renforcée de celles des Athéniens et des Phéniciens, auxiliaires ou vasseaux de l'Égypte.

Si l'on pénètre plus loin dans le détail, on constate que la conjuration était réellement redoutable, vu qu'elle comportait non une agression, mais une véritable invasion avec migration et occupation du delta du Nil par des populations de l'Asie Mineure.

Les Égyptiens furent, en effet, attaqués de trois côtés à la fois : sur leur frontière Ouest par les Lybiens; à l'Est, par les émigrants Pelestas venus par la Syrie et la Palestine, et au Nord, sur mer, par toute la marine ennemie : Atlantes et Pelestas des îles.

Cette formidable invasion eut un premier succès suivi d'occupation de territoire, puis fut repoussée par Ramsès III, mais elle reprit une seconde fois plus terrible que jamais, et si elle échoua, ce fut probablement par manque d'entente entre les conjurés.

En effet, les attaques ne furent pas simultanées; celles sur terre précédèrent l'attaque par mer, et c'est ainsi que les agresseurs furent battus chacun séparément par les armées de Ramsès III et, on peut le dire, définitivement.

Le Pharaon vainqueur fit alors édifier le temple de Médinet-Abou, qui comprend les si intéressants bas-reliefs dont il a été question ci-dessus, pour commémorer ses victoires.

16. — Les quelques voyageurs qui ont pu parcourir la région de l'Atlas sont d'accord pour signaler l'existence de nombreux monuments mégalithiques analogues aux Menhirs, Dolmens et Cromlechs sur le versant Sud de la chaîne de montagnes. Sur le versant dirigé vers l'Océan, ce sont les tumuli qui prédominent.

Il a été remarqué également des inscriptions gravées sur le rocher, dont les analogues ont été rencontrées, paraît-il, aux Canaries; certaines d'entre elles sont attribuées aux Numides.

17. — D'après les auteurs anciens, et notamment Salluste, les Gétules, qui « vivaient sous un soleil plus chaud, non loin de la zone torride » ne seraient pas plus autochtones en Afrique occidentale que les Atlantes. On les connaît d'abord aux environs de la mer Rouge sous le nom d'Hevilas, puis ils traversent le continent et sont dénommés Gétules. Plus tard, alliés et croisés à des hordes débandées des troupes d'Hercule, ils ont donné naissance aux Numides, dont les descendants actuels voisinent avec les Berbères, qui se distinguent eux-mêmes des Arabes et des autres races sémitiques ou nègres, parvenues, à des époques différentes, dans le Maroc.

18. — Après la catastrophe qui a rattaché l'Atlantide au continent africain, en vidant le Tritonis occidental et en détruisant Cernè, le seul port océanique permettant la navigation vers les îles et l'Amérique, les Atlantes séjournant aux Canaries furent, pendant de nombreux siècles presque isolés du reste du monde.

Les seules visites qu'ils reçurent furent celles des navigateurs phéniciens, dont un certain nombre s'installèrent le long des rivages, commençant ainsi le métissage de la population Atlante, de type Cro-Magnon très pur, qui s'y trouvait, avec des types basanés orientaux.

Après la chute de Carthage, l'isolement fut à peu près absolu jusqu'au moyen âge. Vers l'an 1000, les Arabes firent des incursions dans les îles et compliquèrent la composition de la population sur les côtes, tandis que les Cro-Magnon se retiraient vers le centre, dans les montagnes, constituant des tribus qui ont reçu le nom de Guanches.

Ainsi placés en dehors du mouvement mondial et surtout complètement privés de métaux, car les îles ne contiennent aucun gisement métallique, les Guanches dégénérèrent rapidement au point de vue de la civilisation et de l'intellectualité et ils retournèrent forcément aux usages de l'âge de la Pierre.

Les meilleurs renseignements que l'on possède sur les anciens Guanches sont ceux rapportés par les aventuriers du moyen âge (XIII^{e} siècle et suivants) à la suite de leurs expéditions. La principale relation a été faite par Jean de Béthencourt, gentilhomme normand et conquérant des Canaries (1402-1422). Ces récits nous rapportent qu'à cette époque, malgré la population très mélangée du littoral, il existait encore de nombreux descendants des Atlantes qui sont unanimement décrits comme grands, forts, agiles, braves, de mœurs douces et hospitalières, mais de haute valeur guerrière lorsqu'ils étaient molestés.

Leur valeur morale était très supérieure à celle des aventuriers qui voulaient les dominer; aussi les traitèrent-ils rapidement en ennemis et, comme au temps des Atlantes, les femmes se montrèrent très guerrières et courageuses.

Comme armes, ils avaient des massues, des lances et des javelots à pointe de pierre, des boucliers, et ils faisaient grand usage de pierres de jet qu'ils lançaient avec une adresse incroyable. Ils se servaient aussi de sabres en bois très tranchants, mais ne connaissaient pas l'arc et la flèche.

Les écrivains s'accordent pour dire qu'ils constituaient une race très vigoureuse, à peau claire, aux yeux bleus, aux cheveux blonds, les femmes étant, en général, sensiblement plus petites que les hommes.

Ces anciens Canariens étaient redevenus essentiellement troglodytes, les cavernes étant particulièrement abondantes dans certaines régions, là où existent des alternances de coulées de lave et de couches de cendres volcaniques. En certains points, dans les ravins profonds sillonnant les îles, les cavernes paraissaient inaccessibles et leurs habitants étaient presque exclusivement des bergers ou gardeurs de chèvres; celles-ci constituaient toute la faune domestiquée et l'agriculture était à peu près négligée.

En temps de paix, les Guanches avaient gardé une grande douceur de mœurs; entre eux, ils jouaient de la flûte, aimaient passionnément la danse et les chants et portaient, comme leurs ancêtres, des parures en coquillages avec pendeloques en os; les femmes ornaient leur chevelure de peignes en bois. L'éducation des enfants était sévère et la polygamie était admise. Comme gouvernement, ils avaient des chefs de tribus et, parfois, des rois sans pouvoir absolu, aidés de prêtres ou de devins.

Leur nourriture, dans la montagne, se composait uniquement de viande cuite de chèvre et de lapin, accompagnée de boulettes faites de farine de céréales torréfiée et d'eau salée; ils fabriquaient des poteries grossières et possédaient des vases en bois.

Comme vêtement, les Guanches se couvraient de peaux de chèvre qu'ils taillaient avec un instrument de pierre, les fragments étant assemblés à l'aide d'aiguilles en os ou en arête de poisson. Dans les grottes, ils s'étendaient sur des amas de feuilles de fougères recouvertes de peaux.

Le long du littoral resté libre, ils se nourrissaient de poissons, de mollusques et de crustacés, dont les débris forment des amas analogues aux kjökkenmödinger de la Scandinavie. Leur seule boisson était l'eau. A leurs repas, ils ajoutaient aussi des fruits : figues, dattes, mûres et du miel.

Enfin, les Guanches croyaient à un être suprême et à un esprit du mal; ils possédaient des lieux d'assemblée et des temples de pierre analogues aux Cromlechs européens, dits *Tagoror*, généralement situés aux points les plus élevés. Ces temples rudimentaires étaient desservis par des prêtres et par des prêtresses ayant à leur tête un grand-prêtre jouissant d'un grand pouvoir, leur rôle principal consistant à obtenir la pluie, toujours rare et bienfaisante. Pendant les exhortations à la divinité, le peuple réuni poussait des cris effroyables;

pour maintenir leur prestige, les prêtres se livraient à des observations météorologiques, basant leurs pronostics sur la direction des nuages et de la fumée du pic de Ténériffe, sur l'abondance des fumerolles, etc.

Les offrandes consistaient en lait, fruits et, parfois, des animaux étaient sacrifiés.

Selon la région qu'ils habitaient, les Guanches enterraient leurs morts sous de petits tumuli de terre ou de cendres volcaniques, ou bien ils les plaçaient simplement dans des cavernes, où ils les abandonnaient à la destruction, sauf pour ce qui concerne les chefs, qu'ils embaumaient puis enveloppaient dans des peaux de chèvre.

A l'époque où les anciens Canariens ont pu être ainsi observés à l'état de nature, les îles étaient en grande partie couvertes de forêts; depuis l'invasion des aventuriers et des Espagnols, cette belle végétation a disparu par une exploitation brutale et la sécheresse y règne en maître.

Peu à peu les Guanches, traqués de toutes parts, ont été exterminés ou se sont fondus dans la masse de la population ; de nos jours, il n'en reste plus que quelques groupes dans l'île de Ténériffe.

Les rares explorateurs récents qui les ont observés racontent qu'ils continuent à habiter les grottes. Une coquille de patelle leur sert de cuiller et ils s'éclairent au moyen de graisse brûlée dans une coquille de même espèce ou dans une pierre légèrement creusée.

Nous avons cru utile de donner ici une description quelque peu détaillée des descendants directs des Atlantes, attendu qu'elle nous fournit une documentation précieuse sur les mœurs, la nourriture, les croyances des populations préhistoriques. Les Guanches nous donnent ainsi non seulement une idée fort nette de nos peuplades de l'âge de la Pierre depuis le Magdalénien, mais il nous permettent en même temps, par leurs temples mégalithiques et par leurs inhumations, de trouver des réminiscences plus ou moins vivaces des mœurs des populations de l'âge du Bronze et des Atlantes en particulier, montrant que la civilisation de ces tribus de race blanche ne différait, en rien d'essentiel, de celle des autres peuples contemporains.

Tout ce que la littérature non scientifique nous dit d'extraordinaire ou de merveilleux au sujet de la population de l'Atlantide et du pays qu'elle habitait se trouve donc, de fait, entièrement controuvé.

Pour terminer cette note, ajoutons que les explorateurs récents du Maroc signalent, dans ce pays, en outre d'assez nombreuses stations d'âge paléolithique inférieur, la présence de menhirs, dolmens, cromlechs et tumuli analogues à ceux de la fin du Néolithique, de l'époque du Bronze et du premier âge du Fer; de plus, ils ont pris connaissance de nombreuses grottes ayant servi de demeure à des populations disparues. Ces nouvelles observations viennent encore renforcer ce que nous avons dit au sujet des relations étroites existant entre l'Atlantide marocaine et les Canaries.

Pour le D^r Verneau, de Paris, anthropologue distingué et explorateur du Maroc et des îles Canaries, les populations africaines appelées *Berbers* et qui comptent encore actuellement cinq millions et demi d'individus, sont, dans l'Afrique du Nord, les plus proches parents des anciens Lybiens ou Atlantes de la race de Cro-Magnon.

D'après le D^r Verneau, à l'état de pureté, la race est belle et forte, de haute taille, au teint clair, parfois d'une blancheur parfaite et ils se distinguent nettement des Arabes, Sémites et autres. Le crâne est bien développé, dolichocéphale, avec chignon occipital. La face est basse et large, avec pommettes saillantes et menton puissant. Le nez est saillant et de profil régulier, un peu élargi. Ceux de race pure ont les yeux bleus et les cheveux blonds. On reconnaît donc là tous les caractères propres à la race de Cro-Magnon. Les Berbers ont l'aspect noble; ils sont hospitaliers et constants dans leurs affections, mais défiants; autant de traits rapportés par Platon en parlant des anciens Atlantes.

17. — Ces cachets en terre cuite dits *pintaderas*, qui ont été rencontrés, d'une part aux Canaries, d'autre part au Mexique, sur la côte de la presqu'île du Yucatan et même jusque dans la vallée de Mexico, indiquent bien, avec d'autres preuves, que les Atlantes, lors de l'apogée de leur puissance, ont poussé jusqu'en Amérique et ont eu des relations amicales avec les populations de civilisation avancée de ce pays.

On n'a pas encore signalé, à ma connaissance, de pintaderas au Maroc, mais ce pays a été si fermé aux étrangers, jusque dans ces dernières années, que des fouilles de tombeaux et de tumuli n'ont pas encore pu être effectuées avec sécurité.

Le moment est venu, du reste, de rappeler la présence de cachets semblables en Crète et en Égypte, ce qui fait supposer que l'application de dessins en couleurs sur la peau était très généralisée à la même époque. D'autre part, si l'on veut bien examiner la reproduction d'un Lybien par les artistes égyptiens, on remarque que le corps n'est pas parsemé de véritables tatouages, mais bien de dessins réguliers obtenus au moyen des pintaderas. (Fig. 2.)

Les artistes égyptiens, grâce à leur rigoureuse exactitude, nous ont donc encore permis de résoudre l'intéressant problème.

Il ne serait nullement impossible que le grand temple de la capitale des Atlantes, trouvé « d'apparence fastueuse mais barbare » par les Égyptiens et les Grecs, n'eût été inspiré des monuments mexicains, que les navigateurs avaient pu voir au moment de la splendeur des peuples civilisés de l'Amérique équatoriale. Les revêtements intérieur d'or et d'argent renforcent, à mes yeux, cette supposition.

En réalité, les connaissances actuelles nous permettent de dire que l'Amérique a été découverte au moins trois fois par les Européens : une première fois par les paléolithiques de la fin du Chelléen, qui ont pu passer du Groenland et de l'Islande au Canada par ce qui restait de la bande de terre qui réunissait le Nord de l'Europe à l'Amérique; une deuxième fois, entre l'an 2500 et l'an 1500 avant notre ère, par les Atlantes, et enfin, une troisième fois par Christophe Colomb en 1492.

Il résulte des recherches récentes qu'il n'y a pas eu de formation de race humaine autochtone en Amérique; ce continent semble avoir été d'abord peuplé par des tribus asiatiques, à une époque correspondant à notre Néolithique moyen, tribus qui se sont installées et développées en faisant des invasions successives et dont quelques-unes sont parvenues, au Pérou et au Mexique, à d'importantes civilisations.

18. — Dans ses si intéressants commentaires, M. le Prof^{r} Berlioux dit qu'après leur défaite par Myrina, les Gorgones poursuivirent leur route vers l'Orient et parvinrent ainsi vers les frontières de l'Égypte. Pour mettre un terme à leurs déprédations, Pégase, chef de la flotte lybienne, implora l'aide du héros Persée qui se trouvait en Phénicie.

Celui-ci, accompagné de Pégase, débarqua en Lybie, attaqua Méduse et, l'ayant tuée, il lui trancha la tête et l'emporta comme trophée à Athènes, où il alla la fixer au bouclier de Pallas-Athènè. Cet événement a dû se passer vers l'an 1250 avant notre ère.

⁂

Lorsque l'on consulte les œuvres des historiens tant anciens que modernes, on est parfois surpris de se trouver devant des données qui paraissent absolument contradictoires et inconciliables; tout semble en plein désarroi, et alors on se contente de citer les faits sans en tirer les conséquences qu'ils comportent.

Habitué, par ma carrière de géologue, à avoir affaire à des superpositions et à des synchronismes mondiaux d'où l'on peut tirer des conclusions, j'ai pu constater que l'on parvenait plus facilement à celles-ci en établissant des schémas d'ensemble, dans lesquels on associe les faits d'après leur nature et leurs conséquences.

D'abord les questions semblent s'embrouiller, mais des retouches successives, que l'on peut faire grâce à certaines concordances bien établies, permettent de trouver de nouvelles connexions, et ainsi, au bout d'un certain temps, l'accord se fait et les conclusions en découlent.

Il m'a semblé que la question de l'Atlantide entre dans la catégorie de celles que des schémas convenablement combinés permettent de débrouiller approximativement.

Si l'on consulte l'Histoire, on ne voit guère s'établir de coordination possible entre quantité de personnages mythiques, légendaires ou mythologiques, qui se heurtent, se repoussent, plutôt que de s'associer.

Les noms d'Atlantes, de Tritonis, de Poseïdôn, d'Atlas, d'Hercule, de Persée, de Prométhée, etc., sont le plus souvent pris séparément pour être placés plus ou moins arbitrairement en des pays divers, en des temps différents et dans des situations non adéquates à leur caractère et aux circonstances.

Or, ici, en prenant pour base le schéma proposé par M. le Prof^r^ Berlioux, on voit combien tout soudainement s'éclaire; comme par un coup de baguette magique, tous les éléments dispersés arrivent prendre leur place naturelle; dans le paysage primitif reconstitué, les personnages viennent jouer successivement leur rôle et l'histoire se déroule normalement avec ses péripéties connues, car les faits d'abord brouillés, se classent peu à peu, puis s'enchevêtrent régulièrement pour constituer enfin un tout où l'on n'aperçoit plus guère de fissure.

En réalité, le thème proposé avec tant de savoir et de sagacité par M. le Prof^r^ Berlioux a une portée plus grande que celle de l'histoire des Atlantes, car elle matérialise et enchaîne, pour ainsi dire, la majeure partie des faits et des personnages de la haute antiquité, qui ne nous apparaissaient, jusqu'ici, que comme des ombres floues, mythiques ou légendaires.

Enfin, la vérité est-elle vraiment si banale qu'elle puisse faire regretter l'ancienne légende poétique?

PROCLAMATION

M. le Secrétaire perpétuel proclame ensuite les résultats suivants des concours annuels de 1913 et de 1914, des prix perpétuels, des prix du Gouvernement et des élections.

Section des Sciences naturelles.

SIXIÈME QUESTION (1913).

On demande de nouvelles études sur la reviviscence chez les végétaux. — Prix : 1000 francs.

Le prix est décerné à Mlle Jeanne Terby, docteur en sciences, à Louvain.

QUATRIÈME QUESTION (1914).

Sur la pulsation cardiaque chez les poissons. — Prix : 1000 francs.

Le prix est décerné au Dr Jacques Roskam, de Liége.

TROISIÈME QUESTION.

Recherches sur les variations numériques des chromosomes dans la série végétale. — Prix : 1000 francs.

Le prix est décerné à M. Emile Marchal, correspondant de l'Académie, à Gembloux.

FONDATION AGATHON DE POTTER

Une subvention de dix-huit cents francs a été accordée à M. Modeste Stuyvaert, correspondant de l'Académie, pour l'impression de son travail : *Algèbre à deux dimensions,*

PRIX DERUYTS.

Troisième période (1910-1914).

Le prix de 1200 francs est décerné à M. Lucien Godeaux, docteur en sciences, lieutenant d'artillerie à Brasschaet.

PRIX JEAN-SERVAIS STAS

Conformément à la proposition du Comité qui a publié les œuvres de J.-S. Stas, un exemplaire de ces trois volumes est offert à M. Walther Mund d'Anvers, étudiant à l'Université de Louvain, et à Marc van Laer de Meerbeke, étudiant à l'Université de Bruxelles, qui ont obtenu, avec la plus grande distinction, le diplôme légal de docteur en sciences chimiques.

PRIX DU GOUVERNEMENT.

Prix décennal des Sciences mathématiques pures. — Deuxième période (1904-1914).

Sur la proposition du jury, le Roi, par son arrêté du 24 juin 1919, a décerné le prix, d'une valeur de 5,000 francs, à M. Alphonse Demoulin, membre de l'Académie.

NÉCROLOGE.

Depuis le 16 décembre 1913, la Classe a eu le regret de perdre :

Le secrétaire perpétuel, le chevalier Edmond Marchal;

Sept membres titulaires :

Constant Vanlair, Pierre De Heen, Michel Mourlon, Charles-Joseph-Polydore Francotte, Constantin Malaise, Charles Van Bambeke, Paul Mansion;

Dix associés :

Sir John Murray, Georges-William Hill, Édouard Suess, A. Hubrecht, Jules-Auguste-Alexandre Gosselet, Élie Metchnikoff, Pierre-Maurice-Marie Duhem, Emile Maupas, J.-B. Chauveau et Jean-Gaston Darboux.

RADIATIONS.

Le 8 février 1919, la radiation de quatorze associés des pays ennemis a été prononcée : Adolphe von Baeyer, Guillaume Foerster, George-H. Quincke, Félix Klein, Philippe Lenard, Otto Wallach, Émile Fischer, David Hilbert, Ernest-Henri Haeckel, Wilhelm Pfeffer, Wilhelm Roux, Adolphe von Koenen, Otto Bütschli et Simon Schwendener.

ÉLECTIONS.

Ont été élus, le 14 juin 1919, dans la Section des sciences mathématiques et physiques :

Membres titulaires (arrêté royal du 17 juin approuvant les élections) : MM. Verschaffelt (J.) et Lecointe (Georges).

Associés : MM. Deslandres (Henri), Hale (G.), Appel (Paul), Haller (Albin), Lockyer (N.), Thomson (J.-J), Volterra (Vito), Lorentz (H.), Moureu (Charles), Urbain (G.), Guichard (Claude).

Dans la Section des sciences naturelles :

Membres titulaires : MM. Marchal (Émile), Cornet (J.), Nolf (Pierre), Bordet (Jules).

Associés : MM. Marchal (Paul), de Margerie (E.), Davenport (Ch.), Sauvageau (C.-F.), Goodrich (E.-S.), Osborn (Henri-Fairfield), Mesnil (Fr.), Guignard (Léon), Termier (P.-M.), Caullery (Maurice), Richet (Charles), Grassi (B.).

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Buttgenbach (*Henri*). Notes minéralogiques. Liége, 1919; extr. in-8° (5-70 pp.).

Davenport (*C.-B.*). The science of human improvement by better breeding. New-York, 1910; in-16 (35 p.).

Fourmarier (*Paul*). Le bassin charbonnier de la Lukuga. Liége, 1919; extr. in-8° (1-17 pp.).

— Le Siluro-Cambrien du Brabant a-t-il joué le rôle d'un massif résistant? Liége, 1919; extr. in-8° (88-96 pp.).

— Étude comparative des formations postprimaires de la Malagarasi (Afrique orientale), de la Lukuga et des autres régions du Katanga. Liége, 1919; extr. in-8° (3-26 pp.).

— Rapport sur : Observations sur le bord nord du bassin de Dinant entre les méridiens d'Acoz et de Binche (R. Anthoine). Liége, 1919; extr. in-8° (89-91 pp.).

Godeaux (*Lucien*). Exemples de surfaces algébriques de diviseur supérieur à l'unité. Paris, 1915; extr. in-8° (1-4 pp.).

— Mémoire sur les surfaces algébriques de genre zéro et de bigenre un. Paris, 1915; extr. in-8° (1-29 pp.).

— Recherche des involutions de genre zéro, bigenre un, appartenant à une surface de genre un. Coïmbre, 1916; extr. gr. in-8° (1-13 pp.).

— Mémoire sur les involutions appartenant à une surface de genre un (première partie). Paris, 1914; extr. in-4° (357-430 pp.).

— Mémoire sur les surfaces algébriques doubles ayant un nombre fini de points de diramation. Liége, s. d.; extr. in-4° (289-312 pp.).

Hauman Merck (*Lucien*). Anticuerpos y suerodiagnosticos. Buenos-Ayres, 1910; extr. in-8° (29 p., pl.).

— Botánica. Buenos-Ayres, 1910; in-16 (372 p., pl.).

— Observations d'éthologie florale sur quelques espèces argentines et chiliennes. Bruxelles, 1912; extr. in-8° (1-39 pp., pl.).

— Notes sur les Phytolaccacées argentines. Buenos-Ayres, 1913; extr. in-8° (516 p., pl.).

— Empleo de una solución cupro-formíca para la conservación de órganos y tejidos vegetales. S. v., s. d.; extr. in-8° (2 p.).

— Étude microbiologique et chimique du rouissage aérobie du lin. Gembloux, s. d.; extr. in-8° (379-385 pp.).

Laughlin-Harry (*H.*). Chemical experiments paralleling the several possible modifications of the mendelian F_2 di-hybrid phenotypic non-blendig ratio. 9.3.3.1. New-York, 1918; extr. gr. in-8° (353-364 pp.).

— The dynamics of cell-division. S. l., 1918; extr. gr. in-8° (1-5 pp.).

— The relation between the number of chromosomes of a species and the rate of elimination of mongrel blood by the pure-sire method. New-York, 1919; extr. gr. in-8° (1-3 pp.).

Mirinny (*L.*). Phénomènes immatériels. Éther, Lumière, Noumènes, etc. Paris, 1919; pet. in-8° (56 p.).

Montel (*Paul*). Sur les familles normales de fonctions analytiques. Paris, 1916; extr. in-4° (223-302 pp.).

Pérée (*Ferdinand*). Exposé succinct des principes fondamentaux de la comptabilité naturelle. Liége, 1919; in-4° (8 p.).

Stroobant (*Paul*). Notions et données astronomiques. Bruxelles, 1919; extr. in-8° (5-98 pp.).

Belzung (*Er.*). Anatomie et physiologie végétales. Paris, 1900; in-8° (1320 p., gr.).

Caullery (*M.*) et *Mesnil* (*F.*). « Xenocœloma brumpti » C. et M. Copépode parasite de *Polycirrus arenivorus C.* Paris-Londres, 1919; extr. gr. in-8° (pp. 161-233, pl.).

— Metchnikovellidae et autres protistes parasites des grégarines d'Annélides. Paris, 1919; extr. in-8° (pp. 1-32, pl.).

Davenport (*C.-B.*). Rapport sur : Feeble-mindedness : Its Causes and Consequenses, by H. H. Goddard. New-York, 1915; extr. in-8° (pp. 1-4).

Davenport et *Conard.* Hereditary fragility of bone. New-York, 1915; extr. in-8° (pp. 537-538).

— The Heredity of stature. New-York, 1915; extr. in-8° (pp. 1-2).

— Hamtington's chorea in relation to heredity and eugenics. New-York, 1915; extr. in-8° (pp. 283-285).

— F. Field work an indispensable aid to state care of the socially inadequate. New-York, 1915; extr. in-8° (pp. 16-19).

— The radical element in national vitality. New-York, 1915; extr. in-8° (pp. 331-333).

— The value of zoology to humanity. New-York, 1915; extr. in-8° (pp. 1-12).

— The feebly inhibited, II. Nomadism or the wandering impulse with special reference to heredity. New-York, 1915; extr. gr. in-8° (pp. 120-122).

— The feebly inhibited, I. Violent temper and its inheritance. New-York, 1915; extr. gr. in-8° (pp. 37-38).

— Inheritance of temperament. New-York, 1915; extr. (1 p.).

— Heredity in albinism. New-York, 1916; extr. in-8° (221-223 p., fig.).

— The hereditary factor in Pellagra. Chicago, 1916; extr. gr. in-8° (pp. 1-28, fig.).

— The effects of race intermingling. New-York, 1917; extr. gr. in-8° (pp. 364-368).

— Charles Obis Whitman (1843-1910). New-York, 1917; extr. gr. in-8° (pp. 877-878).

Davenport et *Ritzman.* Family performance as a basis for selection in sheep. Washington, 1917; extr. gr. in-8° (pp. 93-97).

— On utilizing the facts of juvenile promise and family history in awarding naval commissions to untried men. Washington, 1917; extr. gr. in-8° (pp. 404-409).

— The personality, heredity and work of Charles Obis Whitman (1843-1910). New-York, 1917; extr. gr. in-8° (pp. 5-30).

Davenport et *Love* (*A.-C.*). A comparison of white and colored troops in respect to incidence of disease. New-York, 1919; ext. gr. in-8° (pp. 58-67).

Laughlin (*H.-H.*). Report on the organization and the first eight months' work of the eugenics record office. Washington, 1911; extr. gr. in-8° (pp. 107-112).

Conard (*H.-S.*). Revegetation of a denuded area. New-York, 1913; extr. gr. in-8° (pp. 80-84).

Derache (*Dr*). Hôpital militaire belge de Beveren-sur-Yser. Notice et photographies. Port-Villez, 1917; in-8° (48 p., gr.).

Dujardin (*B.*). Le bilan social des affections vénériennes. Leur prophylaxie sociale. Bruxelles, 1919; in-8° (76 p.).

Lameere (*A.*). Guide pour la microscopie et la dissection. Bruxelles, 1919; in-8° (143 p., cart. édit.).

Liais (*Emm.*). L'espace céleste. Paris, s. d. gr. in-8° (606 p., gr.).

Perez (*Ch*). Félix le Dantec (1869-1917). Paris, 1918; in-8° (28 p., 1 portrait).

Rutot (*A.*). Les grandes mutations intellectuelles de l'Humanité. Première partie : D'où venons-nous? Que sommes-nous? Bruxelles, 1919; in-8° (152 p., fig.).

Sars (*G.-O.*). An account of the Crustacea of Norway. Bergen, 1919; in-4° (24 p., 16 pl.).

Stroobant (*Paul*). Observations de *Nova Aquilae*, n° 3, effectuées en 1916. Bruxelles, 1919; in-4° (58 p.).

Stuyvaert (*M.*). Extension de la notion de Jacobien. Paris-Genève, 1919; extr. in-8° (pp. 347-354).

PARIS. *Institut international d'anthropologie.* Rapports préalables. Paris, 1919; in-8° (24 p.).

GAND. Réception solennelle de M. Raymond Poincaré, Président de la République Française et du Maréchal Foch, à Gand, le 23 juillet 1919. 1919; in-8° (68 p.).

GAND. Réception du M. Raymond Poincaré, Président de la République Française et du Maréchal Foch, à Gand. 1919; in-8° (34 p.).

GENÈVE. *La libération du Luxembourg.* s. d.; in-32 (32 p.).

LE HAVRE. *Bureau documentaire belge.* Le travail forcé des ouvriers belges en Allemagne. s. d.; in-8° (VIII-32 pp.).

Office central belge pour les prisonniers de guerre. Troisième rapport annuel, 1918; in-8° (288 p., pl.).

Comité central. OEuvre d'assistance aux prisonniers belges en Allemagne. Rapport présenté à l'Assemblée générale du 9 décembre 1916. 1917; in-8° (208 p.).

Comité central. OEuvre d'assistance aux prisonniers belges en Allemagne. Rapport présenté à l'Assemblée générale du 26 février 1916. Paris-Nancy, 1916; in-8° (119 p.).

Bureau documentaire belge. L'œuvre du Gouvernement belge pendant la guerre, 1917; in-8° (62 p.).

LE HAVRE. *L'Armée belge en campagne.* Aperçu général des principales mesures prises pour améliorer le bien être matériel et moral du soldat belge. 1918; in-8° (40 p.).

LONDRES. *Commission d'enquête sur les atrocités allemandes.* Rapport. 1915; in-8° (62 p., 1 carte).

Appendice du rapport. 1915; in-8° (278 p.).

PARIS. *Amicale des Parlementaires belges.* La fête nationale belge à Sainte-Adresse. s. d.; in-8° (70 p., ill.)

PARIS. *Rapport du commandement de l'Armée.* L'action de l'Armée belge pour la défense du pays et le respect de sa neutralité. 1915; in-4° (94 p., carte, édit.).

La campagne de l'Armée belge (31 juillet 1914-1er janvier 1915), d'après les documents officiels. 1915; in-8° (166 p., 16 cartes, 23 photographies).

Swarts (Fr.). Études thermochimiques sur les combinaisons organiques fluorées. Paris, 1919; extr. in-8° (pp. 3-70).

— Sur l'acide fluorcinnamique. Paris, 1919; extr. in-8° (pp. 325-335).

Lacroix (A.). Sur un nouveau gisement de gadolinite. Paris, 1888; extr. in-8° (pp. 1-13).

— Étude sur le métamorphisme de contact des roches volcaniques. Macon, 1894; in-4° (6 p., planches).

— Sur la forstérite et les pseudomorphoses de dipyre en forstérite et spinelle des contacts des roches lherzolithiques de l'Ariège. [Paris], s. d.; extr (pp. 1-22).

— Notice nécrologique sur A. Des Cloizeaux. Paris, 1897; in-8° (32 p., 1 portrait).

— Notes minéralogiques. Paris, 1898; extr. in-8° (pp. 3-64).

Lacroix (A.). Les roches basiques accompagnant les lherzolithes et les ophites des Pyrénées. Paris, 1901 ; extr. gr. in-8° (pp. 1-33, planches).

— A propos de la plumasite, roche à corindon. Paris, 1905; extr. in-8° (pp. 1-39).

— Résultats minéralogiques et géologiques de récentes explorations dans l'Afrique occidentale française et dans la région du Tchad. Paris, 1905; extr. in-8° (pp. 3-31).

— La météorite de Saint-Christophe-la-Chartreuse, Rocheservière (Vendée). Nantes, 1906; gr. extr. in-8° (pp. 81-112, planches).

— Sur quelques produits des fumerolles de la récente éruption du Vésuve et en particulier sur les minéraux arsénifères et plombifères. Paris, 1906; extr. in-4° (pp. 1-5).

— Sur l'existence de sables monazités à Madagascar. Paris, 1909; extr. in-8° (pp. 1-23).

— Sur le travail de la pierre polie dans le Haut-Oubanghi. Paris, 1909; extr. in-4° (pp. 1-4).

— Sur l'existence de roches grenues intrusives pliocènes dans le massif volcanique du Cantal. Paris, 1909; extr. in-4° (pp. 1-6).

— Sur l'existence de trachytes quartzifères à arfvedsonite (bostonites) dans le massif du Mont-Dore. Paris, 1909; extr. in-4° (pp. 1-7).

— Sur l'existence de la rhodizite dans les pegmatites de Madagascar. Paris, 1909; extr. in-4° (pp. 1-4).

— Sur la constitution minéralogique des phosphorites françaises. Paris, 1910; extr. in-4° (pp. 1-8).

— Conséquences générales à tirer de l'étude de la constitution pétrographique de Tahiti. Paris, 1910; extr. in-4° (pp. 1-6).

— Sur quelques minéraux formés par l'action de l'eau de mer sur les objets métalliques romains trouvés en mer au large de Mahdia (Tunisie). Paris, 1910; extr. in-4° (pp. 1-4).

— Sur la rivotite. Paris, 1910, extr. in-8° (pp. 1-15).

— Sur l'existence de la connellite en Algérie. Paris, 1910; extr. in-8° (pp. 1-26).

— Discours prononcé à la Société géologique de France. [Paris], 1910; extr. in-8° (pp. 334-342).

— Le cortège filonien des péridotites de la Nouvelle-Calédonie. Paris, 1911; extr. in-4° (pp. 1-7).

Lacroix (*A.*). Les matériaux des éruptions explosives rhyolithiques et trachythiques du volcan du Mont-Dore. Paris, 1911; extr. in-4° (pp. 1-4).

— Les cristaux de calcite du Calcaire carbonifère de Louverné (Mayenne). Laval, 1911; extr. in-8° (pp. 3-19, planches).

— Les richesses minérales de Madagascar. Paris, 1912; in-8° (28 p.).

— Les cipolins de Madagascar et les roches silicatées qui en dérivent. Paris, 1913; extr. in-4° (pp. 1-5).

— La constitution minéralogique de l'archipel de Los (Guinée). Paris, 1913; extr. in-4° (pp. 1-6).

— Sur la constitution minéralogique et chimique des laves des volcans du centre de Madagascar. Paris, 1913; extr. in-4° (pp. 1-6).

— Sur les roches rhyolithiques et dacithiques de Madagascar et en particulier sur celles de la région sakalave. Paris, 1913; extr. in-4° (pp. 1-8).

— Notice historique sur Auguste-Michel Lévy. Paris, 1914; in-4° (52 p., 1 portrait).

— Les roches basiques non volcaniques de Madagascar. Paris, 1914; extr. in-4° (pp. 1-33).

— Sur quelques roches volcaniques mélanocrates des possessions françaises de l'océan Indien et du Pacifique. Paris, 1916; extr. in-4° (pp. 1-20).

— Les syénites à riebeckite d'Alter Pedroso (Portugal), leurs formes mésocrates (lusitanites) et leurs transformations en leptynites et en gneiss. Paris, 1916; extr. in-4° (pp. 1-6).

— Les roches grenues d'un magma leucithique étudiées à l'aide des blocs holocristallins de la Somma. Paris, 1917; extr. in-4° (pp. 1-7).

— La composition et les modes d'altération des ophites des Pyrénées. Paris, 1917; extr. in-4° (pp. 1-13).

— Les laves leucithiques de la Somma. Paris, 1917; extr. in-4° (pp. 1-7).

— Les formes grenues de magma leucithique du volcans Laziale. Paris, 1917; extr. in-4° (pp. 1-6).

— Les verres volcaniques du massif du Cantal. Paris, 1917; extr. in-4° (pp. 1-19).

Lacroix (*A.*). Les laves à haüyne d'Auvergne et leurs enclaves homœogènes : importance théorique de ces dernières. Paris, 1917; extr. in-4° (pp. 1-8).

— Sur la transformation de quelques roches éruptives basiques en amphibolithes. Paris, 1917; extr. in-4° (pp. 1-13).

— Sur l'existence de roches volcaniques aux îles Loyalty. Macon, 1918; extr. in-8° (2 p.).

— Sur quelques roches filoniennes sodiques de l'archipel de Los (Guinée française). Paris, 1918; extr. in-4° (pp. 1-7).

— Notice historique sur Déodat Dolomieu. Paris, 1918; in-4° (88 p., 1 portrait).

— Une note de Dolomieu sur les basaltes de Lisbonne, adressée en 1779 à l'Académie royale des sciences. Paris, 1918; extr. in-4° (pp. 1-8).

— Les gisements de l'or dans les colonies françaises et en particulier à Madagascar. Paris, 1918; extr. in-4° (pp. 225-233).

— Les laves leucithiques de Trébizonde et leurs transformations. Paris, 1919; extr. in-4° (pp. 1-6).

— Dacites et dacitoïdes, à propos des laves de la Martinique. Paris, 1919; extr. in-4° (pp. 1-6).

— Note sur A. Lévy (1795-1841). Paris, 1919; extr. in-8° (pp. 1-13).

— Un manuscrit inédit de Dolomieu sur la minéralogie du Dauphiné. Grenoble, 1919; in-8° (50 p.).

ERRATA

Page 572, les lignes 10, 11 et 12 doivent être supprimées.

Page 658, à l'article premier des Statuts de l'Union internationale de la Chimie pure et appliquée, supprimer le premier des buts : « *De resserrer les liens d'estime et d'amitié qui se sont affirmés pendant la durée de la guerre entre les différents peuples alliés* », et remplacer ensuite l'ordre 2°, 3° et 4° respectivement par 1°, 2° et 3°.

Page 666, au lieu de : « *Statuts de l'Union internationale de radiotélégraphie scientifique* », mettre : « *Projet de statuts pour une Union internationale de radiotélégraphie scientifique* ».

TABLE ANALYTIQUE

A. — COMPTES RENDUS DES SÉANCES

Académies interalliées :

Préparatifs pour la réunion, 421.

Adresse au Roi, 3; remerciements, 153.

Assemblée générale, 12, 98, 159, 403.

Augmentation du nombre des membres, 727.

Bibliographie :

Bulletin des ouvrages présentés, 91, 147, 211, 326, 400, 719, 965.
Liste des travaux publiés par l'Académie, 413.
Dons d'ouvrages, 4, 94, 151, 216, 328, 419, 483, 508, 724, 830, 846B, 848.
JONCKHEERE (Robert), travaux; note par G. Lecointe, 852.
UCCLE : Observatoire royal de Belgique. Annuaire pour 1916-1919; notes par Paul Stroobant, 99, 156.

Biographie :

Discours aux funérailles de Michel Mourlon, par A. Rutot, 4, 12.
Discours aux funérailles de Constant Malaise, par Émile Marchal, 4, 15.

Centenaire de l'Académie, 850.

Choix d'un éditeur, 420, 483.

Commission :

Constituée pour examiner l'attitude prise par M. Dollo, 213.

Commission administrative :

M. Rutot, nommé délégué, 95.
M. Stroobant, nommé suppléant, 832.

Commission de la Biographie nationale :

Gilkinet et Neuberg sont élus délégués, 95; rapport, 405; élection, 729.

Commission du Centenaire, 158.

Commission spéciale des finances :

Election des membres, 95, 846a.

Concours annuels :

Mémoires soumis aux concours de la Classe de 1914, doivent être considérés comme perdus, 10.

1913. Rapports (Mémoire : On demande de nouvelles recherches sur la reviviscence des végétaux; lauréat, Mlle Jeanne Terby), 330; — Remercie, 418; — Proclamation, 961.

1914. Rapports (Mémoire : Recherches sur les variations numériques des chromosomes dans la série végétale; lauréat, M. Émile Marchal), 95, 152, 153; — Proclamation, 961.

1914. Rapport (Mémoire sur la pulsation cardiaque chez les poissons; lauréat, M. le Dr Jacques Roskam), 152, 154, 215; — Proclamation, 961.

1920. Questions prorogées du concours de 1915, 98.

Date de prorogation des divers concours, 1921. — Programme, 853.

Conférence des Académies des sciences interalliées :

Ratification des délégués, 11.

Note de M. Lecointe sur les *Relations intellectuelles internationales d'après guerre,* 11.

Congrès :

de l'Institut international d'anthropologie, 9, 328.

Conseil national belge de recherches :

Création, 159; constitution, 225, 332, 510, 729.

Conseil international de recherches :

Communications 150, 215; — Constitution, 159, 225, 332; — Réunion, 215.

M. Gravis, président, 482; — Délégation. 484; — Protestation de M. Vincent, 508; — Compte rendu, 510, 545; — Communication, 832.

Discours :

de M. Pelseneer, 4.

de M. Swarts, 849.

Distinctions honorifiques :

Jules Bordet, élu membre de la Royal Society de Londres, 93.

M. Brachet, chevalier de la Légion d'honneur, 507.

Cesàro, lauréat du Prix Gegner, 479; élu membre ordinaire de l'Académie des Sciences physiques et mathématiques d'Italie, membre honoraire de la Société française de minéralogie, membre correspondant de l'Académie des Sciences de Rouen, 479.

Maurice Delacre, lauréat du Prix Binoux, 93.

Ch.-J. de la Vallée Poussin, élu correspondant de l'Académie des Sciences de Paris, 93; - Lauréat du Prix de Parville, 93.

A. Demoulin, lauréat du Prix décennal des sciences mathématiques pures, 507; — Arrêté royal, 508.

Léon Fredericq, nommé membre étranger de la « R. Accademia dei Lincei » de Rome, 149.

Charles Julin, élu correspondant de la Société de biologie de Paris, 479.

Auguste Lameere, élu correspondant de l'Académie des sciences de Paris, 93.

Georges Lecointe, élu correspondant de l'Académie des sciences de Paris, 93.

Paul Pelseneer, lauréat du Prix Cuvier, 479.

A. Rutot a reçu le titre de membre honoraire de l' « Anthropological Institute of Great Britain and Ireland », 149.

ORDRE DE LÉOPOLD :

Commandeurs : MM. Léon Fredericq, Gilkinet et Louis Le Nain, 723.

Officiers : MM. Cesàro, Jorissen, Julin, Lohest, Delacre, de la Vallée Poussin, Demoulin, Lameere, Stroobant et Van Aubel, 723, 829.

Chevaliers : MM. Marchal, Stuyvaert, Verschaffelt et Willem, 507, 829.

ORDRE DE LA COURONNE :

Grand-Officier : M. le Paige, 723.

Commandeurs : MM. Lecointe et Rutot.

Échange des publications avec les sociétés savantes des pays ennemis :

Rupture des relations et des échanges des publications, 158.

Élections et nominations :

1919. Présentation de candidats, 217, 332; — MM. J. Verschaffelt, G. Lecointe, Émile Marchal, Jules Cornet, Pierre Nolf et Jules Bordet, *titulaires;* — Albert Brachet, *correspondant;* — Henri Deslandres, G Hale, Paul Appel, Haller, N. Lockyer, J.-J. Thomson, Viti Volterra, Lorentz, Charles Moureu, G. Urbain, Claude Guichard, Paul Marchal, E. de Margerie, Davenport, Sauvageau, Goodrick, Henry Fairfield Osborn, F. Mesnil, Guignard, Termier, Maurice Caullery, Charles Richet, Grassi, *associés;* — Remerciements, 480, 508; — Approbation royale, 504.

Candidats proposés par les sections, 725, 846A; - MM. Cl. Servais, *membre titulaire;*—Th. De Donder, J. Boulvin, Paul Fourmarier, E. de Dorlodot, O. Van der Stricht et V. Grégoire, 848.

Directeur :

1919. M. G. Cesàro, 3, 481.

Vice-Directeur :

1919. M. A. Gravis.

Nomination du Président de l'Académie :

1919. M. Henri Pirenne, 214.

Errata, 721, 973.

Exclusion des membres associés des pays ennemis, 9, 12, 94, 95, 151, 214, 480.

Félicitations pour la délivrance de la Belgique de :

La Société mathématique de France, 9.

Service géologique du Portugal, 9.

La Société de physique et d'histoire naturelle de Genève, 150.

Du Prof^r Corrado Segre, de Turin, 214.

Hommage :

A la mémoire de Ch. Van Bambeke, 4.

Jubilés :

Inauguration de l'Université de Strasbourg, 830, 849.

Littérateurs à l'Académie, 484, 504, 510, 824.

Mémoires de concours :

Mémoires qui se trouvaient au Palais en 1914, 10. — Stuyvaert, mémoire couronné, 96.

Motions :

Remerciements à la Commission administrative et à son Secrétaire, 99.

Félicitations à tout le personnel du Secrétariat, 99.

Nécrologie :

Chauveau, 3; Darboux (Gaston), 3; De Heen (Pierre), 3; Desguin, 508; Duhem (P.), 3; Echegaray (J.), 9; Francotte (Ch.-J.-P.), 3; Gosselet, 3; Malaise (C.), 3; Mansion (Paul), 327, 328, 418; Marchal (chevalier Edmond), 3; Metchnikoff (P.), 3; Mourlon (Michel), 3; Oechsner de Coninck, 829; Van Bambeke (Ch.), 3.

Nominations scientifiques, 833.

Notices pour l'Annuaire : Ont accepté d'écrire la biographie :

M. G. Lecointe, de A. Brialmont, 98.

Palais des Académies :

Photographies prises au lendemain de l'évacuation, 36.

Plis cachetés :

DÉPÔT PAR :

Th. De Donder, 94; R. Ledent, 216; C. le Paige, 418; A. Scholl, 94; Edm. Van Aubel, 10, 94; P. Stroobant, 725; A. Errera, 725; G. Vincent, 846B.

OUVERTURE :

Th. DE DONDER. La vitesse de l'énergie électromagnétique dans un champ gravifique (impression au *Bulletin*), 152.

Alfred SCHOLL. De l'avortement épizootique des juments (à l'examen), 328.

Prérogatives de l'Académie :

Motion, 98; — Rapport, 224, 332.

Prix académiques :

PRIX FRANÇOIS DERUYTS :

3e période, 1910-1914. M. Neuberg, remplacé comme rapporteur par M. Stuyvaert, 10; — Rapports, **1919**, 421; — Prix décerné à M. Godeaux, 420, 421; — Remercie, 480.

PRIX JEAN-SERVAIS STAS :

Décerné à MM. Walther Mund et Marc Van Laer, de Meerbeke, 846B, 962.

FONDATION AGATHON DE POTTER :

Approbation du projet de règlement, 157; — Travaux soumis, 158; — Correspondance pour hâter la délivrance du legs, 157, 419, 480; — Règlement, 221; — Rapport sur un travail de M. Stuyvaert, 729; — Subvention, 831; — Proclamation, 962; — Remercie, 846B; — Modification du règlement, 846D.

Prix du Gouvernement :

PRIX DÉCENNAUX, 509, 728, 832.

Prix décennal des sciences mathématiques pures. Deuxième période (1904-1914). M. Alphonse Demoulin, lauréat, 962; proclamation, 962

Proposition de modification du règlement, 846c.

Protestation adressée au Gouverneur allemand au sujet de la déportation des civils, 150.

Rapports :

a) **Sur les travaux publiés dans le** *Bulletin :* Voir à la Table des communications, à la suite des titres.

b) **Sur les travaux publiés dans la collection des** *Mémoires :*

BUTTGENBACH (H.). Contribution à l'étude des Calcites belges; avis verbal de M. Max Lohest (*Mémoires* in-8°), 11.

CESÀRO (G.). Contribution à l'étude des minéraux du Vésuve et du Monte-Somma; Les minéraux du groupe de la Néphéline (*Mémoires* in-8°), 47.

— Sur quelques relations numériques pouvant être utiles dans l'interprétation des analyses des beurres falsifiés (*Mémoires* in-8°), 216.

DE MEYER (J.). Électrophysiologie musculaire; rapports de MM. Nolf et L. Fredericq (*Mémoires* in-8°), 217.

— Électrophysiologie musculaire. Dualité et complexité de la réaction électrique du muscle strié; rapports de MM. L. Fredericq et P. Nolf (*Mémoires* in-8°), 219.

PELSENEER (Paul). Les variations et leur hérédité chez les Mollusques (*Mémoires* in-8°), 11.

PIENKOWSKI (P.). Sur la mesure des mobilités des ions par la méthode du condensateur-plan (*Mémoires* in-8°), 726.

c) **Sur les travaux non publiés par l'Académie :**

BINON (Joseph). Triangométrie (dépôt aux archives), avis verbal de M. Stuyvaert, 152.

DAMRY. Sur la théorie des erreurs d'observations (il est décidé de surseoir à tout examen de ce travail), 97.

BERTRAND (Léon). Une maladie des plaques photographiques due à un bacille sporulé aéro-anaérobie, 482; dépôt aux archives, sur rapport de MM. Bordet et Marchal, 726.

BOENS (J.). Électricité atmosphérique et paratonnerres (à l'examen), 851.

D'AOUST (Ch.). Communication relative à un procédé personnel de mnémotechnie, 216.

DAROSE (F.). La géométrie par le mouvement. Démonstration du Postulatum d'Euclide comme théorème initial de la géométrie (dépôt aux archives, sur avis de M. Stuyvaert), 329.

DROESBEKE (Marc). Biplan à surface portante (dépôt aux archives, sur avis verbal de M. Ch.-J. de la Vallée Poussin), 329.

— Calcul du rendement des hélices aériennes et détermination de la hauteur du plafond (dépôt aux archives, sur avis de M. de la Vallée Poussin), 831.

Godeaux. Les surfaces bicanoniques doubles ayant un nombre fini de points de diramation (renvoi à l'auteur pour modifications, sur avis de MM. Stuyvaert et Neuberg), 831.

Knapen (A.). Sur l'extraction de l'humidité originelle ou de construction dans les bâtiments ou locaux nouvellement construits, au moyen du froid artificiel, 216.

Meurice (A.). Problème de l'électricité (dépôt aux archives, sur rapport de M. Lecointe), 726.

Poutet. — Mémoire relatif à la multisection géométrique de l'arc et de la circonférence (dépôt aux archives, sur avis de M. Stuyvaert), 846d, 848.

Scholl (Alfred). De l'avortement épizootique des juments (renvoi à l'auteur, sur rapport de M. Bordet), 483.

Smekens. La quadrature du cercle (dépôt aux archives, sur avis de M. Cesàro, 483.

Spelkens (L.). La quadrature du cercle, 418; lettre explicative, 508.

Stevelinck. Contribution à l'étude de l'aimantation (à l'examen), 727 (dépôt aux archives sur avis de MM. Verschaffelt et de Hemptinne), 831.

Wilmotte (Henri). L'énergie dans son essence, 418, 480.

Recueils bibliographiques, 237.

Statuts organiques :

Modifications (arrêté royal du 10 juin), 480.

Séances, 1, 93, 149, 213, 327, 417, 507, 723, 823, 829, 847.

Séance publique :

Choix d'une lecture, 420; — Communication des lectures, 851; remerciements, 846b.

Secrétaire perpétuel :

Présentation de candidatures, 418; — Élection, 504; — M. Paul Pelseneer élu, 504.

Section des sciences techniques :

Proposition de M. de Hemptinne, 510.

Tables des constantes physiques, 851.

Tomaison des Bulletins, 832.

B. — COMMUNICATIONS ET LECTURES

Algèbre :

STUYVAERT (M.). Courbes algébriques gauches représentées par des motrices, 83.
— Systèmes triplement infinis de coniques dans un plan, 289.

Analyse mathématique et Géométrie infinitésimale :

DEMOULIN (A.). Sur la transformation de Moutard et quelques-unes de ses applications géométriques, 261.

Bibliographie :

MASSART (Jean). Liste des recueils bibliographiques des sciences mathématiques, physiques, chimiques et naturelles, 249.

Botanique :

GRAVIS (A.). Connexions anatomiques de la tige et de la racine, 227.

TERBY (Jeanne). Les « Taraxacum » de graine sont-ils différents des « Taraxacum » de bouture? (1 fig.), 497.

Chimie :

BRUYLANTS (P.) et MICHIELSEN (J.). Nouveau procédé de détermination du poids atomique du tellure (2 fig.), 119; rapports de MM. Swarts et de Hemptinne, 95.

GILLIS (J.). Isomérisation et polymérisation du sulfocyanure de méthyle, 787; présenté par M. Swarts, 727.

Chimie biologique :

VANDEVELDE (A.-J.-J.). La stérilisation de la farine en vue de la fermentation panaire (deuxième note), 383.

Chimie physique :

TIMMERMANS (Jean). Essai sur l'analyse piézométrique, 735.

Chimie végétale :

JORISSEN (A.-M.). Recherches sur la cyanogenèse. Une réaction de l'acide citrique, 731.

Divers :

DE LA VALLÉE POUSSIN, LECOINTE et MASSART. Conférence des Académies des sciences interalliées tenue à Londres en octobre 1918. Compte rendu, 49.
— Idem (deuxième session tenue à Paris en novembre 1918). Compte rendu, 63

de Hemptinne (A.). La découverte scientifique, 895.

Lecointe (Georges) et de Guchtenaere (H.). Les relations intellectuelles internationales d'après guerre, 37.

Lenain (Louis). Rapport sur la vie académique pendant la période de guerre 1914-1918, 19; sur l'état du Palais des Académies après le départ des Allemands, 31.

Pelseneer, Swarts et Lecointe. Conseil international de Recherches. Compte rendu de l'Assemblée constitutive, 545.

Rutot (A.). L'Atlantide, 907.

Géologie :

Anten (J.). Sur le Salmien de la vallée de la Lienne, 885; présenté par M. Lohest, 846d.

Fourmarier (P.). Le contact du Dévonien et du Calcaire carbonifère à Horion-Hozémont, 889; présenté par M. Lohest, 846d.

Lohest (Max). Discordance de stratification entre le calcaire carbonifère et le houiller en Belgique, 835.

Géométrie algébrique :

Godeaux (Lucien). Les surfaces bicanoniques doubles ayant un nombre fini de points de diramation, 855; présenté par MM. Stuyvaert et Neuberg, 831.

Géométrie infinitésimale :

Demoulin (A.). Sur la transformation de Guichard et sur les systèmes K, 101; présentation, 97.

— Sur les surfaces dont les lignes de courbure d'un système sont planes ou sphériques et sur les familles de Lamé dont les trajectoires orthogonales sont planes ou sphériques, 179; présentation, 157.

Demoulin (A.). Sur les systèmes Θ et sur les systèmes R, 185; présentation, 157.

— Sur les congruences de sphères cycliques et sur les systèmes triples orthogonaux à lignes de courbure planes ou sphériques dans un système, 339; présentation, 331.

— Sur les transformations de Ribaucour, 425.

— Sur les surfaces réglées, les surfaces cerclées et les surfaces à lignes de courbure sphériques dans un système, 511.

Mathématiques :

Neuberg (J.). Quelques problèmes de probabilités, 333; présentation, 331.

Optique :

Verschaffelt (J.-E.). L'existence d'une déviation constante dans la réfraction par un prisme biréfringent, 285.

Physico-chimie :

de Hemptinne (A.). L'action chimique de l'effluve électrique et la loi de Faraday (6 fig.) 161; présentation, 157.

— La loi de Faraday et l'action de l'effluve électrique sur les oxydes métalliques, 249; deuxième communication, 487.

— La loi de Faraday et l'action de l'effluve électrique sur les gaz, 521.

Bruylants (P.) et Mund (W.). *Thermostat pour basses températures,* 113; rapports de MM. Swarts et de Hemptinne, 95.

Mund (W.). Sur les tensions de vapeur de l'anhydride sulfureux, 529; rapport verbal de M. de Hemptinne, 510.

Physiologie :

De Meyer (J.). L'origine des phases ventriculaires de l'électro-cardiogramme. Note préliminaire (1 pl.), 131; rapport de M. L. Fredericq, 95.

Gley (Eug.) et Quinquaud (Alf.). Remarques sur les relations admises entre la fonction du nerf splanchnique et la sécrétion surrénale d'adréaline, 315.

Physique :

Crombez (R.). Mesures d'indices de réfraction de solutions d'une substance absorbante, 875; présenté par M. Verschaffelt, 846d.

Nicaise (Ch.). Volumes de ménisques de mercure, 361.

Henriot (E.). Sur une propriété commune aux systèmes thermodynamiques les plus simples, 371.

Verschaffelt (J.-E.). Les différences de potentiel anodique et cathodique dans le transport de l'électricité par un électrolyte, 441.

Physique mathématique :

De Donder (Th.). La vitesse de l'énergie électro magnétique dans un champ gravifique, 199.

— La gravifique, 201; présentation par M. Stroobant, 152, 727; idem (deuxième communication), 317; idem (troisième communication), 465; idem (quatrième communication), 813.

Physique théorique :

Henriot (E.). Sur les invariants optiques, 739, 837, 865; présenté par M. J.-E. Verschaffelt, 726, 833, 846d.

TABLE ONOMASTIQUE

Les noms des académiciens sont en petites capitales.
Les chiffres en caractères **gras** *indiquent la page d'une communication.*

A

Académie royale de médecine, 846a.
Académie des sciences de l'Institut de France. 328.
Académie des sciences de Portugal, 9, 724, 846b.
Académie royale des sciences exactes, physiques et naturelles de Madrid, 9.
Académie royale flamande de langue et de littérature de Gand, 214.
Anten (J.), 846d, **885**.
APPELL (Paul), 74, 417, 964.
Association des diplômés de l'École industrielle de Seraing, 151.
Association des ingénieurs sortis de l'École de Liége, 151.

B

Baeyer (Adolphe von), 963.
Baillaud, 55, 72, 78.
BERGMANS (Paul), **405**.
Bertrand (Léon), 482, 726.
Bettencourt (Rodrigez), 81.
Bigourdan, 55, 72, 74, 78.
Binon (Joseph), 152, 830.
Boens (J.), 851.
BORDET (Jules), 93, 98, 214, 328, 417, 482, 483, 508, 964.
BOULVIN (J.), 848.
BRACHET (Albert), 417, 507.
BRIALMONT, 98.
Bruylants, 95, **113**, **119**.
Bumstead (H.-A.), 55, 77.
Butschli (Otto), 963.
Buttgenbach (H.), 10, 11.

C

Carty (J.-J.), 55, 74, 77.
CAULLERY (Maurice), 418, 964.
Cercle archéologique du Pays de Waes, 151.
CESÀRO (Giuseppe), 3, 97, 216, 479, 481, 483, 508, 723.
CHAUVEAU (J.-B.), 3, 963.
Conseil international de recherches scientifiques, 215.
CORNET (Jules), 417, 508, 964.
Crombez (R.), 846d, **875**.
Cuvier, 479.

D

d'Aoust (Ch.), 216.
Damry, 97.
DARBOUX (Jean-Gaston), 3, 963.
Darose (F.), 329.
DAVENPORT, 417, 508, 964.
de Carvalho (Carlos), 55, 74, 77.
DE DONDER (Th.), 94, 152, **199**, **201**, **317**, **465**, 727, **813**, 848.
DE DORLODOT (H.), 848.
DE HEEN (Pierre), 3, 963.
DE HEMPTINNE (A.), 95, 157, **161**, 221, **249**, 329, 419, 484, **487**, 510, **521**, 851, **895**.
DELACRE (Maurice), 93, 829, 851.

de la Vallée Poussin (Ch.-J.), 11, **49**, 55, **63**, 77, 93, 221, 329, 484 829.
de Margerie (E.), 417, 964.
De Meyer (J.), 95, **131**, 217, 418.
Demoulin (A.), 97, 98, **101**, 157, **179**, **185**, **261**, 331, **339**, **425**, 507, 508, **511**, 829, 962.
De Potter (Agathon), 157, 221, 419, 729, 846d, 962.
Deruyts (Jacques), 94, 420, 846a.
Deruyts (Prix), 420, 962.
Desguin (Victor), 332, 508.
Deslandres (Henri), 417, 964.
Dollo (Louis), 213, 214.
Droesbeke (Marc), 329, 726, 831.
Duhem (P.-M.-M.), 3, 963.
Durand (W.-J.), 51, 55, 65, 78.
Dyson (Sir Frank), 56, 72.

E

Echegaray (J.), 9.
École d'anthropologie de Paris, 3, 328.
Ergo, 846b.
Errera (Alfred), 725.

F

Fantoli (Gaudenzio), 80.
Faraday, 161, 249, 487, 521.
Fischer (Émile), 963.
Flahault (Charles), 78.
Flexner (S.), 55, 74, 78.
Foerster (Guillaume), 963.
Fourmarier (Paul), 846d, 848, **889**.
Francotte (Ch.-J.-P.), 3, 963.
Frankland (P.-F.), 79.
Fredericq (Léon), 95, 152, 156, 216, 217, 219, 332, 723, 846a, 846b.
Fredericq (Paul), 826.
Freire (Braamcamp), 56.

G

Gegner, 479.
Gilkinet (Alfred), 95, 723.
Gillis, 727, **787**.
Gley, 216, **315**.
Goblet d'Alviella (Comte), 825, 827.
Godeaux (Lucien), 418, 420, 480, 726, 831, **855**, 862, 846c.
Goodrich (E.-S.), 418, 964.
Gosselet (J.-A.-A.), 3, 963.
Grassi, 418, 964.
Gravis (A.), 3, 94, 152, **227**, 330, 482.
Gregoire (V.), 848.
Guchtenaere (H. de), **37**.
Guichard (Claude), 101, 417, 964.
Guignard (Léon), 74, 78, 418, 964.

H

Habets, 484.
Haeckel (Ernest-Henri), 963.
Hale (G.), 55, 67, 78, 417, 964.
Haller, 55, 78, 417, 964.
Hardy (W.-B.), 56.
Héger (D^{r} P.), 484.
Henriot (E.), 328, **371**, 726, **739**, 833, 846d, **837**, **865**.
Herdman (W.-A.), 56.
Hilbert (David), 963.
Hill (Georges-William), 963.
Hubrecht (A.), 963.
Hulin de Loo (Georges), 825, 827.
Hurmuzesco, 74. 81.

J

Jeans (J.-H.), 56, 79.
Jonckheere (Robert), 852.
Jorissen (A.), 723, 726, **731**.
Julin (Charles), 420, 479, 723, 829.

K

Kempe (Sir Alfred), 56.
Khnopff (F.) 824.
Klein (Félix), 963.
Knapen (A.), 216.
Knott (C.-G.), 79.
Koenen (Adolphe von), 963.

L

Lacroix (Alfred), 10, 55, 74, 78.
Lafontaine, 484.

Lagrange, 95
Lallemand, 51, 55, 65, 78.
Lamé, 179.
Lameere (Auguste), 93, 95, 154, 221, 829, 846a.
Leboucq (Hector), 332.
Lecat (Maurice), 94.
Le Chatelier, 74.
Leclercq (Jules), 825.
Lecointe (Georges), 11, **37**, **49**, 55, **63**, 67, 77, 93, 98, 159, 225, 417, 421, 484, 508, 510, **545**, 827, 829, 852, 964.
Ledent (René), 216.
Lenain (Louis), **19**, **31**, 99, 504, 723
Lenard (Philippe), 963.
Le Paige (C.), 94, 221, 418, 420, 423, 723, 846a.
Lippmann, 74, 79.
Lockyer (N.), 417, 964.
Lohest (Max), 11, 221, 484, 723, 833, **835**.
Lorentz, 417, 964.
Lyons (H.-G.), 56, 79.

M

Mc Clellan, 56.
Malaise (Constantin), 3, 4, 15, 328, 963.
Mansion (Paul), 328, 418, 968.
Marchal (Chevalier Edmond), 3, 963.
Marchal (Émile), 4, **15**, 98, 152, 214, 330, 331, 417, 482, 507, 508, 961, 964.
Marchal (Paul), 964.
Marinesco, 74, 81.
Massart (Jean), 11, 12, **40**, 55, 61, **63**, 74, 77, 94, 95, 152, 153, 221, **237**, 330, 484, 833.
Maupas (Émile), 963.
Merrimau, 74.
Mesnil (F.), 418, 964.
Metchnikoff (Élie), 3, 963.
Meuris (A.), 726.
Michielsen, 95, **119**.
Mickiewicz, 74, 80.
Ministre des Sciences et des Arts, 150, 214, 332, 480, 508, 724.
Moureu (Charles), 55, 74, 79, 417, 964.
Mourlon (Michel), 3, 4, 12, 963.
Moutard, 285.
Mrazec (L.), 81.
Mund (W.), 95, **113**, 510, **529**, 8 6b.
Murray (Sir John), 963.

N

Nasini (Raffaello), 80.
Nature, 724.
Neuberg, (J.), 10, 95, 331, **333**, 418, 420, 423, 846a, 846c.
Nicaise (Ch.), 328, **361**.
Noblom (Maurice), 480.
Nolf (Pierre), 152, 154, 217, 220, 328, 417, 508, 964.
Noyes (A.-A.), 55, 74, 78.

O

Oechsner de Coninck, 829.
Osborn (Henry Fairfield), 418, 724, 964.

P

Painlevé, 65, 74, 79.
Pelseneer (Paul), 1, **4**, 11, 98, 99, 213, 225, 419, 479, 480, 484, 504, 509, 510, **545**.
Peniakoff (D.), 150.
Périer (Edmond), 74, 79.
Petrovic (Michel), 81.
Petrovitch, 74.
Pfeffer (Wilhelm), 963.
Picard (C.-E.), 55, 65, 67, 79.
Pienkowski, 216, **393**, 419, 726.
Pirenne (Henri), 214, 510.
Popovitch (Bogdan), 56.
Poutet, 846d, 848.

Q

Quincke (Georges-H.), 963.
Quinquaud, 216, **315**.

R

Raffalovich (Arthur), 150.
Reina, 74, 80.

Remy (L.), 726.
Ribaucour, 425.
Riccò (Annibale), 80.
RICHET (Charles), 418, 764.
Roskam (Dr Jacques), 152, 215, 961.
ROUX, 74, 79, 963.
RUTOT (Aimé), 4, **12**, 95, 98, 214, 829, **907**.

S

Sakuraï (Jòji), 56, 74, 80.
SAUVAGEAU, 418, 964.
Schafer (Sir Edward Sharpey), 56, 74, 79.
Scholl, 94, 328, 483.
Schuster (A.), 51, 56, 65, 72, 79.
Schwendener (Simon), 963.
SEGRE (Profr Corrado), 214.
SERVAIS (Cl.), 848.
Service géologique du Portugal, 9, 724.
Sherrington (C.), 56, 80.
Smekens, 483.
Société belge d'électriciens, 151.
Société belge de géologie, 151.
Société chimique de Belgique, 480.
Société de biologie de Paris, 479.
Société de physique et d'histoire naturelle de Genève, 150.
Société géologique de Belgique, 151.
Société mathématique de France, 9.
Société royale de botanique, 151.
Société royale de géographie, 151.
Société royale de médecine de Gand, 214.
Société royale d'entomologie de Belgique, 94.
Société royale d'anthropologie de Bruxelles, 94.
Société royale des sciences médicales et naturelles de Bruxelles, 94.
Société royale des sciences de Liége, 151.
Société royale malacologique de Belgique, 214.
Société verviétoise d'archéologie et d'histoire, 151.
Soutzo (A.), 81.
Spelkens (L.), 418, 508.
Starling, 74.
STAS (Jean-Servais), 962.
Stevelinck, 727, 831.
STROOBANT (Paul), 94, 98, 99, 149, 152, 157, 484, 509, 510, 725, 829, 832.
STUYVAERT (Modeste), 10, 11, **83**, 96, 152, **289**, 329, 418, 420, 421, 829, 831, 846B, 846C, 962.
SUESS (Édouard), 963.
SWARTS (Fr.), 95, 98, 225, 484, 509, 510, **545**, 827, 831, 832, 849.

T

Tanakadate (A.), 56, 80.
Terby (Jeanne), 331, 418, **497**, 961.
TERMIER, 418, 964
THOMSON (Sir Joseph), 51, 56, 417, 964.
Tilden (Sir William), 56.
Timmermans (Jean), **753**.
Trasenster, 484.

U

Université de Gand, 9.
Université de Strasbourg, 830.
URBAIN (G.), 417, 964.

V

VAN AUBEL (Edm.), 10, 94, 829.
VAN BAMBEKE (Charles), 3, 4, 95, 963.
VAN DER STRICHT (O.), 848.
VANDE SANDE BAKHUYSEN, 418.
Vandevelde (A.-J.-J.), 383.
Van Helmont, 851.
Van Laer, 846B.
VANLAIR (Constant), 963.
Van Mons (J.-B.), 480.
VAUTHIER, 824, 827.
VERLANT (Ernest), 825, 827.
VERSCHAFFELT (J.-E.), **285**, 328, 329, 417, 419, 441, 508, 829, 964.
Vevikolaïeff, 150.
Vincent (G.), 846B.
Vincent (J.), 508.
VOLTERRA (V.), 56, 67, 180, 417, 964.

W

Walcott, 74.
Wallach (Otto), 963.
Wibier, 484.
WILLEM (Victor), 829, 846B.
WILMOTTE (Henri), 216, 329, 418, 480, 724, 846B.
WILMOTTE (Maurice), 824, 826

Z

Zoujovitch, 56.
Zujovic, 74, 81.

TABLE DES MATIÈRES

CLASSE DES SCIENCES. — *Séance du 1er octobre 1919.*

M. le Directeur félicite MM. le Paige, Grand-Officier de l'Ordre de la Couronne; Léon Fredericq et Gilkinet, Commandeurs de l'Ordre de Léopold, et MM. Cesàro, Jorissen, Julin et Lohest, Officiers de l'Ordre de Léopold; il annonce que M. Louis Le Nain, ff. de Secrétaire perpetuel pendant l'occupation, est nommé Commandeur de l'Ordre de Léopold. 723
Correspondance : M. le Ministre des Sciences et des Arts transmet trente exemplaires du rapport du jury chargé de décerner le prix décennal des sciences mathématiques pures. — L'Académie des Sciences de Lisbonne félicite l'Académie de l'heureuse issue de la guerre. — La revue *Nature* fait part de la célébration de son cinquantenaire. — Les services géologiques du Portugal annoncent la mort de M. Paul Choffat. — MM. Osborn, J.-J. Thomson, Hale et de Margerie remercient au sujet de leur élection. — M. Henri Wilmotte demande le dépôt aux archives d'une suite à sa note. — Hommages d'ouvrages 724
Plis cachetés 725
Élections 725
Rapports 726
Travaux présentés 727
Augmentation du nombre des membres 727
Prix décennaux 728
Fondation De Potter 729
Commission de la Biographie nationale 729
Conseil national de Recherches 729

Communications et Lectures.

Chimie végétale. — *Recherches sur la cyanogenèse. Une réaction de l'acide citrique,* par A.-M. Jorissen . . . 731
Physique théorique. — *Sur les invariants optiques,* par E. Henriot . . . 739
Chimie physique. — *Essai sur l'analyse piézométrique* (2e mémoire), par Jean Timmermans . . . 753
Chimie. — *Isomérisation et polymérisation du sulfocyanure de méthyle,* par J. Gillis . . . 787
Physique mathématique. — *La Gravifique* (quatrième communication), par Th. De Donder. . . . 813

Assemblée générale extraordinaire des trois Classes du 3 novembre 1919.

Littérateurs a l'Académie . . . 824

Séance du 8 novembre 1919.

M. le Directeur félicite MM. Delacre, de la Vallée Poussin, Demoulin, Lameere, Stroobant et Van Aubel, promus Officiers, et MM. Stuyvaert, Verschaffelt et Willem, nommés Chevaliers de l'Ordre de Léopold; MM. Lecointe et Rutot, Commandeurs de l'Ordre de la Couronne . 829
Nécrologie. — Décès de M. Oechsner de Coninck . 829
Correspondance : M. Julin regrette ne pouvoir faire la lecture promise pour la séance publique. — L'Université de Strasbourg invite l'Académie à se faire représenter à son inauguration. — M. Binon demande de le présenter comme candidat à un prix Nobel. — M. Dupont soumet un ouvrage pour l'obtention d'une subvention de la Fondation De Potter. — Hommages d'ouvrages 830
Rapports 831
Fondation De Potter 831
Prix décennaux 832
Tomaison des Bulletins 832
Commission administrative 832
Conseil international de Recherches scientifiques . . . 832
Communications 833

Communications et Lectures.

Discordance de stratification entre le calcaire carbonifère et le houiller en Belgique, par M. Lohest 835
Physique théorique. — *Sur les invariants optiques*, par E. Henriot 837

Séance du 6 décembre.

Comité secret 846A
Commission des finances 846A
Correspondance : L'Académie de médecine fait connaître qu'elle approuve le rapport de l'Académie des sciences au sujet des prérogatives académiques. — Remerciements pour les invitations à la séance publique. — MM. Mund et Van Laer, diplômes de docteurs en sciences chimiques avec la plus grande distinction. — L'Académie du Portugal annonce qu'elle a inscrit parmi ses membres, tous les membres actuels de l'Académie de Belgique. — M. H. Wilmotte demande une subvention. — M. Ergo demande à pouvoir s'expliquer au sujet de « ce qu'il y aurait à faire sur le terrain de l'art musical ». — M. Stuyvaert remercie pour la subvention qui lui a été allouée 846B
Pli cacheté 846B
Rapports. 846B
Présentation d'ouvrages. 846C
Proposition de modification au règlement 846C
Modification du règlement de la Fondation de Potter. 846D
Communications et lectures. 846D

Séance du 15 décembre 1919.

Hommages d'ouvrages 848
Élections : MM. Cl. Servais, titulaire; Th. De Donder, J. Boulvin, Paul Fourmarier, H. de Dorlodot, O. Van der Stricht et V. Grégoire, correspondants. 848
Rapport 848
Inauguration de l'Université de Strasbourg 849
Centenaire 850
Tables des constantes physiques 851
Communications et Lectures. 851
Note bibliographique 852
Programme des concours pour 1921 853

Communications et Lectures.

Géométrie algébrique. — *Les surfaces bicanoniques doubles ayant un nombre fini de points de diramation*, par Lucien Godeaux . . . 855
Physique théorique. — *Sur les invariants optiques*, par E. Henriot . 865
Physique. — *Mesures d'indices de réfraction de solutions d'une substance absorbante*, par R. Crombez 875
Géologie. — *Sur le Salmien de la vallée de la Lienne*, par J. Anten. . . . 885
— *Le contact du Dévonien et du Calcaire carbonifère à Horion-Horzémont*, par P. Fourmarier. 889

Séance publique du 16 décembre 1919.

La découverte scientifique, par A. de Hemptinne. 895
L'Atlantide, par A. Rutot 907
Proclamation 961
Nécrologie 963
Radiations 963
Élections. 964
Bulletin bibliographique 965
Errata 973
Table analytique. 975
Table onomastique 985

Le fonds des publications académiques ayant été systématiquement pillé par les Allemands, il ne sera plus possible de donner suite aux demandes de combler les lacunes antérieures à 1919.

19-4-20.

PUBLICATIONS ACADÉMIQUES DEPUIS LA RÉORGANISATION, EN 1816

Mémoires, t. I-LIV (1820-1904); in-4°.

Mémoires couronnés et Mémoires des savants étrangers, t. I-LXII (1817-1904); in-4°.

Mémoires couronnés, t. I-LXVI (1840-1904); in-8°.

Tables des Mémoires, nouvelle édition, 1772-1897; in-8°. — **Supplément**, 1898-1914

Mémoires (n sér.) **in-4°** de la Classe des sciences, t. I, II, IV (2e fasc.).

Mémoires (n sér.) **in-8°** de la Classe des sciences, t. I, II, IV.

Mémoires (n. sér.) **in-4°** de la Classe des lettres, t. I à V.

Mémoires (n. sér.) **in-8°** de la Classe des lettres, t. I à XI (1er fasc.).

Tables de Logarithmes, par A. Namur et P. Mansion; in-8°.

Annuaire, 1re à 84me année, 1835-1914; in-18.

Règlements et Documents concernant les trois Classes (éditions de 1896 et de 1905); in-18.

Fondations académiques, 1914, gr. in-8°.

Bulletins, 1re sér., t. I-XXIII, avec annexes; — 2e sér., t. I-L; — 3e sér. t. I-XXXVI; in-8°. — Classe des sciences, années 1899-1914; Classe des lettres et des sciences morales et politiques et des Beaux-Arts, années 1899-1914. — **Tables générales,** 1832-1914, 9 vol. in-8°.

Bibliographie académique, 1re édit. (1854); — 2e édit. (1874); — 3e édit. (1886); — 4e édit. (1896); — 5e édit. (1907-1909); in-18.

Catalogue de la Bibliothèque de l'Académie, 1re partie : Sociétés savantes et Recueils périodiques — 2de partie : sciences, lettres, arts (1881-1890); 4 vol. in-8°.

Catalogues onomastiques des accroissements, 1883-1914, 3 vol. gr. in-8°.

Catalogue de la bibliothèque du baron de Stassart (1863); in-8°.

Centième anniversaire *de fondation* (1772-1872), 1872; 2 vol. gr. in-8°.

Monuments de la littérature flamande.

Œuvres de Van Maerlant : DER NATUREN BLOEME, t. Ier, publié par J. Bormans, 1857; 1 vol. in-8°. — RYMBYBEL, avec Glossaire, publié par J. David, 1858-1860; 3 vol. — ALEXANDERS GEESTEN, publié par Snellaert, 1860-1862; 2 vol. — **Nederlandsche gedichten,** etc., publiées par Snellaert, 1869; 1 vol. — **Parthonopeus van Bloys,** publié par J. Bormans, 1871; 1 vol. — **Speghel der Wysheit,** van Jan Praet, publié par J. Bormans 1872; 1 vol.

Œuvres des grands écrivains du pays.

Œuvres de Chastelain, publiées par le baron Kervyn de Lettenhove. 1863-1865, 8 vol. in-8°. — **Le premier livre des Chroniques de Froissart,** par le même. 1863, 2 vol. — **Chroniques de Jehan le Bel,** par L. Polain. 1863, 2 vol. — **Li Roumans de Cléomadès,** par André Van Hasselt. 1866, 2 vol. — **Dits et Contes de Jean et Baudouin de Condé,** par Auguste Scheler. 1866, 3 vol. — **Li ars d'amour,** etc., par J. Petit. 1866-1872, 2 vol. — **Œuvres de Froissart :** *Chroniques,* par le baron Kervyn de Lettenhove. 1867-1877, 26 vol. — *Poésies,* par Aug. Scheler. 1870-1872, 3 vol. — *Glossaire,* par le même. 1874, 1 vol. — **Lettres de Commines,** par Kervyn de Lettenhove. 1867, 3 vol. — **Dits de Watriquet de Couvin,** par A. Scheler. 1868, 1 vol. — **Les Enfances Ogier,** par le même. 1874, 1 vol. — **Bueves de Commarchis,** par Adenès li Rois, par le même. 1874, 1 vol. — **Li Roumans de Bertes aux grans piés,** par le même. 1874, 1 vol. — **Trouvères belges du XIIe au XIVe siècle,** par le même. 1876, 1 vol. — Nouvelle série, 1879, 1 vol. — **Li Bastars de Bullion,** par le même. 1877, 1 vol. — **Récits d'un Bourgeois de Valenciennes (XIVe siècle),** par le baron Kervyn de Lettenhove. 1877, 1 vol. — **Œuvres de Ghillebert de Lannoy,** par Ch. Potvin. 1878, 1 vol. — **Poésies de Gilles li Muisis,** par Kervyn de Lettenhove. 1882, 2 vol. — **Œuvres de Jean Lemaire de Belges,** par J. Stecher. 1882-1891; 4 vol. avec notice. — **Li Regret Guillaume,** par A. Scheler. 1882, 1 volume.

Biographie nationale.

Biographie nationale, t. I à XXI, fasc. 2. Bruxelles, 1866-1914.

Commission royale d'histoire.

Collection de Chroniques belges inédites, publiées par ordre du Gouvernement, 125 vol. in-4°. (Voir la liste sur la couverture des Chroniques.)

Comptes rendus des séances, 1re sér., avec table (1837-1849), 17 vol. in-8°; — 2me sér., avec table (1850-1859), 13 vol. in-8°; — 3me sér., avec table (1860-1872), 15 vol. in-8°; — 4me sér., avec table (1873-1891), 18 vol. in-8°; — 5me sér., t. I-XI; à partir de 1902, t. 71-82.

Annexes aux *Bulletins.* Voir la liste sur la couverture des Chroniques et des Comptes rendus.

SMITHSONIAN INSTITUTION LIBRARIES
3 9088 01354 2816